

分类号:

密级: 公开

学校代码: 10140

学号: 4031531701



遼寧大學

LIAONING UNIVERSITY

硕士学位论文

THESIS FOR MASTER DEGREE

论文题目: 关于非标准哈密顿方程的理论研究

The Theoretical Research about Non-standard
Hamiltonian Equation

英文题目:

论文作者: 关 放

指导教师: 刘世兴 副教授

专 业: 理论物理

完成时间: 二〇一八年五月

辽宁大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文是本人在导师的指导下独立完成的。论文中取得的研究成果除加以标注的内容外，不包含其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果，不包含本人为获得其他学位而使用过的成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体均已在文中进行了标注，并表示谢意。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：姜放

2018 年 5 月 9 日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交学位论文的原件、复印件和电子版，允许学位论文被查阅和借阅。本人授权辽宁大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编学位论文。学校须按照授权对学位论文进行管理，不得超越授权对学位论文进行任意处理。

保密（ ），在____年后解密适用本授权书。（保密：请在括号内划“√”）

授权人签名：姜放

指导教师签名：刘世光

日期：2018 年 5 月 29 日

日期：2018 年 5 月 29 日

申请辽宁大学硕士学位论文

关于非标准哈密顿方程的理论研究

The Theoretical Research about Non-standard
Hamiltonian Equation

作 者：关放

指导教师：刘世兴 副教授

专 业：理论物理

答辩日期：2018 年 5 月 26 日

二〇一八年五月·中国辽宁

摘 要

在物理学、力学和工程实际中，分析力学及其研究方法占有至关重要的地位。对分析力学来说，它最大的好处就是提出了一套以哈密顿原理为基础建立的力学理论体系的研究方法。分析力学方法不仅适用于经典力学问题，同时在电动力学、统计力学、量子力学、非线性科学以及一些近代物理理论的发展过程中都起着至关重要的作用。

本文基于哈密顿原理，通过引入指数形式的哈密顿作用量，并构造非标准形式的哈密顿泛函，利用等时变分原理得到了一类新型的非标准形式的哈密顿方程。该方程有别于传统形式的哈密顿方程，其哈密顿函数不再是动能和势能的和的形式，其方程也要比传统形式的哈密顿方程复杂，但是在一些特殊条件下，它却能简化为标准形式的哈密顿方程。因此，可以说标准形式的哈密顿方程是非标准哈密顿方程的特例。同时，非标准哈密顿方程也具有完全不同于标准哈密顿方程的性质，如对于非标准哈密顿方程体系，即使其哈密顿函数不显含时间也不一定是守恒量。如果非标准哈密顿函数中不显含某个广义坐标，则其该广义坐标对应的广义动量亦不一定是守恒量，只有在特殊条件下，不显含时间的哈密顿函数或不显含的广义坐标对应的广义动量才是守恒量。非标准哈密顿函数存在于某些物理，力学和工程等复杂的动力学系统中。采用非标准动力学系统研究一些特殊的复杂的非线性动力学系统问题时具有很好的性质，并且结果简单，易于操作。非标准哈密顿系统为我们提供了一类新的动力学系统，它可以应用于非线性动力学系统，耗散动力学系统，经典理论的量子化问题和宇宙学等问题中。

本文首先介绍了变分法与非标准动力学系统的发展以及研究现状。其次，简要介绍了经典变分原理，标准形式的拉格朗日方程和哈密顿方程，非标准形式的拉格朗日方程理论及其应用。最后本文详细讨论了非标准哈密顿方程的动力学性质，并举例说明它在非线性力学中的应用。通过实例可以看出，非标准哈密顿方程在解决非线性动力学问题中有着很重要的作用，对于一些较为复杂的动力学问题，引入非标准哈密顿方程和非标准拉格朗日方程有时会使问题变得简单，降低计算强度。所以，非标准哈密顿系统是一类重要的动力学系统，

值得深入研究。

关键词：非标准哈密顿方程，非标准拉格朗日方程，变分原理

ABSTRACT

Analytical mechanics and its research method play a crucial role in physics, mechanics and engineering. For analytical dynamics, its greatest benefit is to propose a set of methods which establish a series of mechanical systems based on the Hamiltonian principle. The analytical mechanics method not only applies to classical mechanics problems. At the same time, it plays an important role in the development of electrodynamics, statistical mechanics, quantum mechanics, nonlinear science and some modern physics theories.

This paper is based on the Hamilton principle. It introduces an exponential form of Hamiltonian function and constructs the non-standard Hamiltonian functional, and then the nonstandard Hamiltonian equation is obtained by using the variation principle. This equation is different from the traditional Hamiltonian equation. Its Hamiltonian function is not the sum of kinetic energy and potential energy and its equation is more complex than the traditional Hamiltonian equation. But under some special conditions, it can be reduced to the standard Hamiltonian equation. So the standard Hamiltonian equation is a special case of the non-standard Hamiltonian equation. At the same time, the non-standard Hamiltonian equation is also completely different from the standard Hamiltonian equation. For non-standard Hamiltonian equation, even if the Hamiltonian function does not explicitly contain time, it is not necessarily conserved. If the non-standard Hamiltonian function does not explicitly contain a generalized coordinate, the generalized momentum corresponding to its generalized coordinates is not necessarily conserved. Only under special conditions, the generalized momentum corresponding to the Hamiltonian or the generalized coordinates that do not contain the time is conserved. Non-standard Hamiltonian functions exist in some complex dynamics systems such as physics, mechanics and engineering. The non-standard dynamics system is used to study some special complex nonlinear dynamic system problems, and the results are simple and easy to operate. Non-standard Hamiltonian system provides us with a new class of dynamical

system and can be applied to nonlinear dynamic system, the dissipative dynamic system, the classical theory of quantization problem and cosmology, etc.

Firstly, the development and research status of variation method and non-standard dynamics systems are introduced. Secondly, I introduce the classical variation principle, the Lagrange equation and Hamiltonian equation of the standard form, and the Lagrange equation theory and its application of non-standard form. In the end, the dynamic properties of the non-standard Hamiltonian equation are discussed in detail, and its application in nonlinear mechanics is illustrated. It can be seen from the examples that the non-standard Hamiltonian equation plays an important role in solving nonlinear dynamic problems. For some of the more complex dynamic problems, the introduction of non-standard Hamiltonian equations and non-standard Lagrange equations can sometimes make the problem simple and reduce the computational intensity. Therefore, the non-standard Hamiltonian system is an important dynamic system, which is worthy of further study.

Key Words: non-standard Hamilton equation, non-standard Lagrange equation, variation principle

目 录

第 1 章 绪论.....	1
1.1 变分法的发展与应用	1
1.2 非标准拉格朗日方程的研究现状及背景	2
1.3 非标准哈密顿方程的研究现状及背景	3
1.4 主要研究内容简介.....	4
第 2 章 经典变分原理	5
2.1 变分法	5
2.1.1 泛函的概念	5
2.1.2 变分法简介	6
2.2 微分变分原理	7
2.2.1 达朗贝尔原理.....	7
2.2.2 虚位移原理.....	7
2.2.3 达朗贝尔—拉格朗日原理	8
2.2.4 理想系下的拉格朗日方程.....	8
2.2.5 保守系下的拉格朗日方程.....	10
2.3 积分变分原理.....	10
2.3.1 哈密顿原理	10
2.3.2 正则方程.....	12
第 3 章 非标准形式的拉格朗日方程	14
3.1 指数形式的拉格朗日方程	14
3.1.1 计算非标准拉格朗日方程的解.....	14
3.1.2 不显含 q 的非标准拉格朗日函数	16
3.2 幂函数形式的拉格朗日方程.....	18

第 4 章 非标准哈密顿方程.....	21
4.1 指数形式的非标准哈密顿方程	21
4.2 非标准哈密顿方程的应用	25
4.2.1 显含时间的哈密顿函数	25
4.2.2 不显含时间的哈密顿函数	28
4.2.3 不显含 q 的哈密顿函数	32
第 5 章 结论与展望.....	35
5.1 论文的总结	35
5.2 未来研究的展望	36
致谢.....	37
参考文献	38
攻读学位期间发表的学术论文及参加科研情况.....	40

图 表 目 录

图目录

图 4-1 (a) 方程 (4.2.3) 的解随时间的变化	(b) 方程 (4.2.4) 在平面 $q-p$ 上的轨迹	26
图 4-2 (a) 方程 (4.2.5) 的解随时间的变化	(b) 方程 (4.2.6) 在平面 $q-p$ 上的轨迹	27
图 4-3 (a) 方程 (4.2.7) 的解随时间的变化	(b) 方程 (4.2.8) 在平面 $q-p$ 上的轨迹	28
图 4-4 (a) 方程 (4.2.9) 的解随时间的变化	(b) 方程 (4.2.10) 在平面 $q-p$ 上的轨迹	29
图 4-5 (a) 方程 (4.2.11) 的解随时间的变化	(b) 方程 (4.2.12) 在平面 $q-p$ 上的轨迹	30
图 4-6 (a) 方程 (4.2.13) 的解随时间的变化	(b) 方程 (4.2.14) 在平面 $q-p$ 上的轨迹	31
图 4-7 (a) 方程 (4.2.15) 的解随时间的变化	(b) 方程 (4.2.16) 在平面 $q-p$ 上的轨迹	33

第 1 章 绪论

1.1 变分法的发展与应用

变分法作为数学的一个分支，起源于 17 世纪末期。它是一个处理函数的数学领域，和它相对的是处理数的函数的普通微积分。在许多具体问题中，变分法有广泛的应用，最终，它的目的是为了求出极值函数，它能够使得泛函取得极大值或者极小值。科学家们在一些具体的物理学问题中发现了变分法，最终，它由数学家研究出了结论。无论是在科学与技术方面，还是其它领域，尤其是在物理学中，变分法都有着十分重要的作用和地位。它为我们提供了有限元方法的数学基础。在有关边界值问题的求解方面，变分法可谓是一种强有力的数学工具。

变分法的初创时期是在 18 世纪，在那时已经建立了满足欧拉方程的极值条件，并据此解决了许多数学和物理学中的问题。在 19 世纪，变分法被大家更广泛地应用到数学和物理学中，并且建立了极值函数的充分条件。在 20 世纪初期，巴黎举行了国际数学家大会，在此次会议讲演中，德国著名数学家希尔伯特提到了 23 个著名的数学问题，在这些问题中就有三个问题和变分法相关，变分法的理论和中心思想贯穿了库朗和希尔伯特所著的《数学物理方法》^[1]一书中。而 20 世纪变分法发展的标志，是莫尔斯的大范围变分法则，即莫尔斯理论^[2]。他利用变分法求解经济学中的动态最优问题，并获得了非常重要的成果。因此，变分法在经济学领域也是一个非常好的工具。我们把在给出目标函数和约束条件的情况下，求出使得目标函数维持最优状态的控制变量函数的方法，也称为“古典变分法”。

变分法在理论物理中是非常重要的工具，它在物理学中的各个方面都有非常广泛的应用。例如在拉格朗日力学中的最小作用原理，在量子力学相关问题中都有很重要的应用价值，是量子物理研究中的基本方法之一^[3]。在材料学中研究材料平衡问题方面，变分法也有很多用途。它在纯数学中解决问题的例子也有很多，例如在调和函数的研究中，黎曼使用了狄利克雷原理^[3-9]。

变分法可以称为是对泛函求导数、解决泛函极值问题的一种有效方法。比

较典型的就是微分几何里面的测地线、极小曲面和极小子流形、调和映照等问题，物理学和力学中的各种最小作用量原理等问题^[3-9]。变分这个操作本身是非常微妙的，而作用于无限维函数空间上的泛函才是它求导的对象。比如，我们首先要给出函数的空间和目标泛函的精确定义，然后还要思考如何在函数空间上给出一个合理的无穷维微分流形的结构，最后才能合理地定义求导。无穷维的泛函分析本身就比较有限维的数学分析复杂得多，很多在有限维空间中自然成立、甚至都不需要计算和思考的结论，在无穷维问题中很可能就不成立了，也会出现很多新的性质，遇到很多复杂的问题。

1.2 非标准拉格朗日方程的研究现状及背景

众所周知，在物理、机械、工程的领域中，动力学系统的运动方程源自于哈密顿原理 $\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(p, \dot{q}, t) dt = 0$ ，也可以用 $\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} [p\dot{q} - H(q, p, t)] dt = 0$ 的形式表示， L 和 H 是标准拉格朗日函数和哈密顿函数， q 是 $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ 的广义坐标， p 是与广义坐标 q 相对应的广义动量。从哈密顿最小作用原理，可以得到拉格朗日方程或哈密顿正则方程。拉格朗日方程在物理学中是很重要的一个分支，在许多方面，诸如力学、工程学等问题中都有非常重要的应用。在物理学领域中，一些基本的运动学方程都可以由拉格朗日方程给出。而在最近，关于非标准拉格朗日方程的研究也已经有很多重要的成果^[4-11]。

力学中最普遍的问题大多是关于非线性和非保守动力学系统的问题，非标准的拉格朗日方程不同于标准的拉格朗日方程，它具有一些标准拉格朗日方程所不具有的一些性质，它对于非线性非保守问题可以给出很好的描述，因此对非标准拉格朗日方程的研究有很重要意义和价值^[10-18]。

早在 1988 年就有科学家对非标准拉格朗日方程有了初步的研究。Musielak^[10,11]研究了耗散系统，给出了非标准拉格朗日方程理论的存在条件，并进一步拓展了它的条件。El-Nabulsi^[12]介绍了非标准拉格朗日方程的两种不同的作用泛函并得到了相应的运动学方程。Y.Zhang^[18]等人研究了非标准拉格朗日动力学系统的 Routh 约化方法，从而对非标准拉格朗日系统进行了简化，便于求解。

研究发现, 用非标准拉格朗日方程来表示的动力学系统有很重要的实际意义, 尤其是对于一些较为复杂的动力学系统, 采用非标准拉格朗日方程方法有时能使研究问题简化, 因此非标准拉格朗日系统在非线性演化问题, 变系数耗散动力学系统, 弗里德曼-罗伯森-沃克模型, 经典理论的量子化等问题中有着广泛的应用^[10-18]。

对于非标准拉格朗日方程的研究与探索, 可以为研究复杂动力学系统中的问题提出一些新的观点和途径。从非标准拉格朗日方程中推导出的运动学方程非常有意义并且可以应用到许多物理学问题当中。从非标准拉格朗日方程出发得到的一些动力学系统的方程可以看作是标准拉格朗日方程的一种微扰部分, 用来探索物理学和力学中的复杂问题。

在时间或者空间中, 描述动力学的运动方程的系数是变化的。对于非标准拉格朗日方程, 它可以有 e -指数形式的拉格朗日方程, 也可以有幂函数形式的拉格朗日方程^[12]。选择不同的作用泛函, 并利用哈密顿最小作用原理, 采用等时变分方法, 就可以得出相对应的非标准的拉格朗日方程。

1.3 非标准哈密顿方程的研究现状及背景

众所周知, 在物理学, 力学, 工程学中, 许多运动微分方程都可以由哈密顿原理得出^[3]。哈密顿力学是在拉格朗日力学的基础上, 对理想的, 完整的动力学系统作了更深入的研究。哈密顿等人的研究成果, 在原理上揭示了经典的动力学系统的一些基本性质。哈密顿力学成为经典力学向近代物理学过渡的桥梁, 在物理学和力学发展中, 有着广泛的应用。

非标准哈密顿方程的提出, 丰富了哈密顿系统的理论体系, 可以成为一种解决复杂问题的新方法。近年来, 关于非标准拉格朗日方程的问题已经有了一些重要的理论研究^[10-18]。但是, 关于非标准哈密顿方程的理论研究却只有寥寥几篇^[19-23]。非标准哈密顿理论的根源是 Dyson^[19]报道的关于 Feynman^[19]的研究。Feynman 在研究物理系统中典型的强约束力的 Poisson 括号关系时首次提出了非标准哈密顿系统, Dyson 首次在他的文章《麦克斯韦方程的 Feynman 证明》中首次提到了 Feynman 的上述工作。之后, Feynman 的这一想法被 Hojman 和 Shepley^[21]进行了延伸和扩展, 并用于研究可交换坐标系下的一致量子化问题和构造一阶运动方程的哈密顿理论。非标准哈密顿函数有别于标准的哈密顿函数,

其哈密顿函数不涉及动能与势能的明显区分，一般不表示为动能与势能之和的形式。因此，其在应用上比标准哈密顿理论具有更广泛的适用性。因此将受到越来越多的人的关注。并在非线性演化方程，弗里德曼宇宙模型，变系数耗散动力学系统，经典理论的量子化和广义相对论中有着广泛的应用。

1.4 主要研究内容简介

本文是以变分原理和关于非标准拉格朗日方程的一些理论研究作为依据，主要研究出一种新形式的哈密顿方程，即非标准哈密顿方程。本文的主要研究内容如下：

第一章主要介绍了变分法、非标准拉格朗日方程、非标准哈密顿方程的发展历史和研究现状，并且对本文的主要内容作了简单介绍。

第二章主要介绍了关于经典变分原理的一些基础知识，对泛函和变分法的概念都进行了简单的介绍。介绍了微分变分原理和积分变分原理，以及变分原理适用的各种情况，以及达朗贝尔原理和虚位移原理的形式，并且清楚的给出了如何利用变分方法，从哈密顿最小作用量原理出发，推导出拉格朗日方程和哈密顿正则方程的具体过程。

第三章介绍了关于非标准拉格朗日方程的一些理论研究，介绍了两种不同形式的拉格朗日方程——指数形式和幂函数形式的，并且讨论了在不同条件下方程的各种性质，并针对不同的性质举例说明。

第四章主要讲述了非标准哈密顿方程的研究与推导过程，给出了如何通过变分法来推导出非标准哈密顿方程的具体步骤和过程，并且讨论了在各种约束条件下方程的形式，以及非标准哈密顿方程在什么条件下可以转化成标准形式的哈密顿方程。举例说明了非标准哈密顿方程的简单应用，得出了一些非标准哈密顿方程的性质。

第五章是对本论文的总结，并对今后的一些研究方向进行展望。

第2章 经典变分原理

在分析力学中，变分原理分为两种，其中一种是微分变分原理，另一种是积分变分原理。微分变分原理所研究的内容是，在某一力学系统中，某状态邻近无限小的时间间隔中的真实运动与其它可能运动之间的比较。从比较的结果可以看出，对于真实运动来说，某函数取极值。积分变分原理所研究的内容是，在力学系统中，一段有限的时间间隔内的真实运动与可能运动之间的比较。从比较的结果上来看，对于真实运动来说，某泛函取极值^[24]。

总的来说，对于分析力学来说，变分原理是它的根本和出发点。同时又有相当的概括性，对坐标的不变性以及微分方程有更广泛的适应性等优点。

在这一章里我们介绍微分变分原理，以及完整系统在广义坐标下的积分变分原理。

2.1 变分法

2.1.1 泛函的概念

我们设 x 和 y 为两个变量， D 是一个给定的数集。假设对 D 中的每个数 x ，都会有一个变量 y 按确定关系与之相对应，这样我们称 y 为 x 的函数，记作 $y = f(x)$ ，把 x 叫做自变量，把 y 叫做因变量。对于多元函数，记作 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。

现在，我们给定一集合 D ，它由任何对象所组成，这里我们说的任何对象可以是数、数组、点、面、线等等，也可以是某个函数或者某系统状态等。设集合 D 中的元素都用 x 表示，如果对于集合中的每一个元素 x ，都有一个数 y 与之对应，则称 y 是 x 的泛函，记作 $y = F(x)$ 。

有的时候，我们可以将泛函看作是函数，也可以将函数看作是泛函。例如，集合 D 中的元素是数 x ，则泛函 $y = F(x)$ 可以看作是函数 $y = f(x)$ ；如果集合 D 中的元素为数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，则泛函 $y = F(x)$ 可以看作是函数 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。虽然是这种情况，函数和泛函依旧是两个不同的概念。

对于函数来说，它所表示的是数与数之间一一对应的关系，而对于泛函来说，它表示的是函数和数之间一一对应的关系。所以，我们认为，泛函的特殊情况即为函数概念^[25]。

2.1.2 变分法简介

我们将对泛函求极值的研究方法称为变分法，凡是关于求泛函的极值的问题都可以称作是变分问题。

变分又分为两种情况，一种是等时变分，另一种是全变分，全变分又可以称作非等时变分。在这章中我们以介绍等时变分为主。

我们设集合 D 中的元素是表示某一力学系统中的运动函数 $q = q(t)$ ， t 即为自变量， q 是力学系统中的广义坐标。当自变量 t 有一个微小的变化，即微小增量 dt ，对应的函数 q 的微小增量的线性主部 dq 称为函数的微分，记为

$$dq = q'(t)dt$$

在自变量 t 保持不变的情况下，如果发生微小的变化的是函数本身的形式，则会得到另一条曲线 $\tilde{q}(t)$ ，可以看出这条曲线有无数条。令

$$\tilde{q}(t) = q(\varepsilon, t) = q(t) + \varepsilon\eta(t)$$

式中 ε 为一参数，为无穷小量。如果 $\varepsilon = 0$ ，即得函数 $q(t)$ ；如果 ε 取其它不同的值，即得一些与 $q(t)$ 非常相近的函数。

所以，在瞬时 t ，我们得到了因函数本身形式的微小变化而形成的微小增量，我们将这个微小增量的主部 δq 叫做函数的变分，记为

$$\delta q = \tilde{q} - q = \varepsilon\eta(t)$$

因为在瞬时 t ，这种情况下不考虑时间 t 的变化，所以，我们将这样的变分叫做等时变分。

下面介绍一下等时变分的两种运算规则。

在函数取等时变分的情况下，自变量 t 是不变的，而变分运算和时间无关，所以，变分与对时间求导数的运算顺序可以相互交换，即

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta q) &= \frac{d}{dt}[\tilde{q}(t) - q(t)] = \dot{\tilde{q}}(t) - \dot{q}(t) \\ &= \delta \dot{q} = \delta\left(\frac{d}{dt}q\right) \end{aligned}$$

同理，变分与对时间的积分的运算顺序也可以相互交换，即

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \delta q(t) dt &= \int_{t_1}^{t_2} [\tilde{q}(t) - q(t)] dt = \int_{t_1}^{t_2} \tilde{q}(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} q(t) dt \\ &= \delta \int_{t_1}^{t_2} q(t) dt\end{aligned}$$

显然看出，导数的变分就是变分的导数；而变分的积分就是积分的变分^[26]。

2.2 微分变分原理

2.2.1 达朗贝尔原理

设力学体系由 n 个质量为 $m_i (i=1, \dots, n)$ 的质点组成，质点的加速度为 $a_i = \ddot{r}_i$ ，我们把 $\Phi_i = -m_i \ddot{r}_i$ 称为惯性力。根据牛顿运动定律，在每一瞬时，作用在质点上的主动力 F_i ，以及假想的惯性力 Φ_i ，约束力 R_i ，满足平衡条件

$$F_i + \Phi_i + R_i = 0 \quad (2.2.1)$$

达朗贝尔原理无论在理论上还是在应用上，都有着重要的意义和价值。首先，它把动力学问题用静力学平衡的方法来解决，形成所谓的“动静法”。用这个方法思考问题比较简单，而且有时候解题很方便。其次，达朗贝尔原理与虚位移原理的结合构成了动力学普遍方程——达朗贝尔—拉格朗日方程^[24]。

2.2.2 虚位移原理

虚位移原理可以表述如下：在理想约束条件下，力学的系统平衡的充分必要条件是作用在系统上的主动力在任何被约束允许的虚位移中所做的元功之和为零，即

$$\sum_{i=1}^N F_i \cdot \delta r_i = 0 \quad (2.2.2)$$

虚位移原理，也可以把它叫做虚功原理，虚功原理是分析静力学的基础。用它来解决静力学问题有许多方便之处。

2.2.3 达朗贝尔—拉格朗日原理

根据达朗贝尔原理，加在系统的点上的主动力 F_i ，约束反力 R_i ，以及惯性力 Φ_i 所组成的力系，每一瞬时，也可以说是在系统上的每一个位置，平衡条件都会成立。但是我们也可以将由虚位移原理所表示的平衡条件应用到满足平衡条件的力系。因此，我们将达朗贝尔原理和虚位移原理结合，就得到了达朗贝尔—拉格朗日原理。这个原理表述如下：在理想的约束下，所有时刻的真实运动和运动学上可能的运动是不相同的。对于真实运动来说，在系统的任何虚位移中，主动力和假想的惯性力所作的元功之和都为零^[24]。

由达朗贝尔原理，我们有

$$\sum_{i=1}^N (F_i + R_i - m_i \ddot{r}_i) \cdot \delta r_i = 0 \quad (2.2.3)$$

在理想约束下，即当

$$\sum_{i=1}^N R_i \cdot \delta r_i = 0 \quad (2.2.4)$$

时，式 (2.2.3) 变为

$$\sum_{i=1}^N (F_i - m_i \ddot{r}_i) \cdot \delta r_i = 0 \quad (2.2.5)$$

上式就是达朗贝尔—拉格朗日方程的矢量形式。

2.2.4 理想系下的拉格朗日方程

下面我们将通过达朗贝尔方程来推到拉格朗日方程。现在，我们要消去达朗贝尔方程中的虚位移 δr_i ，然后用广义坐标来表示体系的运动学方程，最后就可得到拉格朗日方程。

达朗贝尔方程为

$$\sum_{i=1}^N (F_i - m_i \ddot{r}_i) \cdot \delta r_i = 0$$

我们设质点系有 n 个质点，系统有 s 个自由度，我们用 s 个广义坐标 $q_1, q_2, \dots, q_s$

来表示质点系的位置，广义坐标和时间的函数就可以用 r_i 来表示。

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \quad (2.2.6)$$

虚位移

$$\begin{aligned} \delta r_i &= \frac{\partial r_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial r_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial r_i}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{\partial r_i}{\partial t} \delta t \\ &= \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

将 (2.1.7) 代入到达朗贝尔方程，得到

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_i} - \sum_{i=1}^n F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (2.2.8)$$

我们令

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} \quad (2.2.9)$$

$$P_\alpha = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} \quad (2.2.10)$$

我们来计算 P_α

$$P_\alpha = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha}) - \sum_{i=1}^n m_i (\dot{r}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha}) \quad (2.2.11)$$

现在来求 $\dot{r}_i$ 的表达式，即

$$\dot{r}_i = \frac{dr_i}{dt} = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial r_i}{\partial t} \quad (2.2.12)$$

我们引进系统的动能

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{r}_i^2 \quad (2.2.13)$$

通过计算得到

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (2.2.14)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} \quad (2.2.15)$$

将 (2.2.14) 和 (2.2.15) 代入到 (2.2.11) 中, 得到

$$\sum_{i=1}^n m_i r_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \quad (2.2.16)$$

将 (2.2.16) 和 (2.2.9) 代入到 (2.2.8) 中, 得到

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \quad (2.2.17)$$

上式就是基本形式的拉格朗日方程, 也叫做理想系下的拉格朗日方程。

2.2.5 保守系下的拉格朗日方程

在保守系中, 存在有势能 V , 它为坐标的函数, 则

$$\begin{aligned} F_i &= -\nabla_i V \\ F_{ix} &= -\frac{\partial V}{\partial x_i}, F_{iy} = -\frac{\partial V}{\partial y_i}, F_{iz} = -\frac{\partial V}{\partial z_i} \quad (i=1,2,\dots,n) \end{aligned}$$

我们把 V 变成 $q_1, q_2, \dots, q_s; t$ 的函数, 则理想系下的拉格朗日方程变为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (2.2.18)$$

上式就是保守力系下的拉格朗日方程, 保守力系下的拉格朗日方程应用比较广泛, 因此也直接称为拉格朗日方程或拉氏方程。我们将方程中的 L 称为拉格朗日函数, 亦可以叫拉氏函数。

2.3 积分变分原理

积分变分原理中最著名的就是哈密顿原理了, 对于完整的保守系统来说, 即泛函极值的问题。本节将讨论如何通过变分法得到哈密顿原理。

2.3.1 哈密顿原理

下面我们将应用变分法来推导保守力系下的哈密顿原理。

我们将拉格朗日方程 (2.2.18) 中的各项乘以 δq_α ，然后对 α 进行求和，然后沿一条可能的运动轨迹，即 s 维空间一条曲线自两曲线共同端点 $P_1(t=t_1)$ 至 $P_2(t=t_2)$ 对 t 积分。得到

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^s \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \right] \delta q_\alpha \right\} dt = 0 \quad (2.3.1)$$

且

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{d}{dt} (\delta q_\alpha) \quad (2.3.2)$$

因为我们用的是等时变分，所以 (2.3.2) 式可以变为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \left(\frac{dq_\alpha}{dt} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

我们将 (2.3.3) 代入 (2.3.1) 中，得到

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^s \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \right] \right\} dt = 0$$

即

$$\sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \right) dt = 0 \quad (2.3.4)$$

由于始末端点固定

$$\delta q_\alpha \Big|_{t=t_1} = \delta q_\alpha \Big|_{t=t_2} = 0$$

则 (2.3.4) 式变为

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \right) dt = 0 \quad (2.3.5)$$

因为

$$\delta L = \sum_{\alpha=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} \delta q_{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \delta \dot{q}_{\alpha} \right) \quad (2.3.6)$$

我们将 (2.3.6) 式代入 (2.3.5) 式中得到

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0 \quad (2.3.7)$$

因为 $\delta t = 0$ ，故积分号内的 δ 可以移至积分号外，即

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (2.3.8)$$

(2.3.8) 式即为在保守力系的作用下，哈密顿原理的数学表达形式。其中，我们令 $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ ，称作哈密顿量，则哈密顿原理可以简写为

$$\delta S = 0 \quad (2.3.9)$$

我们可以将哈密顿原理这样叙述，在一个完整的保守系统中，对于一切可能运动与真实运动相比较，前提条件是有相同的时间间隔和始末位置。对于真实运动来说，哈密顿作用量有极值^[24]。

2.3.2 正则方程

接下来，我们将通过哈密顿原理来推导出哈密顿正则方程
通过

$$H = -L + \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha}$$

故

$$L = \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - H \quad (2.3.10)$$

我们将 (2.3.10) 代入到 (2.3.8) 中，得到

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - H \right) dt = 0 \quad (2.3.11)$$

因为 H 为 p, q, t 的函数，算出 (2.3.11) 式中的变分，并且记住 $\delta t = 0$ ，就可以得到

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^s (p_{\alpha} \delta \dot{q}_{\alpha} + \dot{q}_{\alpha} \delta p_{\alpha} - \delta H) dt = 0 \quad (2.3.12)$$

即

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^s (p_{\alpha} \delta \dot{q}_{\alpha} + \dot{q}_{\alpha} \delta p_{\alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \delta p_{\alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \delta q_{\alpha} - \frac{\partial H}{\partial t} \delta t) dt = 0 \quad (2.3.13)$$

因为 $\delta t = 0$ ，所以

$$\sum_{\alpha=1}^s (p_{\alpha} \delta \dot{q}_{\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^s \left[p_{\alpha} \frac{d}{dt} (\delta q_{\alpha}) \right] = \frac{d}{dt} \left(\sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} \delta q_{\alpha} \right) - \sum_{\alpha=1}^s \dot{p}_{\alpha} \delta q_{\alpha} \quad (2.3.14)$$

我们将 (2.3.14) 代入到 (2.3.13) 中，得到

$$\sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} \delta q_{\alpha} \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^s \left[\left(\dot{q}_{\alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \right) \delta p_{\alpha} - \left(\dot{p}_{\alpha} + \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \right) \delta q_{\alpha} \right] dt = 0 \quad (2.3.15)$$

因为两个端点相同，所以

$$\delta q_{\alpha} \Big|_{t=t_1} = \delta q_{\alpha} \Big|_{t=t_2} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s)$$

所以 (2.3.15) 式第一项为零，则 (2.3.15) 式化简成

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^s \left[\left(\dot{q}_{\alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \right) \delta p_{\alpha} - \left(\dot{p}_{\alpha} + \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \right) \delta q_{\alpha} \right] dt = 0 \quad (2.3.16)$$

又由于 δp_{α} 和 δq_{α} 都是相互独立的，所以我们可以得到

$$\begin{aligned} \dot{q}_{\alpha} &= \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \\ \dot{p}_{\alpha} &= -\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

上式即为哈密顿正则方程。

第 3 章 非标准形式的拉格朗日方程

3.1 指数形式的拉格朗日方程

3.1.1 计算非标准拉格朗日方程的解

首先，我们来定义指数形式的拉格朗日方程

$$S = \int_a^b e^{L(t, \dot{q}, q)} dt \quad (3.1.1)$$

这里， $(t, \dot{q}, q) \rightarrow L(t, \dot{q}, q)$ 被假设为一个 C^2 函数

$$q \in C^1([a, b]; R^n) \quad (3.1.2)$$

$$L(t, \dot{q}, q) \in C^2([a, b] \times R^n \times R^n; R) \quad (3.1.3)$$

主要的目的在于找到一个容许函数 $q \in C^1[a, b]$ ，使得 (3.1.1) 式能服从边界条件，即 $q(a) = q_a$ ，并且 $q(b) = q_b$ 有极值。

如果 q 是指数形式的拉格朗日方程的解，则 q 将满足标准形式的欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial \dot{q}} \frac{dL(t, \dot{q}, q)}{dt} \quad (3.1.4)$$

利用

$$\frac{dL(t, \dot{q}, q)}{dt} = \frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial t} + \dot{q} \frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial q} + \ddot{q} \frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial \dot{q}} \quad (3.1.5)$$

我们可以将 (3.1.4) 式写作

$$\begin{aligned} & \frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial \dot{q}} \right) \\ &= \frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial \dot{q}} \left(\frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial t} + \dot{q} \frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial q} + \ddot{q} \frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial \dot{q}} \right) \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

如果拉格朗日方程不含时间，即 $\frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial t} = 0$ ，

则 (3.1.6) 式可以被简化为

$$\frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial \dot{q}} \left(\dot{q} \frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial q} + \ddot{q} \frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial \dot{q}} \right) \quad (3.1.7)$$

我们也可以将上式写成

$$\begin{aligned} & \dot{q} \frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial q} + \ddot{q} \frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial \dot{q}} \equiv \delta L(t, \dot{q}, q) \\ &= \dot{q} \frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial q} + \frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt}(\dot{q}) \\ &= \dot{q} \frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial q} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} \\ &= \dot{q} \left(\frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

因此，式 (3.1.7) 可以取特殊形式

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial \dot{q}} \right) \right] \left[1 - \dot{q} \frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial \dot{q}} \right] \\ &= \frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

如果 $\dot{q}(\partial L(t, \dot{q}, q)/\partial \dot{q}) = K$ ，这里 K 是不等于 1 的常数，这样式 (3.1.9) 就可以化简成标准形式的拉格朗日方程

$$\frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad (3.1.10)$$

也可以写成如下形式

$$K\ddot{q} + \dot{q}^2 \frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial q} = 0 \quad (3.1.11)$$

对于显含时间和不显含时间的拉格朗日函数，可以举两个例子计算一下，现在，取含时非标准拉格朗日函数为

$$L(t, \dot{q}, q) = q\dot{q}t \quad (3.1.12)$$

通过 (3.1.6) 可以得到

$$\ddot{q}q + \frac{q\dot{q}}{t} + \dot{q}^2 = -\frac{1}{t^2} \quad (3.1.13)$$

则方程的解为

$$q(t) = \pm \sqrt{c_2 \log t + 2c_1 - \log^2(t)} \quad (3.1.14)$$

取不含时拉格朗日函数为

$$L(\dot{q}, q) = K \ln q\dot{q} \quad (3.1.15)$$

通过 (3.1.11) 可以得到

$$K\ddot{q}q + \dot{q}^2 = 0 \quad (3.1.16)$$

则方程的解为

$$q(t) = c_{11} \sqrt{c_{12} + 2t} \quad (3.1.17)$$

3.1.2 不显含 q 的非标准拉格朗日函数

如果非标准拉格朗日方程不显含 q ，则 (3.1.6) 式可以被化简为

$$\frac{\partial L(t, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \left(\frac{\partial L(t, \dot{q})}{\partial t} + \ddot{q} \frac{\partial L(t, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(t, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad (3.1.18)$$

显然，这个结果背离了牛顿第一定律。(3.1.12) 式的结果对应着含时正则动量 $p = \partial L(t, \dot{q}, q) / \partial \dot{q}$ ，也就是不是一个运动常数。但是，对于不含时的拉格朗日方程 (3.1.12) 可以化简为

$$\ddot{q} \left(\frac{\partial L(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \right)^2 - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad (3.1.19)$$

所以很容易给出这个方程

$$\frac{\partial L(\dot{q})}{\partial \dot{q}} = -\frac{1}{\dot{q} + a} \quad (3.1.20)$$

在这里, a 是一个积分常数, 因此, 动量并不是一个运动常数。

为了构造指数拉格朗日方程的哈密顿结构, 对于如下哈密顿方程, 我们考虑一个有 N 个自由度的经典力系, 其中 $q = (q_1, \dots, q_N)$

$$H(t, \dot{q}, q) = \sum_{k=1}^N \dot{q}_k \frac{\partial L(t, \dot{q}_k, q_k)}{\partial \dot{q}_k} - L(t, \dot{q}, q) \quad (3.1.21)$$

对于非标准拉格朗日方程, 哈密顿量 H 并不是一个运动常数。

现在我们将 (3.1.15) 式对时间进行微分, 我们可以得到

$$\begin{aligned} \frac{dH(t, \dot{q}, q)}{dt} &= \sum_{k=1}^N \left(\ddot{q}_k \frac{\partial L(t, \dot{q}_k, q_k)}{\partial \dot{q}_k} + \dot{q}_k \frac{d}{dt} \frac{\partial L(t, \dot{q}_k, q_k)}{\partial \dot{q}_k} - \frac{dL(t, \dot{q}_k, q_k)}{dt} \right) \\ &= \sum_{k=1}^N \left(\ddot{q}_k \frac{\partial L(t, \dot{q}_k, q_k)}{\partial \dot{q}_k} + \dot{q}_k \frac{d}{dt} \frac{\partial L(t, \dot{q}_k, q_k)}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L(t, \dot{q}_k, q_k)}{\partial t} - \dot{q}_k \frac{\partial L(t, \dot{q}_k, q_k)}{\partial q_k} - \ddot{q}_k \frac{\partial L(t, \dot{q}_k, q_k)}{\partial \dot{q}_k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^N \left(\dot{q}_k \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L(t, \dot{q}_k, q_k)}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L(t, \dot{q}_k, q_k)}{\partial q_k} \right) - \frac{\partial L(t, \dot{q}_k, q_k)}{\partial t} \right) \\ &= \sum_{k=1}^N \left(-\dot{q}_k \left(\frac{\partial L(t, \dot{q}_k, q_k)}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{\partial L(t, \dot{q}_k, q_k)}{\partial t} + \dot{q}_k \frac{\partial L(t, \dot{q}_k, q_k)}{\partial q_k} + \ddot{q}_k \frac{\partial L(t, \dot{q}_k, q_k)}{\partial \dot{q}_k} \right) \right) - \frac{\partial L(t, \dot{q}_k, q_k)}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

如果, 拉格朗日方程不含时间, 我们也可以得到

$$\frac{dH(t, \dot{q}, q)}{dt} = \sum_{k=1}^N \left(-\dot{q}_k \left(\frac{\partial L(t, \dot{q}_k, q_k)}{\partial \dot{q}_k} \left(\dot{q}_k \frac{\partial L(t, \dot{q}_k, q_k)}{\partial q_k} + \ddot{q}_k \frac{\partial L(t, \dot{q}_k, q_k)}{\partial \dot{q}_k} \right) \right) \right) \quad (3.1.22)$$

只有当约束条件 $\dot{q}(\partial L(t, \dot{q}, q)/\partial \dot{q}) = K \neq 1$ 成立时, 且 $dH(t, \dot{q}, q)/dt = 0$, 哈密顿量

H 是一个运动常数。

3.2 幂函数形式的拉格朗日方程

我们定义一个拉格朗日函数, $L(t, \dot{q}, q): [a, b] \times R^n \times R^n \rightarrow R$

然后, 我们来定义幂函数形式的拉格朗日方程

$$S = \int_a^b L^{1+\gamma}(t, \dot{q}, q) dt \quad (3.2.1)$$

初始条件 $q(a) = q_a, q(b) = q_b$, $\dot{q} = dq/dt$, 如果 q 是方程的解, 则 q 满足以下拉格朗日方程

$$\frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial q} - \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\gamma}{L(t, \dot{q}, q)} \frac{dL(t, \dot{q}, q)}{dt} \frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad (3.2.2)$$

$$\frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial q} - \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{d \ln L^\gamma(t, \dot{q}, q)}{dt} \frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad (3.2.3)$$

当 $\gamma = 0$ 时, 方程 (3.2.2) 可以化简成标准形式的拉格朗日方程。

我们可以利用 (3.1.5) 式, 则 (3.2.2) 式可以写成如下形式

$$\frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial q} - \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\gamma}{L(t, \dot{q}, q)} \times \left(\frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial t} + \dot{q} \frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial q} + \ddot{q} \frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial \dot{q}} \right) \frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad (3.2.4)$$

对于不含时的拉格朗日方程, (3.2.2) 式可以化简成如下形式

$$\frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial q} - \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\gamma}{L(\dot{q}, q)} \left(\dot{q} \frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial q} + \ddot{q} \frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial \dot{q}} \right) \frac{\partial L(t, \dot{q}, q)}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad (3.2.5)$$

例题 1:

我们定义一个如下形式的不含时的非标准拉格朗日函数

$$L(\dot{q}, q) = 1/(\dot{q} + q) \quad (3.2.6)$$

通过 (3.2.2) 我们可以得到

$$(2+\gamma)\ddot{q} + (3+\gamma)\dot{q} + q = 0 \quad (3.2.7)$$

则方程的解为

$$q(t) = d_1 e^{-t/(\gamma+2)} + d_2 e^{-t} \quad (3.2.8)$$

例题 2:

我们定义一个如下形式的含时拉格朗日函数

$$L(t, \dot{q}, q) = \dot{q}qt \quad (3.2.9)$$

然后, 我们可以得到特殊形式的运动方程

$$\gamma\ddot{q}qt + \gamma\dot{q}^2t + (\gamma+1)q\dot{q} = 0 \quad (3.2.10)$$

当 $\gamma=1$, 二阶线性微分方程为

$$\ddot{q}qt + \dot{q}^2t + 2q\dot{q} = 0 \quad (3.2.11)$$

则方程的解为

$$q(t) = \frac{d_6 \sqrt{d_7 t + 2}}{\sqrt{t}} \quad (3.2.12)$$

当 $\gamma=-1/2$, 二阶线性微分方程为

$$\ddot{q}qt + \dot{q}^2t - q\dot{q} = 0 \quad (3.2.13)$$

则方程的解为

$$q(t) = d_8 \sqrt{d_9 + t^2} \quad (3.2.14)$$

引理 3.2

哈密顿量 H 不是一个运动常数

证明: 如果我们将 (3.1.13) 对时间 t 进行微分, 可以得到

$$\begin{aligned}
 \frac{dH(q, \dot{q}, t)}{dt} &= \sum_{k=1}^N \left(\ddot{q}_k \frac{\partial L(t, \dot{q}_k, q_k)}{\partial \dot{q}_k} + \dot{q}_k \frac{d}{dt} \frac{\partial L(t, \dot{q}_k, q_k)}{\partial \dot{q}_k} - \frac{dL(t, \dot{q}_k, q_k)}{dt} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^N \left(\dot{q}_k \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L(t, \dot{q}_k, q_k)}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L(t, \dot{q}_k, q_k)}{\partial q_k} \right) - \frac{\partial L(t, \dot{q}_k, q_k)}{\partial t} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^N \left(\dot{q}_k \left(\frac{\gamma}{L(t, \dot{q}_k, q_k)} \left(\frac{\partial L(t, \dot{q}_k, q_k)}{\partial t} + \dot{q}_k \frac{\partial L(t, \dot{q}_k, q_k)}{\partial q_k} + \ddot{q}_k \frac{\partial L(t, \dot{q}_k, q_k)}{\partial \dot{q}_k} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \frac{\partial(t, \dot{q}_k, q_k)}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial(t, \dot{q}_k, q_k)}{\partial t} \right)
 \end{aligned}
 \tag{3.2.15}$$

从上式可以看出，如果拉格朗日函数不显含时间且 $\gamma = 0$ ，则哈密顿量 H 是一个运动常数^[6]。

第 4 章 非标准哈密顿方程

4.1 指数形式的非标准哈密顿方程

在本章中，我将会介绍指数形式的哈密顿函数的运动学方程，并且将指数形式的哈密顿方程命名为非标准哈密顿方程。本章中将会给出非标准哈密顿方程的具体计算方法以及它在不同约束条件下的一些形式，还有非标准哈密顿方程的一些性质以及举了几个例子来说明非标准哈密顿方程的应用。

定义 4.1: 定义一个 e^- 指数形式的作用泛函为

$$S = \int_a^b e^{[p\dot{q} - H(p, q, t)]} dt \quad (4.1.1)$$

这里 $(p, q, t) \rightarrow H(p, q, t)$ 假设为一个 C^2 函数

$$\begin{aligned} p, q &\in C^1([a, b]; R^n) \\ H(p, q, t) &\in C^2([a, b] * R^n * R^n; R) \end{aligned}$$

我们设作用泛函满足边界条件 $q(a) = q_a, q(b) = q_b$ 时，函数 $q \in C^1[a, b]$ 有一个极值，所以根据哈密顿原理

$$\delta S = \delta \int_a^b e^{[p\dot{q} - H(p, q, t)]} dt = 0 \quad (4.1.2)$$

我们可以得到非标准形式的哈密顿方程（简称 NSHE）

计算过程如下：

$$\delta \int_a^b e^{[p\dot{q} - H]} dt = 0$$

即

$$\int_a^b \delta e^{[p\dot{q} - H]} dt = 0$$

我们通过计算可以得到

$$\begin{aligned}\delta e^{[p\dot{q}-H]} &= e^{[p\dot{q}-H]} \delta[p\dot{q}-H] \\ &= e^{[p\dot{q}-H]} - e^{[p\dot{q}-H]} \frac{\partial H}{\partial q} \delta q + e^{[p\dot{q}-H]} \left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p\end{aligned}$$

利用边界条件

$$\frac{d}{dt} \left[e^{[p\dot{q}-H]} q \delta q \right] \Big|_a^b = 0$$

计算得到

$$\int \left\{ - \left[\left(\dot{p}\dot{q} + p\ddot{q} - \frac{dH}{dt} \right) p - \dot{p} - \frac{\partial H}{\partial q} \right] \delta q + \left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p \right\} dt = 0$$

如果 $q(t)$ 是上述方程的解, 则 $q(t)$ 满足下列非标准哈密顿方程

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} \left(1 + p \frac{\partial H}{\partial p} \right) = - \frac{\partial H}{\partial q} - p^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) + p \frac{dH}{dt} \end{cases} \quad (4.1.3)$$

利用 $H(p, q, t)$ 的全微分

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \dot{q} \quad (4.1.4)$$

方程 (4.1.3) 也可以表示为

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial q} - p^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) + p \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} + p \frac{\partial H}{\partial t} \end{cases} \quad (4.1.5)$$

方程 (4.1.5) 命名为指数形式的哈密顿函数的非标准哈密顿方程

所以, 取指数形式的哈密顿函数作用泛函的等时变分, 并考虑边界条件 $q(a) = q_a, q(b) = q_b$ 和极限的条件, 可以获得非标准哈密顿方程 (4.1.5)。

如果哈密顿函数 H 不显含时间, 也就是 $\partial H / \partial t = 0$, 那么方程 (4.1.5) 可以简化为

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} - p^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) + p \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p}\end{aligned}\tag{4.1.6}$$

而且, 如果我们定义

$$p \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) \equiv \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p}\tag{4.1.7}$$

然后通过计算, 我们可以得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(p \frac{\partial H}{\partial p} \right) &= \dot{p} \frac{\partial H}{\partial p} + p \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) \\ &= \dot{p} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} \\ &= \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \frac{\partial H}{\partial p}\end{aligned}$$

如果我们取 $p \frac{\partial H}{\partial p} = k$, 其中 k 是常数, 则可以将方程 (4.1.5) 简化为标准形式的哈密顿方程:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}\tag{4.1.8}$$

推论 4.1: 当 $H = H(p, q)$ 时, 哈密顿量 H 不是方程 (4.1.6) 的运动常数。

证明: 如果我们选取不显含时间的哈密顿函数 $H = H(p, q)$, 则得到

$$\begin{aligned}\frac{dH(p, q)}{dt} &= \frac{\partial H(p, q)}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial H(p, q)}{\partial q} \dot{q} \\ &= \frac{\partial H}{\partial p} \left[-\frac{\partial H}{\partial q} - p^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) + p \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} \right] + \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} \\ &= p \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)^2 \frac{\partial H}{\partial q} - p^2 \frac{\partial H}{\partial p} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) \\ &= p \frac{\partial H}{\partial p} \left[\frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - p \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) \right]\end{aligned}$$

因此, 对于非标准哈密顿方程来说, 不显含时间的哈密顿函数不是守恒量。

只有当表达式 (4.1.7) 成立时, 也就是 $p \frac{\partial H}{\partial p} = k$ 成立时, $dH(p, q)/dt = 0$, 哈

密顿函数 $H = H(p, q)$ 是守恒量。

推论 4.2: 当 $H = H(p, t)$ 时, 广义动量 p 不是运动常量。

证明: 因为非标准哈密顿函数是不显含 q 的, 所以方程 (4.1.5) 被简化为

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -p^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) + p \frac{\partial H}{\partial t} \end{cases} \quad (4.1.9)$$

通过计算, 得出表达式 $-p^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) + p \frac{\partial H}{\partial t}$ 不恒为零, 因此动量 p 不是运动的

常数。

我们考虑 (4.1.9) 的第二个公式

$$-p^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) + p \frac{\partial H}{\partial t} \quad (4.1.10)$$

只有当约束 $p \frac{\partial H}{\partial p} = k \neq 1$ 和哈密顿量与时间 t 无关时, 方程 (4.1.9) 才变成以下

方程

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = 0 \end{cases} \quad (4.1.11)$$

这里的动量 p 是一个守恒量。

为了显示非标准哈密顿方程一些有趣的性质, 我们将分别以显含时间和不显含时间的哈密顿量两个方面来给出非标准哈密顿方程理论的应。在以下的例子中, $C_i, i=1, 2, \dots$ 是积分常数

4.2 非标准哈密顿方程的应用

4.2.1 显含时间的哈密顿函数

例题一：

取如下形式的非标准哈密顿函数

$$H = pQ(t)q \quad (4.2.1)$$

将哈密顿方程 (4.2.1) 代入方程 (4.1.5)，我们可以获得以下形式的非标准哈密顿方程

$$\begin{aligned} \dot{q} &= Q(t)q \\ \dot{p} &= -pQ(t) \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

以 $H(p, q, t) = pqt$ 为例，运动方程可以通过方程 (4.2.2) 容易地得到。

$$\begin{aligned} \dot{q} &= qt \\ \dot{p} &= -pt \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

其中解析解由下式给出

$$\begin{aligned} q &= C_1 e^{(t^2/2)} \\ p &= C_2 e^{(-t^2/2)} \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

如果采用初始条件 $q(0)=1$, $p(0)=1$, 图 4-1 (a) 中我们显示出了方程 (4.2.3) 的解随时间的变化。在图 1 (b) 中显示出了在平面 $q-p$ 上的方程 (4.2.4) 的运动轨迹。

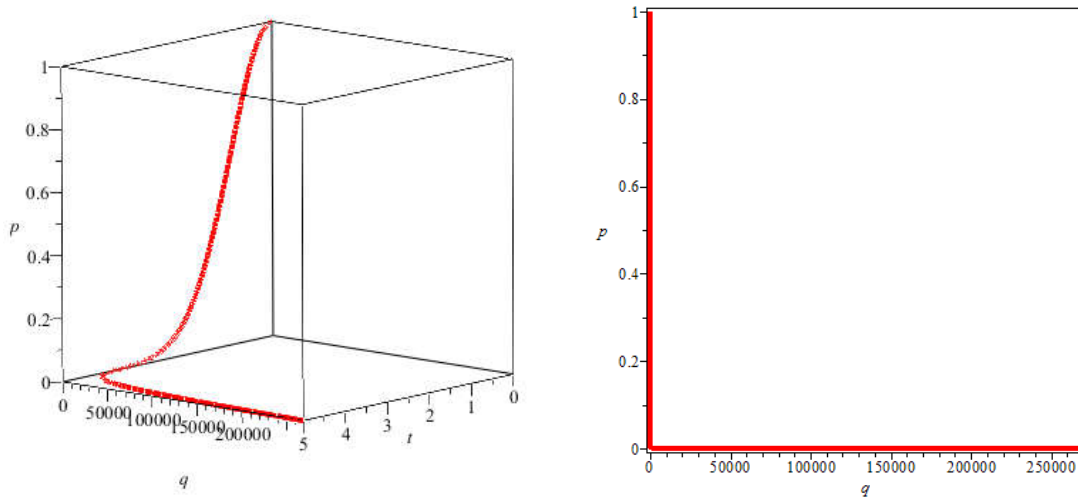


图 4-1(a) 方程 (4.2.3) 的解随时间的变化 (b) 方程 (4.2.4) 在平面 $q-p$ 上的轨迹

例题二：

如果取非标准哈密顿函数为 $H = t^{-1}(p-q)$ 其中 $t \neq 0$ ，我们可以通过等式 (4.1.5) 来得到非标准哈密顿方程

$$\begin{aligned}\dot{q} &= 1/t \\ \dot{p} &= 1/t - p/t^2 - pq/t^2\end{aligned}\quad (4.2.5)$$

我们可以得到解析解为

$$\begin{aligned}q &= \ln(t) + C_3 \\ p &= -\left(\int \frac{\exp \int (1+q)/t^2 dt}{t} dt + C_4\right) \exp\left(\int -(1+q)/t^2 dt\right)\end{aligned}\quad (4.2.6)$$

如果取 $q(1) = 0$, $p(1) = 1$ 作为初始值，在图 4-2(a) 中显示出了方程 (4.2.5) 解随时间的变化，而在图 2 (b) 中显示出了在平面 $q-p$ 上方程 (4.2.6) 的运动轨迹。

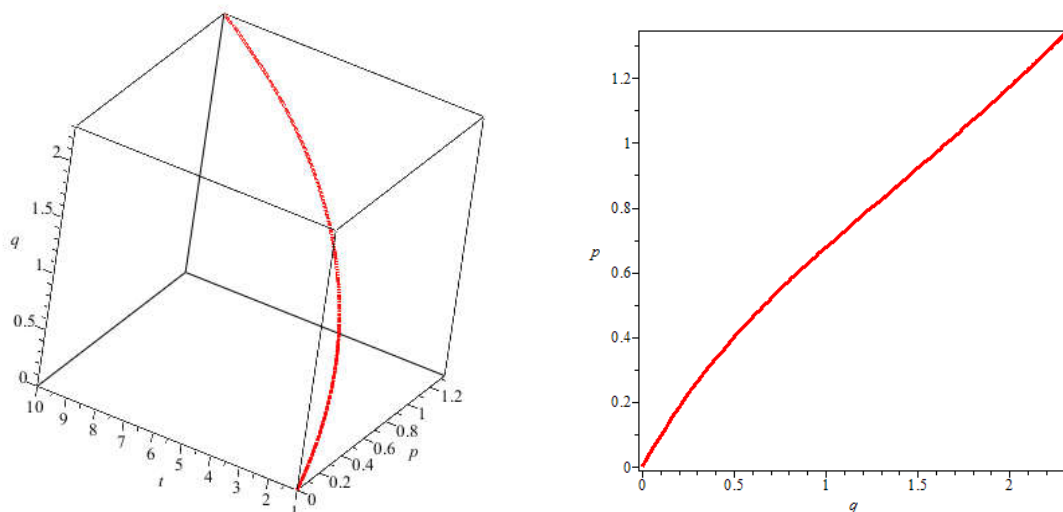


图 4-2 (a) 方程 (4.2.5) 的解随时间的变化 (b) 方程 (4.2.6) 在平面 $q-p$ 上的轨迹

例题三:

取非标准哈密顿函数为 $H(q, p, t) = p \sin t + q$ ，利用方程组 (4.1.5)，可以得到运动方程

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \sin t \\ \dot{p} &= -1 + p \sin t \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

它的解析解为

$$\begin{aligned} q(t) &= -\cos(t) + C_5 \\ p(t) &= -e^{-\cos(t)} \left(\int e^{\cos(t)} dt + C_6 \right) \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

如果取 $q(0) = -1$, $p(0) = 0$ 作为初始值, 在图 4-3(a) 中显示出了方程 (4.2.7) 的解随时间的变化, 而在图 3 (b) 中显示出了在平面 $q-p$ 上方程 (4.2.8) 的运动轨迹。

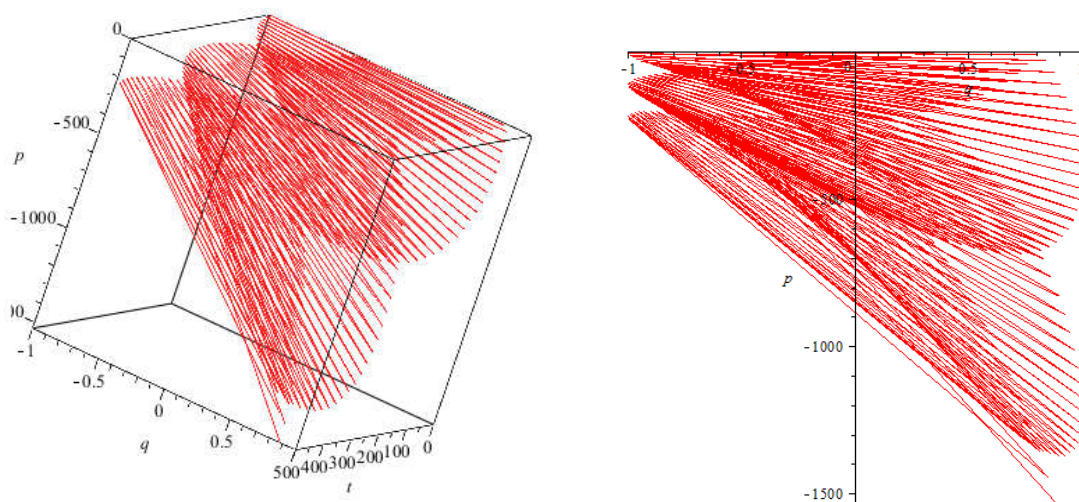


图 4-3 (a) 方程 (4.2.7) 的解随时间的变化 (b) 方程 (4.2.8) 在平面 $q-p$ 上的轨迹

4.2.2 不显含时间的哈密顿函数

例题四：

取非标准哈密顿函数 $H(p, q) = pq$ ，通过使用等式 (4.1.6)，可以得到非标准哈密顿方程组为

$$\begin{aligned}\dot{q} &= q \\ \dot{p} &= -p\end{aligned}\tag{4.2.9}$$

它的解析解是

$$\begin{aligned}q &= C_7 e^t \\ p &= C_8 e^{-t}\end{aligned}\tag{4.2.10}$$

如果取 $q(0)=1$ ， $p(0)=1$ 作为方程 (4.2.9) 的初始值，在图 4-4 (a) 中显示出了方程 (4.2.9) 的解随时间的变化，而在图 4-4 (b) 中显示出了在平面 $q-p$ 上方程 (4.2.10) 的运动轨迹。

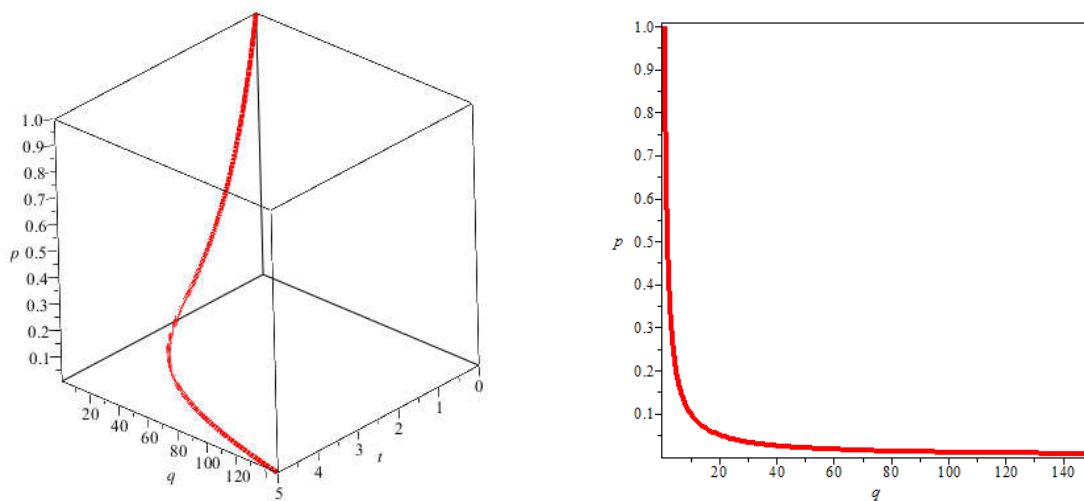


图 4-4 (a) 方程 (4.2.9) 的解随时间的变化 (b) 方程 (4.2.10) 在平面 $q-p$ 上的轨迹

下面我们来计算一下，哈密顿函数 $H(p, q) = pq$ 是否是守恒量。我们求哈密顿函数 $H(p, q) = pq$ 对时间的微分

$$\begin{aligned}\frac{dH(p, q)}{dt} &= \frac{\partial H(p, q)}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial H(p, q)}{\partial q} \dot{q} \\ &= q(-p) + pq \\ &= 0\end{aligned}$$

所以，当 $H(p, q) = pq$ 时，由上式可以看出， $\frac{dH(p, q)}{dt} = 0$ ，此时哈密顿函数 $H(p, q)$ 是守恒量。

例题五：

我们选择一个满足特殊条件 $p(\frac{\partial H}{\partial p}) = K$ 的哈密顿函数，并假设其不显含时间 t 。利用 $H(p, q) = K \ln p + \sqrt{q}$ 和方程 (4.1.8)，可以得到如下方程组

$$\begin{aligned}\dot{q} &= K / p \\ \dot{p} &= \frac{-1}{2\sqrt{q}}\end{aligned}\tag{4.2.11}$$

有方程 (4.2.11) 的解析解

$$\begin{aligned} q(t) &= 4K^2 \left(\text{Lambert}W\left(\frac{C_9 + C_{10}}{8K^2 e}\right) + 1 \right)^2 \\ p &= 2K/\dot{q} \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

其中 $\text{Lambert}W$ 表示 $\text{Lambert}W$ 函数^[27,28]。当取初始值 $q(0)=1$, $p(0)=1$ 并且 $K=2$ 时, 在图 4-5 (a) 中显示出了方程 (4.2.11) 的解随时间的变化, 而在图 4- (b) 中显示出了在平面 $q-p$ 上方程 (4.2.12) 的运动轨迹。

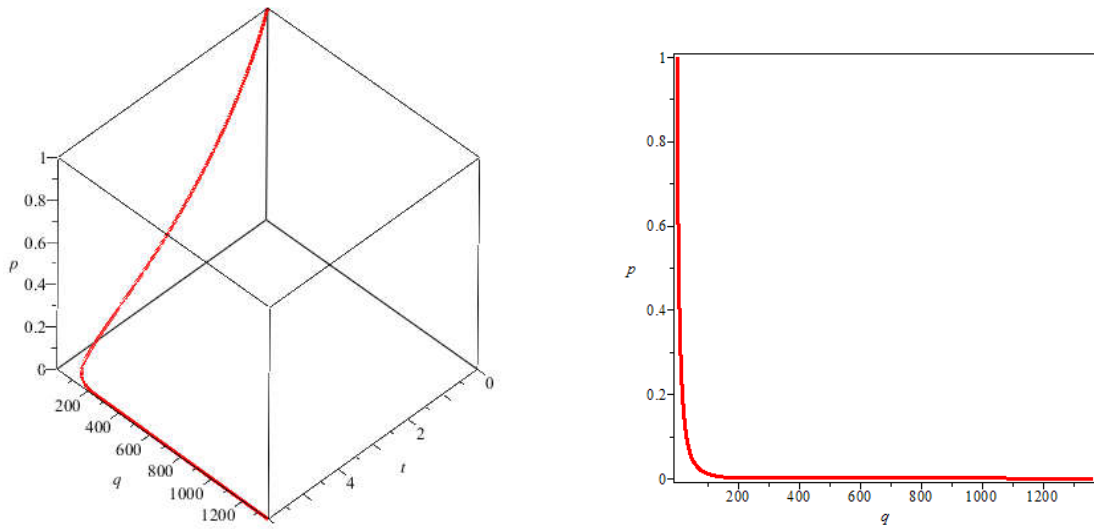


图 4-5 (a) 方程 (4.2.11) 的解随时间的变化 (b) 方程 (4.2.12) 在平面 $q-p$ 上的轨迹

下面我们来计算一下, 哈密顿函数 $H(p, q) = K \ln p + \sqrt{q}$ 是否是守恒量。我们来求哈密顿函数 $H(p, q)$ 对时间的微分

$$\begin{aligned} \frac{dH(p, q)}{dt} &= \frac{\partial H(p, q)}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial H(p, q)}{\partial q} \dot{q} \\ &= \frac{K}{p} \left(-\frac{1}{2\sqrt{q}} \right) + \left(\frac{1}{2\sqrt{q}} \right) \frac{K}{p} \\ &= 0 \end{aligned}$$

所以, 当 $H(p, q) = K \ln p + \sqrt{q}$ 时, 由上式可以看出 $\frac{dH(p, q)}{dt} = 0$, 此时的哈密顿函数是守恒量。

例题六:

选择满足条件 $p(\partial H/\partial p) = K$ 的不显含时间的哈密顿函数 $H(p, q) = K \ln qp$, 利用方程 (4.1.8) 可以得到如下方程组

$$\begin{aligned}\dot{q} &= K/p \\ \dot{p} &= -K/q\end{aligned}\quad (4.2.13)$$

方程 (4.2.13) 存在解析解

$$\begin{aligned}q &= -2K/\dot{p} \\ p(t) &= C_{11} \exp(C_{12}t)\end{aligned}\quad (4.2.14)$$

当 $K = 2$, 并且 $q(0) = 1$, $p(0) = 1$ 作为初始值时, 我们可以得到方程 (4.2.13) 的解随时间的变化曲线, 如图 4-6 (a) 所示, 图 4-6 (b) 给出了物体在 $q-p$ 平面上的轨迹的变化。

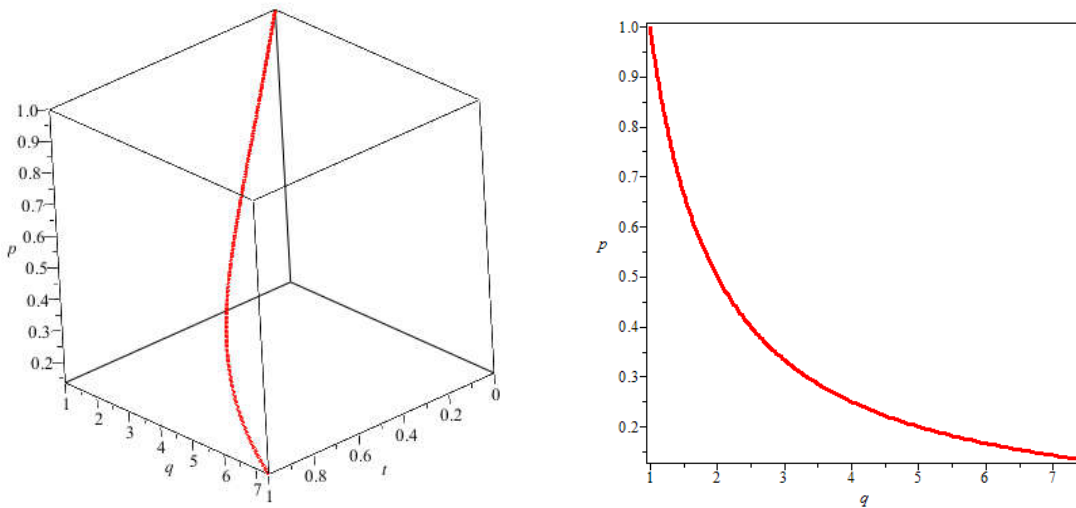


图 4-6 (a) 方程 (4.2.13) 的解随时间的变化 (b) 方程 (4.2.14) 在平面 $q-p$ 上的轨迹

我们来计算一下哈密顿函数 $H(p, q) = K \ln qp$ 是否是守恒量, 我们求哈密顿函数 $H(p, q)$ 对时间的微分

$$\begin{aligned}
\frac{dH(p,q)}{dt} &= \frac{\partial H(p,q)}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial H(p,q)}{\partial q} \dot{q} \\
&= \frac{K}{p} \left(-\frac{K}{q} \right) + \frac{K}{q} \frac{K}{p} \\
&= 0
\end{aligned}$$

所以，当哈密顿函数 $H(p,q) = K \ln qp$ 时，由上式可以看出， $\frac{dH(p,q)}{dt} = 0$ ，此时的哈密顿函数 $H(p,q)$ 是守恒量。

4.2.3 不显含 q 的哈密顿函数

例题七：

我们取非标准哈密顿函数 $H(p,t) = p \sin t + \sin t$ ，我们通过方程 (4.1.9) 得到非标准哈密顿方程

$$\begin{aligned}
\dot{q} &= \sin t \\
\dot{p} &= p \cos t
\end{aligned} \tag{4.2.15}$$

方程 (4.2.15) 有解析解如下

$$\begin{aligned}
q &= -\cos t + C_{13} \\
p &= C_{14} \exp(\sin t)
\end{aligned} \tag{4.2.16}$$

当 $q(0) = 0$ ， $p(0) = 1$ 作为初值的条件，我们可以得到方程 (4.2.15) 的解随着时间的变化，如图 4-7 (a) 所示，图 4-7 (b) 给出了解在 $q-p$ 平面上的运动轨迹。

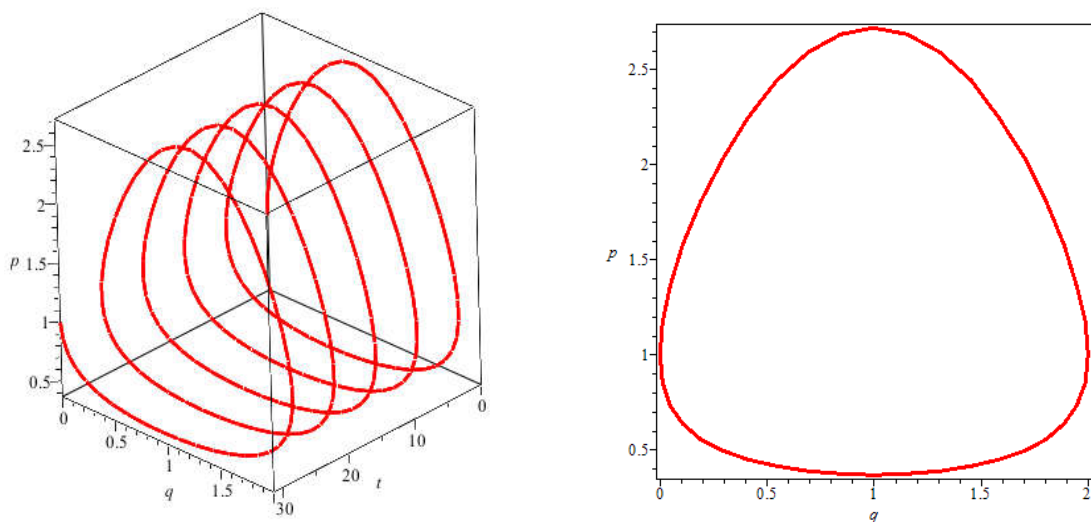


图 4-7 (a) 方程 (4.2.15) 的解随时间的变 (b) 方程 (4.2.16) 在平面 $q-p$ 上的轨迹

从表达式 (4.2.16) 可以看出, 虽然所选哈密顿函数 $H(p, t) = p \sin t + \sin t$ 不显含广义坐标 q , 但是在非标准哈密顿系统中, 广义动量 p 并不是守恒量。

例题八:

取非标准哈密顿函数 $H(p, q, t) = p \sin t$, 我们通过方程 (4.1.9) 得到非标准哈密顿方程组如下

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \sin t \\ \dot{p} &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

方程 (4.2.17) 存在解析解如下

$$\begin{aligned} q &= -\cos t + C_{15} \\ p &= C_{16} \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

显然, 解 q 按余弦规律变化, 并且 p 是一个守恒量。

例题九:

取非标准哈密顿函数为 $H(p) = K \ln p$, 通过方程 (4.1.11), 我们可以得到非标准哈密顿方程组如下

$$\begin{aligned} \dot{q} &= K / p \\ \dot{p} &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

方程 (4.2.19) 的解析解如下

$$\begin{aligned} q &= \frac{Kt}{C_{18}} + C_{17} \\ p &= C_{18} \end{aligned} \tag{4.2.20}$$

所以 q 的解与时间 t 成线性变化关系，并且 p 是守恒量。

第5章 结论与展望

5.1 论文的总结

在本文中，我们主要介绍了如下几方面的内容。首先，介绍了变分法与非标准动力学系统的发展与应用以及研究现状。其次，详细介绍了经典变分原理，以及如何利用变分原理来推导拉格朗日方程和哈密顿方程的具体过程。再次，介绍了非标准拉格朗日系统和拉格朗日方程理论的研究现状及其应用。最后，我们通过定义了指数的非标准哈密顿作用量，利用等时变分方法，成功的得到了一类特殊的动力学系统，称为非标准哈密顿系统，并获得了非标准哈密顿方程，该方程在本质上完全不同于标准哈密顿方程，但是，在某些特殊条件下，非标准哈密顿方程可以简化为标准哈密顿方程。非标准哈密顿方程系统具有很多重要的应用，特别是对于耗散动力学系统，非线性演化方程等复杂的非线性动力学问题中，该方程能够使问题简化，处理问题的过程相对简单。从例题中，我们可以看到，对于大多数情况下，系统的运动方程完全不同于利用标准哈密顿方程所得到的，但是在一些特殊情况下，非标准哈密顿方程和标准哈密顿方程所得到的结果是一致的。在标准哈密顿系统中，如果哈密顿函数不显含时间，则该系统的广义总能量守恒，但是在非标准哈密顿系统中，通过证明，我们得到哈密顿函数却不一定是守恒量，但有时是守恒量，如第四章中的例题 4，尤其是在满足条件 $p(\partial H / \partial p) = K$ 时，非标准哈密顿系统的哈密顿函数是守恒量，保持广义能量守恒，如第四章中的例题 5 和例题 6。对于标准哈密顿系统，当哈密顿函数不显含某个广义坐标时，则系统的该广义坐标对应的广义动量是守恒量，但对于非标准哈密顿系统，该广义坐标也不一定是守恒量，见推论 4.2 和第四章中的例题 7，而有时候是守恒量，如第四章中的例题 8，而当该系统满足条件 $p(\partial H / \partial p) = K$ 时，动力学系统的广义动量是守恒量。

综上所述，非标准哈密顿函数存在于某些复杂的动力学系统中，如物理，力学和工程中。采用非标准动力学系统研究一些特殊的复杂的非线性动力学系统问题时具有很好的性质，并且结果简单，易于操作。所以，非标准哈密顿系统是一类重要的动力学系统，值得深入研究。非标准哈密顿系统为我们提供了

一类新的动力学系统并可以应用与非线性动力学系统，耗散动力学系统，经典理论的量子化问题和宇宙学等问题中。

5.2 未来研究的展望

本文通过定义指数形式的哈密顿作用量，并利用变分法获得了非标准哈密顿方程，并对指数形式的非标准哈密顿系统和哈密顿方程的性质进行了系统研究，从数学的角度举了一些简单的例子，从而证明了非标准哈密顿系统和非标准哈密顿方程的合理性。在此基础上，接下来我们可以在如下几个方向继续开展研究工作：

- (1) 可以对本文所得到的非标准哈密顿方程进行更深入的研究，如非标准哈密顿方程的几何和代数性质等。
- (2) 可以对非标准哈密顿方程的应用进行深入的研究，探索非标准哈密顿方程的更多应用领域。
- (3) 可以研究其他形式的非标准哈密顿系统和哈密顿方程，如幂指数形式的非标准哈密顿方程及其应用的研究。
- (4) 可以利用 Lie 群和 Lie 代数方法研究非标准哈密顿方程的 Noether 对称性和 Lie 对称性等问题。
- (5) 可以从几何动力学的角度，运用现代微分几何方法，研究非标准哈密顿方程的对称约化问题，从而进一步简化非标准动力学系统的计算。

致谢

一转眼已经到了即将毕业的时候，在三年的研究生学习生活中，所获颇丰，从学业到个人素质，都得到了充分的培养和锻炼。回首三年的学习生活，是充实且有意义的，经历过遇阻时的沮丧、也有过成功时的喜悦，这些都汇集成为我人生里的宝贵财富。漫漫求学科研路，曲折不易才珍重。春晖养育无为报，师恩惠予永在心。

在这三年的研究生期间，我的导师刘世兴老师给了我很多帮助，本论文的完成离不开老师的付出。在这里，衷心的感谢我的导师刘世兴老师，刘老师对工作认真负责，对专业孜孜以求、勇于创新，百忙之余仍然读书不辍。三年来，我不仅学会了如何做学问，更是从刘老师的身上领略到真正的科研精神，他严谨治学的态度和认真科研的探索精神将使我受益终生。

衷心的感谢辽宁大学物理学院的各位领导及老师，在三年的学习生活中给予我的帮助；感谢实验室的小伙伴们和室友三年的陪伴，生活中的点滴早已汇成浓浓的情意；最后，还要感谢我的家人对我的关爱和包容。

在以后的工作和学习中，本人将继续保持严谨求实的态度、敬业勤恳的作风，铭记校训“明德精学、笃行致强”，努力做好本职工作。

关放
二〇一八年五月

参考文献

- [1] (德) 柯朗, (德) 希尔伯特. 数学物理方法[M]. 科学出版社, 2011
- [2] 章林海. 莫尔斯理论的若干问题[D]. 浙江大学, 2011
- [3] Arnold V I, Mathematical methods of classical mechanics[M]. Springer-Verlag, 1978.
- [4] Bagarello F. Nonstandard variational calculus with applications to classical mechanics. I. An existence criterion.[J]. International Journal of Theoretical Physics, 1999, 38(5):1569-1592.
- [5] Bartosiewicz Z, Martins N, Torres D F M. The Second Euler-Lagrange Equation of Variational Calculus on Time Scales[J]. European Journal of Control, 2011, 17(1):9-18.
- [6] Bateman, H. On dissipative systems and related variational principles[J]. Phys. Rev. 38, 815–819 (1931)
- [7] Berera, M.G., Ramos, R.O. Strong dissipative behavior in quantum field theory[J]. Phys. Rev. D 58, 123508–123553 (1998)
- [8] Burgess, M. Classical Covariant Fields[M]. Cambridge University Press, Cambridge (2002)
- [9] Arnold V. I., Mathematical methods of classical mechanics[M], New York: Springer, 1978
- [10] Musielak Z E. General conditions for the existence of non-standard Lagrangians for dissipative dynamical systems[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2009, 42(5):2645-2652: 1-8
- [11] Musielak Z E. Standard and non-standard Lagrangians for dissipative dynamical systems with variable coefficients[J]. Journal of Physics A Mathematical & Theoretical, 2008, 41(5):055205:1~17
- [12] El-Nabulsi A R. Non-Linear Dynamics with Non-Standard Lagrangians[J]. Qualitative Theory of Dynamical Systems, 2013, 12(2):273-291: 1-19
- [13] Saha A, Talukdar B. On the non-standard Lagrangian equations[J]. Physics, 2013: 1-8
- [14] Alekseev A. I., Vshivtsev A. S., Tatarintsev A. V., Classical non-Abelian solutions for nonstandard Lagrangians[J]. 1988, 77(2):1189---1197
- [15] El-Nabulsi R A. Non-standard Lagrangians in rotational dynamics and the modified Navier–Stokes equation[J]. Nonlinear Dynamics, 2014, 79(3):1-14.
- [16] TAPIA V., Second-Order Field Theory and Nonstandard Lagrangians[J], International School for Advanced Studies - 34014 Trieste, Italy
- [17] El-Nabulsi R A. Some consequences of nonstandard Lagrangians with time-dependent coefficients in general relativity[J]. Journal of Theoretical & Applied Physics, 2013, 7(1):60.
- [18] Zhou X.S., Zhang Y. Routh Method of Reduction for Dynamic Systems with Non-Standard Lagrangians[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2016.
- [19] Dyson F J. Feynman's proof of the Maxwell equations[J]. American Journal of Physics, 1990, 58(58):209-211.

- [20] Corichi A, Ryan M P, Jr. Quantization of Nonstandard Hamiltonian Systems[J]. Journal of Physics A General Physics, 2012, 30(30):3553.
- [21] Hojman S A, Shepley L C. No Lagrangian? No quantization![J]. Journal of Mathematical Physics, 1991, 32(1):142-146.
- [22] José, J.V., Saletan, E.J., Classical Dynamics: A Contemporary Approach[M], Cambridge: Cambridge University Press, 2002
- [23] Shapiro S.L., Teukolsky S.A., Lightman A P. Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects[M]. J. Wiley, 1983.
- [24] 周衍柏. 理论力学教程[M]. 高等教育出版社, 1986. 200~250
- [25] 梅凤翔, 刘桂林. 分析力学基础[M]. 西安交通大学出版社, 1987
- [26] 王振发. 分析力学[M]. 北京: 科学出版社, 2002
- [27] Chapeau-Blondeau F, Monir A. Numerical evaluation of the Lambert W function and application to generation of generalized Gaussian noise with exponent 1/2[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2002, 50(9):2160-2165.
- [28] Olver F.W., Lozier D.W., Boisvert R.F., et al. NIST Handbook of Mathematical Functions[M]. Cambridge University Press, 2010.
- [29] Liu S.X., Guan F, Wang Y, et al. The nonlinear dynamics based on the nonstandard Hamiltonians[J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 88(2):1-8.

攻读学位期间发表的学术论文及参加科研情况

一、发表论文、出版专著

Shixing Liu, Fang Guan, Yong Wang, Chang Liu, Yongxin Guo, The nonlinear dynamics based on the nonstandard Hamiltonians, Nonlinear Dyn, 2017, 88:1229 – 1236SCI

二、参与科研项目情况

1. 约束力学系统的保自伴随算法及应用，国家自然科学基金，2014
2. 非完整约束系统的Hamilton-Jacobi理论及其应用，国家自然科学基金，2015
3. Lagrange子流形理论在约束系统动力学中的应用，国家自然科学基金，2017
4. 辽宁省自然科学学术成果奖三等奖, 成果名称: The nonlinear dynamics based on the nonstandard Hamiltonians, 2017



硕士学位论文

THESIS FOR MASTER DEGREE