

分类号 O316

U D C 080101

学 号 201051005

湖南大学硕士学位论文

关于非完整动力学的几个 基本问题

研 究 生 姓 名 金 波

培 养 单 位 湖南大学

指导教师姓名、职称 赵跃宇 教授

学 科 专 业 一般力学与力学基础

研 究 方 向 分析力学

论 文 提 交 日 期 2003 年 4 月 30 日

摘要

全文共分五章。第一章对非完整动力学的有关现状进行了综合评述；第二章研究了非完整系统虚位移关系的不定性问题与非线性问题；第三章比较研究了一般非完整系统的 Chetaev 模型和 Vacco 模型；第四章研究了本质线性非完整系统的 Hamilton 原理；第五章给出了本文的结论与有关研究的展望。

本文首次提出了本质线性非完整约束和本质非线性非完整约束的概念，并将非完整系统区分为本质线性和本质非线性两种不同的情况。

本文研究了非完整动力学中使不定性问题确定化的交换关系和将非线性问题线性化的虚位移定义，首次证明并给出了在非完整系统中各种虚位移定义与交换关系的合理适用范围，指出完整动力学与本质线性非完整动力学在研究方法上具有相同性。

本文比较研究了一般非完整系统的 Chetaev 模型和 Vacco 模型，首次从力学和数学的角度论证了这两种模型在完整系统和本质线性非完整系统中的合理性和等价性；同时给出了在本质非线性非完整系统中，Chetaev 模型和 Vacco 模型不等价的根本原因，是由本质非线性非完整约束的不确定性非线性本质所导致的；指出在本质非线性非完整系统中，Chetaev 模型是一种线性近似的结果，Vacco 动力学方程虽然不满足约束力的理想性质，但是为我们研究本质非线性非完整约束的物理实现提供了有益的思考。同时我们必须寻求新的、合理的方法来研究本质非线性非完整动力学。

本文将 Hamilton 原理应用到本质线性非完整系统，首次证明了在本质线性非完整系统中，Hamilton 作用量为稳定的作用量；将完整系统和本质线性非完整系统的 Hamilton 原理从形式和本质上统一起来。

关键词 非完整动力学 Appell-Chetaev 定义 Vacco 动力学 Hamilton 原理

Abstract

This paper consists of five chapters. The first chapter presents a comprehensive study of nonholonomic dynamics. They are studied that the nonlinear problem and un-determinate problem of virtual displacement in nonholonomic system in the second chapter. In chapter 3, they are studied that Chetaev model and Vacco model in nonholonomic system. A unified form of Hamilton principle in intrinsical linear nonholonomic system is studied in chapter 4. Lastly, this paper presents the conclusion and the prospects of the nonholonomic dynamics.

The definitions of intrinsical linear nonholonomic constrain and intrinsical nonlinear nonholonomic constrain are put forward in this paper. The nonholonomic systems are divided into intrinsical linear nonholonomic system and intrinsical nonlinear nonholonomic system.

The rational spectrums of all kinds of virtual displacement definitions and commutativity of d, δ operations are given and testified in this paper. The research methods of intrinsical linear nonholonomic dynamics are similar to those of holonomic dynamics.

The rationality and equivalence of Chetaev model and Vacco model in the intrinsical linear nonholonomic system are testified from the mathematic and mechanical aspects. The essential reason is the nonlinear property of intrinsical nonlinear nonholonomic constrain that bring on Chetaev model and Vacco model inequivalent. Chetaev model is a linear approximate method in intrinsical nonlinear nonholonomic system. Vacco dynamical equations are not satisfied to the ideal constraint force conditions, but it gives a significative ponderation on the realizations of intrinsical nonlinear nonholonomic constrain. A new and rational method must be given to deal with intrinsical nonlinear nonholonomic dynamics.

Hamilton principle can be used in holonomic system and intrinsical linear nonholonomic system. The formulas of them are unified. Hamiltonian action is stability in intrinsical linear nonholonomic system.

Key Words: nonholonomic dynamics, Appell-Chetaev definition, Vacco dynamics, Hamilton principle

目录

摘要	I
Abstract	II

第一章 前言

1.1 几个重要的基本概念	1
1.1.1 约束、虚位移与自由度	2
1.1.2 非完整系统在位形空间中的可达性	4
1.2 与本文有关的研究现状综述	6
1.2.1 交换关系	6
1.2.2 Appell-Chetaev 定义与 Vacco 动力学方程	7
1.2.3 变分原理	8
1.3 本文主要研究内容	11

第二章 非完整系统中虚位移关系的不定性问题与非线性问题

2.1 不定性问题与非线性问题	12
2.1.1 不定性问题	12
2.1.2 非线性问题	14
2.2 线性化方法	14
2.2.1 线性化方法	14
2.2.2 线性化方法比较分析	15
2.3 不定性问题与交换关系	17
2.3.1 Suslov 交换	17
2.3.2 Holder 交换关系	18
2.4 线性化与确定化条件分析	19
2.4.1 实位移处于虚位移的充分必要条件	19
2.4.2 线性化与确定化条件分析	20
2.5 本章小结	23

第三章 Chetaev 模型与 Vacco 模型比较研究

3.1 力学与数学分析	24
3.1.1 Routh 方程	24

3.1.2 Routh 方程与 Vacco 动力学方程	25
3.1.3 约束力的力学性质分析	26
3.1.4 约束力的数学分析	28
3.2 算例分析	28
3.3 本章小结	31
第四章 Hamilton 原理的统一形式	
4.1 完整系统的基本变分原理	32
4.1.1 D'Alembert-Lagrange 原理	32
4.1.2 Jourdain 原理	33
4.1.3 完整系统的 Hamilton 原理	34
4.2 Hamilton 原理的统一形式	36
4.1.1 应用 Appell-Chetaev 定义时本质线性非完整系统 Hamilton 原理的驻值特性	36
4.1.2 一般本质线性非完整系统 Hamilton 原理的驻值特性	39
4.1.3 关于泛函 $\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0$ 和 $\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = 0$	41
4.3 本章小结	42
总结与展望	43
致谢	45
参考文献	46

第一章 前言

分析力学是一般力学的理论基础，以力学变分原理为依据，用数学分析的方法，研究力学系统的运动特性，其基本内容是 Lagrange 力学和 Hamilton 力学及其近代的发展。自从 Hertz^[47]在 1894 年明确提出非完整约束的概念以来，近 100 余年里，经典非完整动力学逐渐成为分析力学的一个重要分支，越来越多的专家和学者从事非完整动力学研究。关于非完整动力学理论的应用也有很多，例如当冰刀运动时，它与冰面接触点的速度方向仅能在冰刀平面与冰面的交线上，这就是著名的 Chaplygin-Caratheodory 问题^{[14][16]}。这种对系统点的运动速度的限制就是一个简单的非完整约束条件，在求积仪中使用的边缘锋利的刀轮就是这个模型的应用。凡是带有滚动轮子的系统几乎都是非完整约束系统，因此，非完整动力学理论被应用于研究火车车厢和飞机起落架的运动。利用电学与力学的相似性，分析力学的方法也可以应用到电机一般理论的研究中，从而有完整机和非完整机。也有人把非完整动力学理论应用于水力机与飞机的研究。非完整动力学理论也应用于变质量系统、伺服约束系统以及可控力学系统的研究。近二十年来，在研究一般链式系统（如人体模型、操纵器、链系—电缆和天线的有限节模型等）时，也要用到非完整动力学理论。近年来，关于非完整动力学理论的应用主要在于非完整规划、机器人以及控制等领域。可见，非完整动力学理论研究有着重要的理论价值和实际意义。随着科学技术的发展，非完整动力学理论的应用价值将会日益增长。

1.1 几个重要的基本概念

因为非完整约束具有不可积分的微分约束，通常的第二类 Lagrange 方程已经不能应用。在十九世纪末和二十世纪初的二十年间，曾出现过研究非完整动力学的高潮。那时，得到了一阶线性非完整约束系统各种形式的运动微分方程^[16]。但是，因为研究非完整动力学比完整动力学要复杂得多、困难得多，使得许多问题的发展、研究与讨论一直延续到今天，还有不少理论问题和实际问题有待解决。

Whittaker^[95]全面总结了二十世纪初期以前的分析力学成就。文献[28]指出，非完整动力学的研究存在十一个基本问题尚待解决；例如关于非完整动力学虚位移的 Appell-Chetaev 定义的合理性问题，关于非完整系统微分运算 d 和变分运算

δ 的交换性问题, 关于 Hamilton 原理能否应用于非完整系统以及如何应用于非完整系统的问题, 关于将完整力学一整套积分理论推广到非完整动力学的问题等, 这些问题都有过争论, 都需要进一步研究和发展。其实, 产生所有这些问题的根源都可以归结为对约束、虚位移以及非完整约束的物理实现等一些基本概念和理论的认识。

1. 1. 1 约束、虚位移与自由度

在分析力学中约束是建立它全部理论的重要基础, 对约束的各种情况和各种形式, 建立它的数学力学理论、并研究它与系统动力学的关系尤为重要。因而, 只有正确认识各种情况和各种形式的约束, 才能建立完备的理论。

力学系统中约束的一般定义为^{[1][16][45][46]}: 在力学系统质点的位置和速度上事先加上一些几何或运动学特性的限制, 称为约束。当系统运动时, 不论作用于其上的力以及运动的初始条件如何, 这些限制都必须得到满足。加在力学系统质点上的约束在某种程度上限制了系统的可能运动。由于约束的限制, 对各种工程技术领域来说, 具有指导作用和特殊用途。例如, 可控力学系统本身就是带有制约给定运动状态的确定约束系统, 而用相应的控制装置来实现这种约束便是技术上的问题。文献[1]对约束的研究相当出色, 全面给出了约束的各种形式。

一般的约束条件都可以用约束方程或约束不等式来表示。这就要根据已给条件, 利用几何学和运动学的知识来写出具体的数学表达式。

应用基本变分原理推导出力学系统的运动微分方程时, 约束本身的性质存在着极大的影响, 不仅系统运动的形式、而且研究运动所选取的方法都依赖于约束的性质, 研究各种类型的约束很有必要。按照约束的各种特征可将约束分类, 如分为单面约束和双面约束、完整约束与非完整约束、定常约束和非定常约束(也称为稳定约束和不稳定约束)、理想约束与非理想约束等等。

约束的概念可以推广到多种形式, 如把运动微分方程的第一积分当作非完整约束、把可控系统当作非完整约束系统、高阶非完整约束以及把加在动力学特性改变上的限制条件当作约束来处理等等。每一种不同约束系统的研究方法都有着本质上的区别^[16]。比如具有定常约束的系统与具有非定常约束的系统在运动性质和研究方法上就有着本质的差异, 研究非定常约束系统比研究定常约束系统要复杂得多。

虚位移如同约束一样, 是分析力学中的一个重要基本概念, 在完整动力学和

非完整动力学中都广泛地应用虚位移的概念。我们把在某一固定时刻, 在一定位置上约束所允许的假想无限小位移称为虚位移^[1]。

设力学系统由 N 个质点组成, 并受有 d 个完整约束, 那么我们可以选 $n = 3N - d$ 个广义坐标 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 来确定系统的位形。质点的矢径为

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (1.1)$$

当系统的广义坐标发生无限小位移 $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ (即广义坐标的变分, 或称为广义虚位移) 时, 质点的虚位移为

$$\begin{aligned} \delta \vec{r}_i &= \vec{r}_i(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \dots, q_n + \delta q_n, t) - \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ &= \sum_{s=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} \delta q_s \quad (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (1.2)$$

在计算 (1.2) 式时, 时间 t 不变, 并忽略了 δq_s 的高阶无穷小量。

如果系统是完整的, 那么所有的 $\delta q_s (s = 1, 2, \dots, n)$ 彼此独立。这是因为对于完整系统来说, 在选取 n 个广义坐标 q_s 之后, 完整约束将自动得到满足。因此, 对于完整系统来说, 独立坐标的数目就等于广义坐标的独立变分的数目。

如果系统受有如下形式的一阶线性非完整约束

$$\sum_{s=1}^n a_{\varepsilon+\beta, s} \dot{q}_s + a_{\varepsilon+\beta, n+1} = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, g; \varepsilon = n - g) \quad (1.3)$$

其中 $a_{\varepsilon+\beta, s}$ 、 $a_{\varepsilon+\beta, n+1}$ 为广义坐标 q_s 和时间 t 的函数, 上式也可写成

$$\sum_{s=1}^n a_{\varepsilon+\beta, s} dq_s + a_{\varepsilon+\beta, n} dt = 0 \quad (1.4)$$

对于定常非完整约束系统, 由于时间 t 固定不变, 变分 δq_s 满足关系

$$\sum_{s=1}^n a_{\varepsilon+\beta, s} \delta q_s = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, g) \quad (1.5)$$

因为在坐标变分之间有 g 个关系 (1.5) 式, 所以 $\delta q_s (s = 1, 2, \dots, n)$ 已不全是独立的, 只有 $\varepsilon = n - g$ 个是独立的。因此, 对于非完整约束系统来说, 独立坐标的数目是 n , 而独立变分数目为独立坐标数目减去非完整约束方程的数目, 即 $\varepsilon = n - g$ 。这种独立坐标数目与独立变分数目不同的事实, 在 Lagrange 时代还不知道, 直到 1894 年, 德国学者 Hertz 才首次发现了它^[47], 并因此将约束与力学系统分成完整和非完整两大类。

我们把广义坐标独立变分数目称为系统的自由度。因此完整系统的自由度数目就是独立坐标数目; 而非完整系统的自由度数目则等于独立坐标数目减去非完整约束方程的数目。可见非完整系统的独立坐标数目总大于其自由度。

由约束方程 (1.3) 式变换到关系 (1.5) 式, 可以看出, 为了得到约束加在虚位移上的条件, 而将约束方程写成微分形式, 用 δ 代替 d , 并令 $\delta t = 0$, 这就是使用 Holder 方法^[48]的结果。

但是, 人们在将虚位移的概念应用到非完整系统和向速度空间、加速度空间以及更高阶空间推广时, 却遇到了广义虚位移之间非线性问题以及广义坐标变分与广义速度变分之间的不定性问题^{[15][16]}。为了解决不定性和非线性问题, 人们引进了线性化方法定义虚位移和各种交换关系确定广义坐标变分与广义速度变分之间的不定性关系^{[1][15][16][18][48][91][93]}。但并没有人给出这些方法合理的适用范围, 而是把这些方法笼统地应用到非完整动力学的研究中, 这样会产生数学与力学上的矛盾与不合理性。

1. 1. 2 非完整系统在位形空间中的可达性

如果约束是用不可积的微分方程表示的, 我们就称为非完整约束。非完整约束的一般形式为

$$f_{\beta}(q_s, \dot{q}_s, t) = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, g; s = 1, 2, \dots, n) \quad (1.6)$$

方程 (1.6) 式的不可积性在于它的左边不能成为仅是坐标函数的全微分。

非完整约束又有线性与非线性之分, 在所有关于非完整动力学理论的文献中都是这样来区分线性与非线性非完整约束的, 即如果在约束方程 (1.6) 式中, 函数 f_{β} 相对于 $\dot{q}_s$ 是线性的, 则称为线性非完整约束, 否则, 称为非线性非完整约束。而根据一般的微分方程知识, 我们可以判断, 有可能函数 f_{β} 相对于 $\dot{q}_s$ 是线性的, 但是如果 $\dot{q}_s$ 前面的系数为广义坐标和时间的函数, 那么这样的非完整约束方程能够称为线性的吗? 本文将把非完整约束区分为本质线性与本质非线性两种情况来研究。

Greenwood^[46]指出当系统有形如 (1.6) 式的不可积微分约束时, 在任意时刻 t , 系统可在空间取任意位置; 但是, 在这位置下系统质点的速度便不是任意的了。非完整约束是对这些速度的限制, 这就是完整约束和非完整约束之间的一个重要的差别, 这个差别的出现是相对可达性而言的; 同时又指出, 一般说来, 非完整约束所产生的运动学效果是限制在位形空间内任意给定点处许可的运动方向 (这个运动方向应该是速度), 但并不减少位形空间的维数, 也不限制系统可以获得各种各样的位形; 进一步指出, 这一结论是微分形式不可积性的直接结果, 因为如果能找到如下形式的函数

$$\Phi(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = C \quad (1.7)$$

的话, 由于它代表(包含在 q_s 空间内的)一个超曲面, 位形点将被限制在这个超曲面上运动, 从而也就限制了位形点的可达区域。实际上, 一般的非完整约束并非单独只对系统的速度空间进行限制, 而是给定系统位形空间与速度空间之间的一种数学逻辑。

在本文定义的本质线性非完整系统中, 虽然约束方程不可积分, 但是可以发现, 在这类约束方程中给出的是速度空间和位形空间确定的单值对应关系, 在给出了初始条件以后, 系统其后的运动状况是确定的。因此在本质线性非完整系统中位形空间的可达性不成立。

但是在本文定义的本质非线性非完整系统中, 约束方程也不可积分, 而且约束方程中给出的是速度空间和位形空间不确定的非线性对应关系。这种不确定的非线性对应关系是否会导致多值对应性, 从而使得本质非线性非完整系统的位形空间与速度空间具有多值对应性呢? 是这种多值对应性使得位形空间具有可达性呢, 还是微分形式不可积性使得位形空间具有可达性呢? 这是研究本质非线性非完整动力学的一个重要问题, 也是本质非线性非完整约束不确定的非线性本质问题。但是很少有人注意到本质非线性非完整约束本身不确定的非线性本质问题, 大多采取将所有的非完整约束线性化和确定化来研究, 并不考虑在不定性非完整系统中应用这些方法所产生的数学与力学上的矛盾。

在简单的非线性二次迭代系统中都会产生相当复杂的动力学行为^{[5][54]}, 对本质非线性非完整约束的线性化、确定化处理, 除了产生数学与力学上的矛盾外, 得到的结果会不会远离系统的真实运动状态呢? 这也是一个让人深思的问题。也是研究本质非线性非完整动力学一个重要的、需要重新认识的方面。

本质线性非完整动力学和本质非线性非完整动力学的研究方法应该有着本质上的差异, 这个差异如同线性系统和非线性系统研究方法上的差异一样。Bahar^[33]在研究经典 Appell-Hamel 问题时, 已经认识到传统非线性非完整约束定义下的 Appell-Hamel 非完整约束的本质是线性的。

很多人注意到了传统非线性非完整约束的非线性方面, 但是并没有脱离传统的线性与非线性非完整约束的定义^{[16][49][50]}。有学者注意到了非完整系统的非线性行为, 但是, 并没有认识到本质线性与本质非线性非完整约束之间的重要差别以及本质非线性非完整约束的非线性本质问题, 而是按照传统的方法研究得到的运动方程本身的非线性行为^[96]。实际上需要正视的应该是本质非线性非完整约束本身的非线性性质。

1. 2 与本文有关的研究现状综述

非完整动力学的研究内容非常丰富,包括传统非线性非完整约束的物理实现问题^{[7][27][56][79][80]}、本质非线性非完整约束本身非线性性质的研究、弱非完整动力学的研究^[7]、单面非完整约束动力学研究^[7]、非完整系统的运动稳定性^[7]、非完整系统的随机响应^[7]、非完整动力学的几何理论^{[7][27][30][31][32]}、Hamilton 原理在非完整动力学中的应用^{[14][36][43][47][48][62]}、非完整系统的对称性与不变量^{[23][27][64]}以及非完整动力学的数值计算^{[7][27][63][92]}等很多方面,最近,在我国数学力学家梅凤翔的倡导下展开了形式不变性的研究^[65]。但是,非完整动力学的一些基本问题的研究还是具有相当意义的。下面将与本文有关的研究进行一些综述。

1. 2. 1 交换关系

微分运算 d 和变分运算 δ 交换性是研究非完整动力学的一个重要的基本问题,关于 d 、 δ 运算可交换性的看法有很多。

以 Holder^[48]为代表的学派认为 $d-\delta$ 交换性总成立,不论系统完整与否;而以 Suslov^[91]为代表的学派认为 $d-\delta$ 交换性仅对完整系统才成立;对非完整系统 $d-\delta$ 交关系不成立,这种观点得到广泛的支持^[15]。1975 年 Vujanovic^[93]在研究完整非保守系统的变分原理时提出了一种新型交换关系,他认为对完整非保守系统 $d\delta \neq \delta d$,而其差与动力学函数和广义力有关。郭仲衡和高普云^[3]在推导一类非完整系统的运动方程时从数学的角度论证了 $d-\delta$ 的可交换性,但是并没有克服力学上产生的矛盾。梁立孚与梁忠宏^[9]认为 Suslov 观点实际上是一种误解;Holder 的基本结论虽然正确,但也存在一些缺陷;而且微分运算 d 和变分运算 δ 是可以交换的,这一基本原理也适用于非完整系统;但是,这种交换性应用于非完整系统时并没有克服数学上的矛盾。关于 $d-\delta$ 的可交换性问题,主要体现在 Hamilton 原理在非完整系统中的应用。梅凤翔^[14]对此做了总结,研究这一问题的重要性在于利用交换关系可以导出系统的运动微分方程,而且更在于交换关系与 Hamilton 原理能否应用于非完整系统和如何应用于非完整系统有关,还与 Hamilton-Jacobi 积分方法能否推广到非完整系统密切相关。

实际上交换关系在非完整系统中的应用是有条件和范围的,并不是所有的非完整约束动力学系统都可以应用,因为交换关系定义的始终是一种确定性的线性

关系,也是限制非完整系统位形空间可达性的方法。对非完整系统产生的不定性问题应该寻求别的方法来解决。

1. 2. 2 Appell-Chetaev 定义与 Vacco 动力学方程

Appell-Chetaev 定义在非完整动力学的研究中一直扮演着重要的角色,但是在绝大多数非完整系统中应用 Appell-Chetaev 定义会产生数学上的矛盾,众多的学者也都认识到了这一点。由于没有找到更合理的方式来解决非完整系统中的不定性与非线性问题, Appell-Chetaev 定义在非完整动力学的研究中仍然处于一种不可动摇的地位。

对此,梅凤翔^[14]做了如下概括“虽然没有人明确提出 Appell-Chetaev 定义的适用性问题,但是人们在研究非线性非完整动力学时,总是事先小心地表明研究 Chetaev 型非线性非完整约束”。也有学者研究“非 Chetaev 型非完整系统”,其做法是用别的函数代替 Chetaev 条件中的约束函数的偏导数,即用新的条件代替 Chetaev 条件^[3]。

1982-1983 年,前苏联学者 Kozlov^[57]在莫斯科大学学报数学和力学卷上连载论文“不可积约束系统的动力学”中提出了研究不可积分约束系统动力学的一种新的数学模型,称为 Vacco 模型。用 Kozlov 的话说,该论文是在推广最小作用量原理的基础上,研究了带有不可积约束系统的分析动力学新的数学模型;他认为不可积约束应分为两类:一类是传统的非完整约束,另一类是 Vacco 约束。

Vacco 模型的出现对 Appell-Chetaev 定义产生了巨大的冲击,很多人开始怀疑 Appell-Chetaev 定义的合理性与正确性。郭仲衡和高普云^[3]给出的理论与结果同 Vacco 动力学相近,但是产生了很多争议^{[2][3][4]}。郭仲衡^{[3][4]}起初认为 Chetaev 模型不合理,而倾向 Vacco 模型,后来认为这两个模型都不甚合理,认为非完整力学的 Appell-Chetaev 解要求一种既非外力也非约束力的“非完整力”,并且通过约束分析的方法,给出他认为合理的模型^[5]。梁立孚^{[8][10][61][62]}做了大量工作,力图把 Vacco 模型和 Chetaev 模型在整个非完整约束动力学系统中统一起来,但是得到的结果仍然无法避免数学与力学上的矛盾。Rosen^[81]提出并构造了一个新的扩张性 Lagrange 函数,研究了受约束的动力学系统。许志新^[21]应用文献[81]构造的扩张性 Lagrange 函数给出了扩张性拉氏函数模型,认为 Chetaev 模型、Vacco 模型与扩张性拉氏函数模型是等价的模型。许多学者也认为 Chetaev 模型与 Vacco 模型是针对非完整系统建立的两种不同的力学模型。也有人认为由于非

线性非完整约束的物理实现不甚清楚, 采用 Chetaev 模型是可以的, 采用 Vacco 模型也是允许的^[7]。也有人对这两种模型做过专门研究, 并且把由 Appell-Chetaev 定义得到的动力学方程称为真实轨道方程, 把 Vacco 动力学方程称为测地轨道方程^{[85][86]}。Arnold, Kozlov 和 Neishtadt^[32]中却把 Vacco 动力学与 Newton 力学、Lagrange 力学和 Hamilton 力学作为并列的概念提出。Zampieri^[97]对 Vacco 动力学方程提出了质疑, 认为 Vacco 模型是不合理的。Kupka 和 Oliva^[58]提出了两种力学概念, 一种是 D'Alembert 力学, 与 D'Alembert 原理是等价的; 另一种是 Vacco 力学, 认为 Vacco 力学与 Hamilton 原理等价。Lewis 和 Murray^[60]通过研究约束系统的变分原理, 分别得到经典非完整运动方程与 Vacco 动力学方程, 提出了附加约束的概念, 并将两种结果与实验结果进行比较, 认为 Vacco 动力学方程与惯性项有关, 而经典非完整运动方程与速度项有关。罗绍凯^[13]研究了 Vacco 动力学方程的积分方法, 得到了非线性非完整约束系统的 Vacco 动力学方程的解。张解放^[22]研究了 Vacco 动力学方程的 Noether 对称性与不变量, 得到了系统的广义能量积分和新的不变量; 而刘端^[12]研究了非完整非保守动力学系统的 Noether 对称性与不变量, 也得到了系统的广义能量积分和新的不变量, 但是它采用了 Appell-Chetaev 定义; 但是文献[22]得到的新的不变量比文献[12]得到的新的不变量要多出一个不定乘子; 在应用两种不同模型, 研究 Appell-Hamel 问题时, Vacco 模型也多出一个一阶导数的不定乘子, 实际上, 这个不定乘子在 Appell-Hamel 问题中是可以解得的, 并且为零。

文献[7]指出, 关于这两种模型存在四种观点: (1) Chetaev 模型是合理的; (2) Vacco 模型是合理的; (3) 非线性非完整系统允许有不同的模型, 两种模型都是合理的; (4) 两种模型都不甚合理; 这个问题涉及到非完整动力学的根基。实际上, 在 Appell-Chetaev 定义和 Vacco 动力学方程之间产生的这么多争论和研究, 并没有真正涉及到问题的根本之处。大多的学者都试图把这两种模型在整个非完整动力学中统一起来, 并没有考虑到本质非线性非完整约束本身的不确定非线性性质对系统动力学行为的影响。同时, 这些争论也是围绕 Hamilton 原理能否应用于非完整系统产生的。但是, Chetaev 模型和 Vacco 模型还是有它们合理与统一的基础。

1. 2. 3 变分原理

变分原理是数学物理的重要组成部分, 它为深刻地揭示自然界的基本规律和

统一地描述各种形式的场提供了强有力的工具, 也为工程上近似求解各类问题提供了有效的计算方法。变分原理的重要性使得人们对此领域的研究非常关心, 并且很多科学家在此领域内不断探索, 取得了辉煌的成就。如 D'Alembert-Lagrange 原理和 Hamilton 原理^{[14][46]}。现代物理中的 Noether 定理^[69]、现代数学中的辛几何^[51]、现代力学中的 KAM 定理^{[31][32][63]}都与 Hamilton 原理有着密切的联系。

变分原理也是建立整个分析力学的基础。在一般力学中把变分原理分为微分变分原理和积分变分原理。经典的微分变分原理包括 D'Alembert-Lagrange 原理、Jourdan 原理和 Gauss 原理, 后来人们又把 D'Alembert-Lagrange 原理推广到 m 次导数空间, 称为万有 D'Alembert-Lagrange 原理^[16]。经典的积分变分原理有 Hamilton 原理、Lagrange 原理。微分变分原理的适用范围较为广泛, 而积分变分原理一般只适用于完整、理想、保守的力学系统, 这无疑是一个非常大的缺陷。

为了解决这个缺陷, 很多学者围绕把积分变分原理推广到非完整系统和非保守系统做了很多努力。1894 年, Hertz^[47]在引入非完整约束的概念时就认为 Hamilton 原理不适用于非完整系统, 它不满足带有不定乘子的 Lagrange 方程。因此, Holder^[48]、Suslov^[91]和 Voronets 致力于建立新的变分原理。Capon^[36]支持 Hertz 的观点, 他认为 Holder 的理论是不对的。Jeffreys^[52]和 Pars^{[77][78]}反对 Capon 的论断。Pars^{[77][78]}支持 Holder 的观点, 并且通过分析一个典型实例, 得到如下结论: 当考虑非完整系统时, Hamilton 原理被推广为两种不同的形式: 他认为, 对非完整系统

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt = 0 \quad (1.8)$$

形式的 Hamilton 原理是不对的, 而

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L(q, \dot{q}, t) dt = 0 \quad (1.9)$$

是正确的。这一结论肯定了 Hamilton 原理能够应用于非完整系统, 是对非完整动力学的重大贡献, 得到了 Rumyantsev^{[82][83][84][85][86]}等许多知名学者的支持。他们认为, 在有势力作用下, 对于非完整系统, Hamilton 原理没有象完整系统那样使 Lagrange 函数取驻值的形式, 而有 Lagrange 函数变分对时间积分为零的形式。Kerner 认为方程 (1.8) 式形式的 Hamilton 原理仅对完整系统才是正确的。Неимарк 和 Фухаев 认为 Hamilton 原理取何种形式取决于对 $d-\delta$ 交换关系持何种观点^[16]。Румянцев 对这一问题进行了系统研究, 他指出 Suslov 形式的 Hamilton 原理和 Voronets 形式的 Hamilton 原理均可变换为 Holder 形式的

Hamilton 原理^[16], Румянцев 进一步指出, 仅仅对满足条件

$$\sum_{s=1}^n \sum_{\beta=1}^g K_{\beta} \left(\frac{\partial f_{\beta}}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_{\beta}}{\partial \dot{q}_s} \right) = 0 \quad (1.10)$$

或者

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}} T_{\sigma}^{\varepsilon+\beta} = 0 \quad (1.12)$$

的非完整系统的运动, Hamilton 原理才具有方程 (1.9) 的形式, 才是稳定作用量原理^[16]。他还强调指出, 对非完整系统, 条件 (1.10) 和条件 (1.12) 仅在个别的情况下才满足。1966 年, Новоселов 指出, 交换关系的 Holder 形式和 Suslov 形式都可以应用于非完整系统 Hamilton 原理的研究^[14]。但是这两种交换关系都使用了 Appell-Chetaev 定义。Santilli^{[88][89]} 等对自伴随系统的变分泛函的构造做了很多的研究工作, 但是所得结果并不令人满意。Leipholz^[59] 研究了非保守跟随力作用的弹性系统, 但其方法的关键——“广义自伴随算子”的形式却无一般的方法可寻。我国学者赵跃宇在 m 次导数空间中建立了一类新型积分变分原理^{[24][25]}, 将积分变分原理提高到一个重要的高度, 并将它推广到非保守系统、非完整系统、变质量系统、连续介质力学 (包括弹性力学、塑性力学以及理性力学)、机电系统的电磁场理论以及热传导理论等多方面。Liang 和 Wei^[62] 分别应用和不应用 Appell-Chetaev 条件研究 Hamilton 原理在非完整系统中的应用, 认为在两种条件下的非完整系统中 Hamilton 原理都是稳定作用量原理; 实际上, 他给出的只是 Hamilton 作用量取极值的必要条件, 并非充分条件。Rumyantsev^[82] 研究了非完整系统的 Hamilton 原理的形式, 认为由 Holder、Voronets 得到的关于线性非完整系统的 Hamilton 原理与由 Suslov 得到的非线性非完整系统的 Hamilton 原理, 这三种形式的 Hamilton 原理是等价的, 并且可以相互转换; 但是最终并没有脱离 Appell-Chetaev 定义。Papastavridis^[75] 在 Appell-Chetaev 定义的基础上, 研究了非线性非完整系统的非等时变分原理。Djukic^[40] 研究了经典 Hamilton 系统的极值变分原理。朱如曾^[26] 提出了非完整力学的第二类变分原理, 在 Appell-Chetaev 定义下统一了非完整力学的第二类、第一类和中间类型的变分原理。

文献[16]对产生这些问题和争论做了总结“这种争论的实质是与 d 、 δ 运算可交换性的看法有关的”。实际上产生这些争论的根本原因不仅是微分运算 d 和变分运算 δ 的交换性问题, 而且还与非完整约束动力学系统本身存在本质非线性非完整约束的非线性性质有关。

1. 3 本文研究内容

第一章研究了非完整动力学中约束、虚位移和自由度的概念；将非完整约束区分为本质线性非完整约束和本质非线性非完整约束，指出了研究本质线性非完整动力学与本质非线性非完整动力学的重要差别；综述了本文的研究背景以及研究现状。

第二章研究了非完整动力学中几种虚位移的定义和交换关系，证明并给出了它们合理的适用范围；定义了本质线性非完整约束和本质非线性非完整约束的概念，证明了在完整系统和本质线性非完整系统中，各种定性化交换关系与线性化虚位移定义的等价性。

第三章比较研究了 Chetaev 模型与 Vacco 模型；从力学和数学的角度论证了两种模型在完整动力学和本质线性非完整动力学中的等价的合理性与等价性；给出了 Chetaev 模型与 Vacco 模型在本质非线性非完整动力学中不等价的根本原因，是由于本质非线性非完整约束本身的不确定的非线性性质所致；指出在本质非线性非完整动力学中 Vacco 动力学方程是不合理的，Appell-Chetaev 定义是一种线性近似解，所以会产生数学上的矛盾，但是并不改变约束力的性质。对于本质非线性非完整动力学有待寻求更加合理的方法来研究。

第四章研究本质线性非完整系统的 Hamilton 原理，证明了本质线性非完整系统中 Hamilton 作用量为稳定的作用量，将完整动力学与本质线性非完整动力学中的 Hamilton 原理从形式和本质上统一起来。

最后总结了本文得到的主要结果，并给出未来的研究方向。

第二章 非完整系统中虚位移关系的不定性问题

与非线性问题

我们把在某一固定时刻,在一定位置上约束所允许的假想的无限小位移称为虚位移^{[1][16]}。虚位移如同约束一样,是分析力学里面一个重要的基本概念。在完整动力学和非完整动力学中都广泛地应用虚位移的概念。但是在将虚位移概念向非完整系统、速度空间、加速度空间以及更高阶空间的推广过程中却遇到了虚位移之间的不定性和非线性问题。如何解决这两个问题,许多学者想到了各种各样的方法^{[16][18][48][57]},但是这些方法具有一个相同点,就是将不定性和非线性问题通过引入交换关系和定义虚位移使它们确定化、线性化。但是并没有给出它们合理的适用范围,导致了在研究非完整动力学时产生了诸多矛盾^{[2][3][4]}。本章将对非完整系统中虚位移的不定性与非线性问题的可确定化、可线性化条件进行研究。

2.1 不定性与非线性问题

非完整系统相对于完整系统最根本的区别就是在非完整系统中,存在广义坐标变分 δq_s 和广义速度变分 $\delta \dot{q}_s$ 之间不定性关系以及广义坐标变分 δq_s 之间的非线性关系,如何合理地处理这两种关系一直困扰着非完整动力学的研究。

2.1.1 不定性问题

设力学系统由 N 个质点组成,并受有 d 个完整约束,那么我们可以选 $n=3N-d$ 个广义坐标 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 来确定系统的位形。质点的矢径为

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (2.1)$$

当系统的广义坐标发生无限小位移 $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ (即广义坐标的变分,或称为广义虚位移)时,质点的虚位移为

$$\begin{aligned} \delta \vec{r}_i &= \vec{r}_i(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \dots, q_n + \delta q_n, t + \delta t) - \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ &= \sum_{s=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} \delta q_s \quad (i=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (2.2)$$

在计算 (2.2) 式时, 时间 t 不变, 即 $\delta t = 0$, 并忽略了 δq_s 的高阶无穷小量。

如果系统是完整的, 那么所有的广义坐标变分 $\delta q_s (s=1,2,\dots,n)$ 彼此独立, 或者说完全任意的。这是因为对于完整系统来说, 在选取 n 个独立广义坐标 q_s 之后, 完整约束将自动得到满足。因此, 对于完整系统来说, 独立坐标的数目就等于广义坐标的独立变分的数目, 它们之间不存在不定性和非线性问题。

但是如果系统受有如下形式的非完整约束

$$f_\beta(q_s, \dot{q}_s, t) = 0 \quad (\beta=1,2,\dots,g; s=1,2,\dots,n) \quad (2.3)$$

那么, 约束加在虚位移上的条件应如何确定呢?

如果我们取广义坐标和广义速度的无穷小变更 $q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \dots, q_n + \delta q_n$; $\dot{q}_1 + \delta \dot{q}_1, \dot{q}_2 + \delta \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n + \delta \dot{q}_n$ 以及时间 t 的无穷小变更 $t + \delta t$, 可以得到约束 (2.3) 式的变更

$$\delta f_\beta = f_\beta(q_s + \delta q_s, \dot{q}_s + \delta \dot{q}_s, t + \delta t) - f_\beta(q_s, \dot{q}_s, t) \quad (2.4)$$

将上式展开成 Taylor 级数, 并略去二阶以上高次项, 得

$$\delta f_\beta = \sum_{s=1}^n \frac{\partial f_\beta}{\partial q_s} \delta q_s + \sum_{s=1}^n \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s + \frac{\partial f_\beta}{\partial t} \delta t = 0 \quad (2.5)$$

对于全部变分采用 Holder 交换关系^[48]

$$\delta \dot{q}_s = \frac{d}{dt} \delta q_s \quad (s=1,2,\dots,n) \quad (2.6)$$

则 (2.5) 式可以写成

$$\begin{aligned} \delta f_\beta &= \sum_{s=1}^n \frac{\partial f_\beta}{\partial q_s} \delta q_s + \sum_{s=1}^n \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \frac{d}{dt} (\delta q_s) + \frac{\partial f_\beta}{\partial t} \delta t \\ &= \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \right) \delta q_s + \sum_{s=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s \right) + \frac{\partial f_\beta}{\partial t} \delta t \end{aligned} \quad (2.7)$$

对于形如 (2.3) 式的非完整系统, 我们都有

$$\delta f_\beta = \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \right) \delta q_s + \sum_{s=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s \right) + \frac{\partial f_\beta}{\partial t} \delta t = 0 \quad (2.8)$$

同时, 我们可以将 (2.3) 式对时间 t 求一阶微商, 得

$$\sum_{s=1}^n \frac{\partial f_\beta}{\partial q_s} dq_s + \sum_{s=1}^n \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} d\dot{q}_s + \frac{\partial f_\beta}{\partial t} dt = 0 \quad (2.9)$$

(2.9) 式则是非完整系统各个质点产生的实位移所应该满足的条件。可以看到只要应用交换关系 (2.6) 式, (2.9) 式就可以变成 (2.8) 式的形式。对于一阶定常非完整约束系统 (2.8) 式将变成如下形式

$$\delta f_\beta = \sum_{s=1}^n \frac{\partial f_\beta}{\partial q_s} \delta q_s + \sum_{s=1}^n \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s = 0 \quad (2.10)$$

将 (2.10) 式展开成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_g}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_g}{\partial q_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \vdots \\ \delta q_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_g}{\partial \dot{q}_1} & \cdots & \frac{\partial f_g}{\partial \dot{q}_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \delta \dot{q}_n \end{bmatrix} = 0 \quad (2.11)$$

从 (2.11) 式可以看到, 由于 $g < n$, 因而 δq_s 与 $\delta \dot{q}_s$ 之间存在不定性关系。这种不确定关系是导致虚位移定义多样性的一个原因。

2. 1. 2 非线性问题^[16]

如果系统受有形如 (2.3) 式的一阶非线性非完整约束, 那么, 约束加在虚位移上的条件应如何确定呢? 容易看出, 利用前面的 Holder 交换关系 (2.6) 式, 将给出广义坐标变分 δq_s 之间的非线性关系。例如, 当质点受有速度大小为常数的非线性非完整约束

$$\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 = C^2 = \text{const} \quad (2.12)$$

或写成微分形式

$$(dq_1)^2 + (dq_2)^2 + (dq_3)^2 = C^2 (dt)^2 \quad (2.13)$$

按 Holder 方法则有

$$(\delta q_1)^2 + (\delta q_2)^2 + (\delta q_3)^2 = 0 \quad (2.14)$$

关系 (2.14) 式显然是相对于广义坐标变分 $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3$ 的非线性关系。这种非线性关系限制了与虚位移密切联系的变分原理的应用。

2. 2 线性化方法

2. 2. 1 线性化方法

从前面的分析可以看到, 在非完整系统中, 广义坐标变分 δq_s 之间的非线性关系限制了力学系统的基本变分原理的应用, 但是为了应用与虚位移密切联系的变分原理 (例如 D'Alembert-Lagrange 原理^[16]) 来推导非完整系统的运动方程, 众多的学者采取了将约束加在虚位移上的条件实行线性化的方法。关于线性化的

方法有如下几种：

其一就是 Appell-Chetaev 方法^{[15][16]}。如果系统受有形如 (2.3) 式的一阶非完整约束，则 Appell-Chetaev 定义广义坐标变分 δq_s 满足如下关系

$$\sum_{s=1}^n \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, g) \quad (2.15)$$

其二就是 Valcovici 方法^[16]。罗马尼亚学者 Valcovici 认为，首先，约束方程应取无限小形式

$$\sum_{s=1}^n L_{\beta s} dq_s + L_{\beta, n+1} dt = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, g) \quad (2.16)$$

其中系数 $L_{\beta s}, L_{\beta, n+1}$ 可为坐标、速度和时间的函数。而后按 Holder 方法，由 (2.16) 式可得

$$\sum_{s=1}^n L_{\beta s} \delta q_s = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, g) \quad (2.17)$$

这就实行了对广义坐标 δq_s 的线性化。

在 1964 年，我国学者牛青萍引入坐标空间、速度空间和加速度空间三个基本空间的概念，给出了各个空间所对应的约束和虚位移的定义^[18]。受有形如 (2.3) 式的非完整约束，牛青萍在速度空间给出的虚位移定义为

$$\sum_{s=1}^n \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, g) \quad (2.18)$$

这三种线性化方法存在深刻的数学意义和线性化本质，都有它们的适用范围。但是至今没有人研究过它们的合理适用范围，而是不加考虑地应用到所有的非完整系统中，这样必将导致诸多的矛盾。

2. 2. 2 线性化方法的比较分析

Appell-Chetaev 定义 (2.15) 式自然把传统线性非完整约束当作特殊情况。

从 (2.8) 式可以看到，为了使 δf_β 用 δq_s 线性表出，而令 $\sum_{s=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \right) \delta q_s = 0$ ，将微分

符号提到求和号外面即得到 Appell-Chetaev 定义。但是，在得到 Appell-Chetaev 定义时，约束必须满足条件

$$\sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \right) \delta q_s = 0 \quad (2.19)$$

Appell-Chetaev 定义是一种数学演绎的需要与结果。

形如 (2.3) 式的一阶非完整约束实质上是对系统中质点的速度的限制^[15], 因而牛青萍速度空间的虚位移定义只考虑了广义速度 $\dot{q}_s$ 的变分, 而时间 t 和坐标 q_s 固定不变。时间 t 固定不变就是要求的系统为定常系统, 即 $\delta t = 0$, q_s 固定不变, 实际上就是要求 $\delta q_s = 0$ 。这个要求等价于下面的 (2.20) 式, 即

$$\sum_{s=1}^n \frac{\partial f_{\beta}}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s = 0 \quad (2.20)$$

把这些条件应用到 (2.5) 式, 就可以得到牛青萍速度空间的虚位移定义。

可以看到这样定义的虚位移不仅完全固定了系统质点的位形空间, 同时限制了质点在固定位形空间中的速度, 使得任何形式的约束都必须满足系统位形空间和速度空间的一一对应关系, 完全不同于非完整系统关于位形空间可达性的要求。

因此, 牛青萍速度空间的虚位移定义只适用于从数学上满足条件 (2.20) 式的非完整系统。

比较牛青萍速度空间的虚位移定义和 Appell-Chetaev 定义可以看到, 它们具有相同的主部 $\sum_{s=1}^n \frac{\partial f_{\beta}}{\partial \dot{q}_s}$ 。而且应用 Appell-Chetaev 定义时包含的限制条件和牛青萍速度空间的虚位移定义却是相同的。如果在非完整系统中应用牛青萍速度空间的虚位移定义, 可选择这样的 Lagrange 不定乘子, 使得不相互独立的速度变分 $\delta \dot{q}_{\epsilon+\beta}$ 前面的系数自动为零; 那么应用 Appell-Chetaev 定义, 可以引入同样的 Lagrange 不定乘子, 使得不独立广义坐标变分 $\delta q_{\epsilon+\beta}$ 前面的系数自动为零。应用这两种不同的定义在不同的空间中可以得到相同的结果^{[16][18]}, 而且可以看到在完整系统中建立的 Nielsen 方程就是对这个问题很好的说明^[16]。这是因为 D'Alembert-Lagrange 原理在位形空间和速度空间具有相同的形式, 即位形空间的 D'Alembert-Lagrange 原理与速度空间的 Jourdan 原理具有相同的形式。那么可以将牛青萍速度空间的虚位移定义中的 $\delta \dot{q}_s$ 用 δq_s 来代替, 得到 Appell-Chetaev 定义。

因此, Appell-Chetaev 定义和牛青萍速度空间的虚位移定义是等价的, 它们的适用范围也是相同的, 即只有在约束方程能够满足 (2.19) 式的非完整系统中, 才能使用这两种定义。而且对于同一个系统在同一空间, 不能同时把这两个定义都用到。但是对于一般的非完整约束并不满足条件 (2.19) 式。在这样的系统中使用这两个定义都会产生矛盾。本章的最后将会研究这个问题。

对于如何将有限形式 (2.3) 式化为无限小形式 (2.17) 式, 仍然存在所谓“不定性”。例如, 对于约束方程的有限形式 (2.12) 式, 无限小形式可以写成

$$\dot{q}_1 dq_1 + \dot{q}_2 dq_2 + \dot{q}_3 dq_3 - C^2 dt = 0 \quad (2.21.1)$$

或者

$$\dot{q}_1 dq_1 + (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 - C^2) dt = 0 \quad (2.21.2)$$

或者

$$\dot{q}_3 dq_3 + (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - C^2) dt = 0 \quad (2.21.3)$$

等等, 按 Holder 交换关系 (2.6) 式, 则有约束加在虚位移上的条件为

$$\dot{q}_1 \delta q_1 + \dot{q}_2 \delta q_2 + \dot{q}_3 \delta q_3 = 0 \quad (2.22.1)$$

$$\dot{q}_1 \delta q_1 = 0 \quad (2.22.2)$$

$$\dot{q}_3 \delta q_3 = 0 \quad (2.22.3)$$

等等。这说明虚位移应满足的关系不能唯一确定, 这种不定性不为众多的学者接受。因而 Valcovici 线性化方法也不被广泛采用。

2. 3 不定性问题与交换关系

(2.11) 式给出广义坐标变分 δq_s 与广义速度变分之间 $\delta \dot{q}_s$ 的不定性是导致虚位移关系多样性的一个重要原因。前面定义的虚位移的应用是有条件的, 而且定义了虚位移只解决了非线性问题, 还必须通过交换关系来解决不定性问题。人们在定义虚位移的基础上引入了广义坐标变分 δq_s 与广义速度变分之间 $\delta \dot{q}_s$ 的交换关系。这两种主要的交换关系分别是 Suslov 交换关系和 Holder 交换关系。

2. 3. 1 Suslov 交换关系

对独立的变分取交换关系

$$\delta \dot{q}_\sigma = \frac{d}{dt}(\delta q_\sigma) \quad (\sigma = 1, 2, \dots, \varepsilon; \varepsilon = n - g) \quad (2.23.1)$$

以及条件

$$\delta f_\beta = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, g) \quad (2.23.2)$$

由 (2.23.1) 式和 (2.23.2) 式的 n 个条件可以确定变分 $\delta \dot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 。

假设由约束 (2.3) 式相对于不独立的速度可以解得

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta} = \dot{q}_{\varepsilon+\beta}(q_s, \dot{q}_\sigma, t) \quad (2.24)$$

于是 $\delta \mathcal{F}_\beta = 0$ 成为

$$\begin{aligned} \delta \dot{q}_{\varepsilon+\beta} &= \sum_{s=1}^n \frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_s} \delta q_s + \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma} \delta \dot{q}_\sigma \\ &= \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_\sigma} \delta q_\sigma + \sum_{\gamma=1}^g \frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\gamma}} \delta \dot{q}_{\varepsilon+\gamma} + \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma} \delta \dot{q}_\sigma \end{aligned} \quad (2.25)$$

应用 Appell-Chetaev 条件 (2.15) 式, 即有

$$\delta q_{\varepsilon+\beta} = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma} \delta q_\sigma \quad (2.26)$$

将 (2.26) 式代入 (2.25) 式, 得

$$\delta \dot{q}_{\varepsilon+\beta} = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \left(\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_\sigma} + \sum_{\gamma=1}^g \frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\gamma}} \frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\gamma}}{\partial q_\sigma} \right) \delta q_\sigma + \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma} \delta \dot{q}_\sigma \quad (2.27)$$

将 (2.26) 式两边对时间 t 求导数, 得

$$\frac{d}{dt}(\delta q_{\varepsilon+\beta}) = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma} \delta q_\sigma + \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma} \frac{d}{dt}(\delta q_\sigma) \quad (2.28)$$

将 (2.27) 式和 (2.28) 式相减, 得

$$\delta \dot{q}_{\varepsilon+\beta} - \frac{d}{dt}(\delta q_{\varepsilon+\beta}) = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma} \left[\delta \dot{q}_\sigma - \frac{d}{dt}(\delta q_\sigma) \right] - \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} T_\sigma^{\varepsilon+\beta} \delta q_\sigma \quad (2.29)$$

其中

$$T_\sigma^{\varepsilon+\beta} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_\sigma} - \sum_{\gamma=1}^g \frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\gamma}} \frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\gamma}}{\partial \dot{q}_\sigma} \quad (2.30)$$

利用 (2.23.1) 式中的交换关系, 可将 (2.29) 式写成

$$\delta \dot{q}_{\varepsilon+\beta} = \frac{d}{dt}(\delta q_{\varepsilon+\beta}) - \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} T_\sigma^{\varepsilon+\beta} \delta q_\sigma \quad (\beta = 1, 2, \dots, g; \varepsilon = n - g) \quad (2.31)$$

上式就是 Suslov 交换关系。

2. 3. 2 Holder 交换关系

对全部变分采用交换关系

$$\delta \dot{q}_s = \frac{d}{dt} \delta q_s \quad (s = 1, 2, \dots, n) \quad (2.32)$$

由此可以确定 δf_β ，计算 δf_β

$$\delta f_\beta = \sum_{s=1}^n \frac{\partial f_\beta}{\partial q_s} \delta q_s + \sum_{s=1}^n \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s \quad (2.33)$$

注意到 (2.32) 式，(2.33) 式可写成

$$\begin{aligned} \delta f_\beta &= \sum_{s=1}^n \frac{\partial f_\beta}{\partial q_s} \delta q_s + \sum_{s=1}^n \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \frac{d}{dt} (\delta q_s) \\ &= \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \right) \delta q_s + \sum_{s=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s \right) \end{aligned} \quad (2.34)$$

应用 Appell-Chetaev 条件 (2.15) 式，则有

$$\sum_{s=1}^n \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, g) \quad (2.35)$$

于是 (2.34) 式成为

$$\delta f_\beta = \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \right) \delta q_s \quad (2.36)$$

对于完整约束， $\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} = 0$ ，由 (2.36) 式得知，此时有 $\delta f_\beta = 0$ 。对于一般的非

完整约束来说， $\delta f_\beta \neq 0$ ，这也是应用 Appell-Chetaev 条件得到的数学上矛盾的结果。

2. 4 线性化与确定化条件分析

从前面的分析可以看到，Suslov 交换关系和 Holder 交换关系都用到了 Appell-Chetaev 条件，也就是要求非完整约束满足条件 (2.19) 式。但是什么样的非完整约束才满足条件 (2.19) 式呢？下面我们将对这个问题进行分析。

2. 4. 1 实位移处于虚位移的充分必要条件

实位移处于虚位移的充分必要条件是研究上述问题的一个重要方面。文献 [14] 给出了一般的非完整系统实位移处于虚位移的充分必要条件，并且对充分性和必要性进行了证明。该定理为：对于一般的非完整约束

$$f_\beta(q_s, \dot{q}_s, t) = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, g; n = 1, 2, \dots, n) \quad (2.37)$$

实位移处于虚位移的充分必要条件是约束方程对广义速度的齐次性。

必要性证明, 对于一般的非完整约束 (2.37) 式, 如果实位移处于虚位移之中, 则 dq_s 满足如下关系

$$\sum_{s=1}^n \frac{\partial f_{\beta}}{\partial \dot{q}_s} dq_s = 0 \quad (2.38)$$

因此

$$\sum_{s=1}^n \frac{\partial f_{\beta}}{\partial \dot{q}_s} \dot{q}_s = 0 \quad (2.39)$$

这意味着 f_{β} 对 $\dot{q}_s$ 是齐次的。

充分性证明, 设 f_{β} 对 $\dot{q}_s$ 为 k_{β} 齐次的, 即

$$\sum_{s=1}^n \frac{\partial f_{\beta}}{\partial \dot{q}_s} \dot{q}_s = k_{\beta} f_{\beta} \quad (2.40)$$

注意到 (2.37) 式, 则有 (2.39) 式成立, 由 (2.39) 式可得 (2.38) 式。比较 (2.38) 式和 (2.39) 式, 得知实位移处于无数虚位移之中。该定理可以得到如下推论:

对于完整系统, 实位移处于虚位移中的充要条件是约束方程中不显含时间 t 。这个推论与我们研究定常完整系统的要求是一致的。那么我们将研究满足实位移处于虚位移充分和必要条件的非完整系统。

2. 4. 2 线性化与确定化条件分析

比较前面研究非完整系统时定义的几种虚位移定义以及两种交换关系, 可以发现, 它们在非完整系统中的应用都是有条件的, 这个共同的条件就是非完整约束方程满足如下关系

$$\delta f_{\beta} = \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial f_{\beta}}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_{\beta}}{\partial \dot{q}_s} \right) \delta q_s = 0 \quad (2.41)$$

或

$$\delta f_{\beta} = \sum_{s=1}^n \frac{\partial f_{\beta}}{\partial q_s} \delta q_s + \sum_{s=1}^n \frac{\partial f_{\beta}}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s = 0 \quad (2.42)$$

即可。但是什么样的非完整约束才满足这样的条件呢? 至今没有一个人给出。这里我们先引入本质线性非完整约束和本质非线性非完整约束的定义。

定义 1 如果一阶非完整约束同时满足条件 (2.41) 式和 (2.15) 式, 或者同时满足条件 (2.42) 式和 (2.18) 式, 那么称为本质线性非完整约束。否则称

为本质非线性非完整约束。这个概念可以推广到 k 次空间。

对于如下形式的一阶 m 次齐次定常非完整约束

$$f_\beta(q_s, (\dot{q}_s)^m) = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, g; s = 1, 2, \dots, n) \quad (2.43)$$

总可以写成下面的形式

$$f_\beta = \sum_{s=1}^n [a_{s\beta} \cdot (\dot{q}_s)^m] = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, g; s = 1, 2, \dots, n) \quad (2.44)$$

其中, $a_{s\beta} = a_{s\beta}(q_1, q_2, \dots, q_s)$ 。

将 (2.44) 式代入 (2.41) 式可得

$$\sum_{s=1}^n \frac{\partial f_\beta}{\partial q_s} \delta q_s = \sum_{s=1}^n \left[\frac{\partial a_{s\beta}}{\partial q_s} (\dot{q}_s)^m \delta q_s \right] \quad (2.45.1)$$

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^n \frac{d}{dt} \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s &= \sum_{s=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} [m \cdot a_{s\beta} \cdot (\dot{q}_s)^{m-1}] \right\} \cdot \delta q_s \\ &= \sum_{s=1}^n \left\{ \left[m \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{j\beta}}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \cdot (\dot{q}_s)^{m-1} + m \cdot (m-1) \cdot a_{s\beta} \cdot (\dot{q}_s)^{m-2} \cdot \ddot{q}_s \right] \cdot \delta q_s \right\} \end{aligned} \quad (2.45.2)$$

若 $m=0$, 就是完整约束, 有 (2.45.2) 式为零, (2.45.1) 式变为

$$\sum_{s=1}^n \left[\frac{\partial a_{s\beta}}{\partial q_s} \delta q_s \right] = 0 \quad (2.46)$$

(2.46) 式就是完整动力学中的虚位移定义, 在完整系统中, 满足条件 (2.41) 式和 (2.15) 式。

若 $m=1$, 就是传统线性非完整系统, 比较 (2.45.1) 式和 (2.45.2) 式, 在一般的情况下, 可以看到从两式并不相等, 也就是不满足条件 (2.41) 式和 (2.15) 式。

若 $m \geq 2$, 就是传统非线性非完整系统, 比较 (2.45.1) 式和 (2.45.2) 式, 在一般的情况下, 可以看到从两式并不相等, 也就是不满足条件 (2.41) 式和 (2.15) 式。

但是, 当 $m=1$ 时, 且系数 $a_{s\beta}$ 为常数, 则有 (2.45.1) 式和 (2.45.2) 式相等, 满足条件 (2.41) 式和 (2.15) 式。同时, 如果约束每一个广义速度前的系数能够被表示为与广义速度相对应的齐次函数, 即

$$a_{1\beta} = a_{1\beta}((q_1)^m), \quad a_{2\beta} = a_{2\beta}((q_2)^m) \dots, \quad a_{n\beta} = a_{n\beta}((q_n)^m)$$

也有 (2.45.1) 式和 (2.45.2) 式相等。

但是, 当 $m \geq 2$ 时, 如果约束方程 (2.43) 式中广义速度 $\dot{q}_s$ 前面的系数 $a_{s,\beta}$ 为常数时, 则有

$$\sum_{s=1}^n \frac{\partial f_{\beta}}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s = 0 \quad (2.47)$$

要满足条件 (2.42) 式, 则有牛清萍速度空间的虚位移定义成立, 即

$$\sum_{s=1}^n \frac{\partial f_{\beta}}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s = 0 \quad (2.48)$$

可以看到, 在得到 (2.47) 式、(2.48) 式的过程中, 如果约束方程 (2.43) 式中广义速度 $\dot{q}_s$ 前面的系数 $a_{s,\beta}$ 为常数, 则满足本质线性非完整约束的定义。且与非线性齐次的次数 m 没有关系, 只与广义速度 $\dot{q}_s$ 前面的系数有关。那么, 可得如下命题

定理 1 如果一阶非完整约束 (2.43) 式广义速度 $\dot{q}_s$ 的系数为常系数, 那么一阶非完整约束是本质线性的, 且与广义速度 $\dot{q}_s$ 的齐次次数 m 无关。

定理 2 如果一阶非完整约束 (2.43) 式广义速度 $\dot{q}_s$ 的系数为与之相对应的广义坐标的 m 次函数, 那么一阶非完整约束是本质线性的, 且与广义速度 $\dot{q}_s$ 的齐次次数 m 无关。

文献[24]将牛清萍速度空间的虚位移定义向 k 次空间做了推广, 按照文献[24]的思想, 可以把定理 2 推广。

推论 1 如果非完整约束为 k 次空间广义速度 $q_s^{(k)}$ 的 m 次齐次函数, 且 $q_s^{(k)}$ 前面的系数为常系数, 那么 k 次空间的非完整约束是本质线性的, 且与 k 次空间广义速度 $q_s^{(k)}$ 的齐次次数 m 无关。

证明 设力学系统受有如下形式的非完整约束

$$f_{\beta}((q_s^{(k)})^m) = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, g; n = 1, 2, \dots, n) \quad (2.49)$$

那么有

$$\sum_{s=1}^n \frac{\partial f_{\beta}}{\partial q_s} \delta q_s = 0 \quad (2.50)$$

成立。要满足条件

$$\delta f_\beta = \sum_{s=1}^n \frac{\partial f_\beta}{\partial q_s} \delta q_s + \sum_{s=1}^n \frac{\partial f_\beta}{\partial q_s^{(k)}} \delta q_s^{(k)} = 0 \quad (2.51)$$

则有, k 次空间的李清萍虚位移定义^[24]成立, 即

$$\sum_{s=1}^n \frac{\partial f_\beta}{\partial q_s^{(k)}} \delta q_s^{(k)} = 0 \quad (2.52)$$

推论得证。

但是在其它形式的非完整系统中, 非完整约束是不满足定义 1 的, 同时也不满足定理 1、2 和推论 1, 因此是本质非线性的。对于本质非线性的非完整系统, 我们必须寻求新的合理的方法来研究。

2. 5 本章小结

在非完整系统中, 各种虚位移的定义以及根据虚位移定义得到的交换关系, 在非完整系统中的应用是有范围的。它们并不能推广到所有的非完整系统中, 否则, 就会产生数学上的矛盾。它们合理的范围是本质线性非完整系统。

在完整系统和本质线性非完整系统中这些定义和交换关系都是等价的。对本质非线性非完整系统, 我们必须正确认识它的一些物理性质, 努力寻求新的合理的方法来研究这样一类相当广泛的非完整系统。

第三章 Chetaev 模型与 Vacco 模型比较研究

Appell-Chetaev 定义对非完整动力学的研究有着深刻的影响,但是在一般的非完整系统中应用会有数学上的矛盾。Vacco 动力学方程^[57]的提出对 Appell-Chetaev 定义产生了巨大的冲击,并且产生了很多有意义的研究^{[2][3][4][5][21][58][97]}。文献[32]甚至将 Vacco 动力学与 Newton 力学、Lagrange 力学和 Hamilton 力学作为并列的概念提出。一些文献将非完整约束归结为 Chetaev 模型和 Vacco 模型两种模型来研究。文献[7]对此做了总结,指出对 Chetaev 模型和 Vacco 模型存在四种观点:(1) Chetaev 模型是合理的;(2) Vacco 模型是合理的;(3)非完整约束系统动力学允许有不同的模型;(4)两种模型都不甚合理;问题的严肃性在于涉及非完整动力学的根基。本章将分别从力学与数学的角度对 Chetaev 模型和 Vacco 模型进行比较分析。

3.1 力学与数学分析

在经典分析力学里面,我们研究的都是理想约束。在非完整动力学里面,我们研究的还是理想约束。理想约束对我们研究这个问题有实际的指导意义。

3.1.1 Routh 方程

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_i (i=1, \dots, n)$ 来确定,系统受有如下形式的理想非完整约束

$$f_\beta(q_s, \dot{q}_s, t) = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, g; s = 1, 2, \dots, n) \quad (3.1)$$

一般说来 f_β 不是线性的。

对于这样的非完整系统应用 Appell-Chetaev 定义可以建立一类非完整系统的动力学方程^{[14][16]},称为 Routh 方程。应用 Appell-Chetaev 定义,虚位移加在约束上的条件为

$$\sum_{s=1}^n \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s = 0 \quad (3.2)$$

按 Routh 的思想,引入 Lagrange 乘子 $\lambda_\beta (\beta = 1, 2, \dots, g)$,将 (3.2) 式乘以 λ_β 并对 β 求和,再将所得的表达式加到 D'Alembert-Lagrange 原理^[16],可得到系统的运动

微分方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s + \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \quad (s=1, \dots, n) \quad (3.3)$$

其中 L 为系统的 Lagrange 函数, Q_s 为非有势广义力, 右边第二项记做

$R_s = \sum_{\beta=1}^g \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}$, 称为广义约束力。还可以采用 Jourdain 原理和牛青萍速度空间的

虚位移定义建立类似的方程^[18]。同样可以应用 Hamilton 原理, 通过引入 Lagrange 乘子 λ_β , 应用 Appell-Chetaev 定义建立这样的方程^{[61][62]}。但是, 在第二章我们分析得到了 Appell-Chetaev 定义的合理适用范围, 因此 Routh 方程并不适用于所有的非完整系统, 它的适用范围与 Appell-Chetaev 定义相同。

3. 1. 2 Routh 方程与 Vacco 动力学方程

对于受有形如 (3.1) 式的非完整约束系统, 其边界条件为

$$\delta q_s|_{t=t_0} = \delta q_s|_{t=t_1} = 0 \quad (3.4)$$

q_s 和 $\dot{q}_s \equiv \frac{d}{dt} q_s$ 分别为 Lagrange 坐标和广义速度, t 是时间. $s=1, 2, \dots, n$;

$\beta=1, 2, \dots, g$; $g < n$ 。

Hamilton 原理的泛函为

$$I = \int_{t_0}^{t_1} L(q_s, \dot{q}_s, t) dt \quad (3.5)$$

其约束条件为 (3.1) 式, 边界条件为 (3.4) 式。

将 I 变分, 并令 $\delta I = 0$, 则有

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s \right) dt = 0 \quad (3.6)$$

其约束条件 (3.1) 式可变换为如下两种形式

I. 应用 Appell-Chetaev 定义可得^[16]

$$\sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s \right) = 0 \quad (3.7)$$

II. 应用 Vacco 模型可得^{[3][57]}

$$\delta f_\beta = \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s \right) = 0 \quad (3.8)$$

引入 Lagrange 乘子 λ_β ，分别将约束条件 (3.7) 式和 (3.8) 式纳入泛函的变分 (3.6) 式中，分部积分，并考虑在边界上 $\delta q_s = 0$ 。则可分别得到 Appell-Chetaev 定义下的运动方程—Routh 方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} - \sum_{\beta=1}^g \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} = 0 \quad (3.9)$$

和 Vacco 动力学方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} - \sum_{\beta=1}^g \lambda_\beta \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \right) + \sum_{\beta=1}^g \dot{\lambda}_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} = 0 \quad (3.10)$$

Vacco 动力学方程中的 Lagrange 乘子 λ_β 一般为时间 t 的函数^{[3][57]}。

3. 1. 3 约束力的力学性质分析

在 (3.9) 式中，第三项为约束力，记为

$$R_s = \sum_{\beta=1}^g \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \quad (3.11)$$

由 Appell-Chetaev 定义 (3.7) 式，可得

$$\mathbf{R} \delta \mathbf{q} = \sum_{s=1}^n R_s \delta q_s = \sum_{s=1}^n \sum_{\beta=1}^g \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s = \sum_{\beta=1}^g \lambda_\beta \sum_{s=1}^n \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s = 0 \quad (3.12)$$

这说明 n 维矢量 $\mathbf{R}$ (约束力) 和 n 维矢量 $\delta \mathbf{q}$ (虚位移) 是正交的。也就约束力在虚位移上所做的功为零，即约束为理想约束。

在 (3.10) 式中，表示约束力的各项可记为

$$R'_s = - \sum_{\beta=1}^g \lambda_\beta \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \right) + \sum_{\beta=1}^g \dot{\lambda}_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \quad (3.13)$$

故有

$$\mathbf{R}' \delta \mathbf{q}' = \sum_{s=1}^n R'_s \delta q'_s = \sum_{s=1}^n \left[- \sum_{\beta=1}^g \lambda_\beta \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \right) + \sum_{\beta=1}^g \dot{\lambda}_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \right] \delta q_s \quad (3.14)$$

由 (3.8) 式可知

$$\sum_{s=1}^n \frac{\partial f_\beta}{\partial q_s} \delta q_s = - \sum_{s=1}^n \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s \quad (3.15)$$

将 (3.15) 式代入 (3.14) 式，则有

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}'\delta\mathbf{q}' &= \sum_{s=1}^n R'_s \delta q'_s = \sum_{\beta=1}^g \sum_{s=1}^n \left[\lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s + \lambda_\beta \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \right) \delta q_s + \dot{\lambda}_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s \right] \\
&= \sum_{\beta=1}^g \sum_{s=1}^n \frac{d}{dt} \left(\lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s \right) = \sum_{\beta=1}^g \frac{d}{dt} \sum_{s=1}^n \left(\lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s \right) = \sum_{\beta=1}^g \frac{d}{dt} \left(\lambda_\beta \sum_{s=1}^n \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s \right) \quad (3.16)
\end{aligned}$$

对 (3.16) 式，可做如下分析：

在第二章里，我们分析得到，对于本质线性非完整约束，约束自然满足下面的条件

$$\sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s \right) = 0 \quad (\text{Appell-Chetaev 定义}) \quad (3.17)$$

那么，将条件 (3.17) 式应用到 (3.16) 式是合理的。则 (3.16) 式为零，即

$$\mathbf{R}'\delta\mathbf{q}' = \sum_{s=1}^n R'_s \delta q'_s = 0 \quad (3.18)$$

这说明，约束力 $\mathbf{R}'$ 与虚位移 $\delta\mathbf{q}'$ 正交，即约束力在虚位移上所做的功为零。那么根据以上分析可知，对于本质线性理想非完整约束，Appell-Chetaev 定义为一个自然成立的过程。把 Appell-Chetaev 定义引入到 Vacco 动力学方程中时，方程 (3.9) 式与 (3.10) 式等价，也就是说在本质线性理想非完整系统中，Appell-Chetaev 定义下的运动方程与 Vacco 动力学方程是等价的。这也说明，在本质线性理想非完整系统中 Hamilton 原理是可以应用。

但是对于本质非线性非完整系统，Appell-Chetaev 定义是不成立的，即

$$\sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s \right) \neq 0 \quad (3.19)$$

则由 (3.16) 式可知

$$\mathbf{R}'\delta\mathbf{q}' = \sum_{s=1}^n R'_s \delta q'_s = \sum_{\beta=1}^g \frac{d}{dt} \left(\lambda_\beta \sum_{s=1}^n \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s \right) \neq 0 \quad (3.20)$$

这说明约束力 $\mathbf{R}'$ 与虚位移 $\delta\mathbf{q}'$ 不正交，因为对于非理想约束系统， $\delta\mathbf{q}'$ 在约束超曲面 $f_\beta(q_s, \dot{q}_s, t) = 0$ 的瞬时切平面内，而约束力 $\mathbf{R}'$ 并不指向瞬时固定的超曲面的法线方向。那么 Vacco 动力学方程使得本质非线性非完整约束由理想变为非理想的了，这与我们给定的约束是理想的相矛盾。

第二章我们证明了 Appell-Chetaev 定义的适用范围为本质线性非完整系统。Vacco 动力学方程也只能在本质线性非完整系统中成立。如果在本质非线性非完整系统中应用 Vacco 动力学方程，将会产生力学上的矛盾。

3. 1. 4 约束力的数学分析

假设在本质非线性非完整系统中 Appell-Chetaev 定义成立, 那么我们可以得到 (3.18) 式成立, 即 Vacco 动力学方程不改变约束的性质。但是在本质非线性非完整约束动力学系统中应用 Appell-Chetaev 定义会产生

$$\delta f_\beta = \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \right) \delta q_s \neq 0 \quad (3.21)$$

的矛盾。那么在本质非线性非完整约束动力学系统中, Appell-Chetaev 定义错了。

从上面的分析可以看到, Appell-Chetaev 定义和 Vacco 动力学方程共同的适用范围是本质线性非完整系统。但是在本质非线性非完整约束动力学系统中, Vacco 动力学方程中表示约束力的项却不同于 Appell-Chetaev 定义下运动方程中表示约束力的项, 这种不同并不是由于约束的非理想性所致, 而是由于本质非线性非完整约束的非线性本质所致。因为, 不可能通过应用某个模型, 而可以改变系统本身的性质。如果某个模型的应用会导致系统性质的改变, 那么这个模型一定存在不合理的方面。在本质非线性非完整系统中, Chetaev 模型虽然会产生数学上的矛盾, 但是并不改变约束力的性质, 是本质非线性非完整约束的一次近似结果; Vacco 动力学方程给出的结果为我们提供了一个思考, 即本质非线性非完整约束是理想约束吗? 必须寻求新的方式来研究本质非线性非完整动力学。

3. 2 算例分析

Appell-Hamel 问题^[16]。将直角坐标 x, y, z 分别用广义坐标 q_1, q_2, q_3 代替, 我们可以得到该例的 Lagrange 函数和约束微分方程

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - mgq_3 \quad (3.22)$$

$$f = \dot{q}_3^2 - \dot{q}_1^2 - \dot{q}_2^2 = 0 \quad (3.23)$$

为了方便, 我们可以把 $\dot{q}_3^2$ 前的系数取为 1。

Appell-Hamel 例的 Chetaev 模型解

根据方程 (3.9) 式得到

$$m\ddot{q}_1 = -2\lambda\dot{q}_1 \quad (3.24.1)$$

$$m\ddot{q}_2 = -2\lambda\dot{q}_2 \quad (3.24.2)$$

$$m\ddot{q}_3 + mg = 2\lambda\dot{q}_3 \quad (3.24.3)$$

方程 (3.23) 式和 (3.24) 式的解表示为^[16]

$$\sqrt{C^2 + 1}\dot{q}_1 = v_0 - \frac{1}{2}gt \quad (3.25.1)$$

$$\sqrt{C^2 + 1}\dot{q}_2 = v_0 - \frac{1}{2}gt \quad (3.25.2)$$

$$\dot{q}_3 = v_0 - \frac{1}{2}gt \quad (3.25.3)$$

其中

$$C = \frac{\dot{q}_{20}}{\dot{q}_{10}}, v_0 = \sqrt{\dot{q}_{10}^2 + \dot{q}_{20}^2}$$

进而有

$$\sqrt{C^2 + 1}(q_1 - q_{10}) = v_0 t - \frac{1}{4}gt^2 \quad (3.26.1)$$

$$\sqrt{C^2 + 1}(q_2 - q_{20}) = v_0 t - \frac{1}{4}gt^2 \quad (3.26.2)$$

$$q_3 = q_{30} + v_0 t - \frac{1}{4}gt^2 \quad (3.26.3)$$

其中有 5 个独立常数 $q_{10}, q_{20}, q_{30}, v_0, C$ 。

Appell-Hamel 例的 Vacco 动力学解

方程 (3.10) 给出

$$m\ddot{q}_1 = \lambda \left[-\frac{d}{dt}(-2\dot{q}_1) \right] - \dot{\lambda}(-2\dot{q}_1) \quad (3.27.1)$$

$$m\ddot{q}_2 = \lambda \left[-\frac{d}{dt}(-2\dot{q}_2) \right] - \dot{\lambda}(-2\dot{q}_2) \quad (3.27.2)$$

$$m\ddot{q}_3 + mg = \lambda \left[-\frac{d}{dt}(2\dot{q}_3) \right] - \dot{\lambda}(2\dot{q}_3) \quad (3.27.3)$$

即

$$m\ddot{q}_1 = (2\lambda\dot{q}_1)' \quad (3.28.1)$$

$$m\ddot{q}_2 = (2\lambda\dot{q}_2)' \quad (3.28.2)$$

$$m\ddot{q}_3 + mg = -(2\lambda\dot{q}_3)' \quad (3.28.3)$$

积分得

$$m\dot{q}_1 = 2\lambda\dot{q}_1 + C_1 \quad (3.29.1)$$

$$m\dot{q}_2 = 2\lambda\dot{q}_2 + C_2 \quad (3.29.2)$$

$$m\dot{q}_3 + mgt = -2\lambda\dot{q}_3 + C_3 \quad (3.29.3)$$

其中 C_1, C_2, C_3 为积分常数。于是有

$$\frac{m\dot{q}_1 - C_1}{2\dot{q}_1} = \frac{m\dot{q}_2 - C_2}{2\dot{q}_2} = \frac{C_3 - m\dot{q}_3 - mgt}{2\dot{q}_3} = \lambda \quad (3.30)$$

由此解得

$$\frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_1} = \frac{C_2}{C_1} \equiv C \quad (3.31)$$

和

$$m\dot{q}_2\dot{q}_3 - C_2\dot{q}_3 = C_3\dot{q}_2 - m\dot{q}_2\dot{q}_3 - mgt\dot{q}_2 \quad (3.32)$$

由式 (3.23) 式和 (3.31) 式解得

$$\dot{q}_2 = C\dot{q}_1, \quad \dot{q}_3 = \sqrt{C^2 + 1}\dot{q}_1 \quad (3.33)$$

将 (3.33) 式代入 (3.32) 式, 得

$$\sqrt{C^2 + 1}\dot{q}_1 = -\frac{1}{2}gt + \frac{C_2}{2mC}\sqrt{C^2 + 1} + \frac{C_3}{2m} \quad (3.34)$$

现调整积分常数。令 $(\dot{q}_1)_0 = \dot{q}_{10}$, 则

$$C_3 = \sqrt{C^2 + 1}(2m\dot{q}_{10} - C_1), \quad C_2 = CC_1 \quad (3.35)$$

将 (3.35) 式代入 (3.34) 式, 得

$$\sqrt{C^2 + 1}\dot{q}_1 = \sqrt{C^2 + 1}\dot{q}_{10} - \frac{1}{2}gt \quad (3.36)$$

即

$$\sqrt{C^2 + 1}\dot{q}_1 = v_0 - \frac{1}{2}gt \quad (3.37)$$

利用 (3.33) 式, 有

$$\frac{\sqrt{C^2 + 1}}{C}\dot{q}_2 = v_0 - \frac{1}{2}gt \quad (3.38.1)$$

$$\dot{q}_3 = v_0 - \frac{1}{2}gt \quad (3.38.2)$$

对比 (3.37) 式、(3.38) 式和 (3.26) 式, 可以得知两个模型的解是一致的。

我们可以发现, 在该例中, 约束虽然是非线性的, 但是速度却是一阶齐二次的, 且广义速度前的系数为常系数, 是本质线性非完整约束。因此, 由 Chetaev

模型得到的解与 Vacco 模型解完全相同。但是对于本质非线性非完整约束，两个模型得到的结果完全不一样。如 Chaplygin-Caratheodory 问题，这个非完整约束是传统一阶线性的，但是它却是本质非线性非完整约束。因此，在这个问题中应用 Chetaev 模型和 Vacco 模型得到的解存在本质上的差别^{[1][4]}。

3. 3 本章小结

本章对由 Appell-Chetaev 定义得到的非完整系统的运动方程和 Vacco 动力学方程从力学和数学的角度进行了比较分析。从本章的分析可以看到，在本质非线性非完整系统中，如果应用 Appell-Chetaev 定义，并不改变约束本身的性质，但是会产生数学上的矛盾；但是在本质非线性非完整系统中 Vacco 动力学方程虽然没有数学上的矛盾，但是会产生力学性质上的矛盾。但是它们在完整系统和本质线性非完整约束系统动力学中却是可以完全统一起来。

在本质非线性非完整系统中，Appell-Chetaev 定义是一种近似解，Vacco 动力学方程 Vacco 动力学方程给出的结果为我们提供了一个思考，即本质非线性非完整约束是理想约束吗？对本质非线性非完整动力学，有待于寻求合理的方式来研究，才可能从根本上解决在本质非线性非完整系统中 Appell-Chetaev 定义与 Vacco 动力学方程所产生的矛盾。

第四章 Hamilton 原理的统一形式

Hamilton 原理是经典力学中的一个重要的变分原理,存在深刻的物理力学意义,但是在大多文献中把它当作一个数学变分问题来看待,实际上 Hamilton 原理不是一个单纯的变分问题,必须从多种角度来正确认识 Hamilton 原理^[20]。由于没有正确认识到非完整系统中包含本质非线性非完整约束,试图把 Hamilton 原理纳入整个非完整系统中,这样必将导致矛盾,甚至错误的认识。但是这些问题是需要认识清楚,关于 Hamilton 原理能否用于非完整系统长期以来得不到解决,一个重要的原因就是没有认识到本质非线性非完整约束的不确定非线性本质。正确认识作用量 I 的极值性质,就不难理解 Hamilton 原理是驻值原理而不是极值原理。从变分法可知, $\delta I = 0$ 是泛函 I 取极值的必要条件,而非充分条件。要了解 I 的极值性质,就必须研究 $\delta^2 I$ 的正负。而且非完整系统中虚位移的定义和确定化的交换关系对于 Hamilton 原理能否应用于非完整系统起着至关重要的作用。本章将对完整约束系统和本质线性非完整约束动力学系统的 Hamilton 原理进行研究。

4. 1 完整系统的基本变分原理

在经典完整约束动力学系统中人们建立了很多经典的基本变分原理,这些基本变分原理包括微分变分原理(如 D'Alembert-Lagrange 原理、Jourdain 原理、Gauss 原理以及万有 D'Alembert-Lagrange 原理)和积分变分原理(如 Hamilton 原理和 Lagrange 原理)。这些原理对整个分析动力学的发展起着重要的作用。

4. 1. 1 D'Alembert-Lagrange 原理

设一力学系统由 N 个质点组成,具有任何的双面约束。根据 D'Alembert 原理,由加在系统质点上的主动力 $\vec{F}_i (i=1,2,\dots,n)$ 、约束反力 $\vec{R}_i$ 以及假想的惯性力 $-m_i \ddot{\vec{r}}_i$ 所组成的力系,在每一瞬时,即在系统的每一个位置上都满足平衡条件。但是,对于满足平衡条件的力系可以应用由虚位移原理表示的平衡条件。因此,将 D'Alembert 原理与虚位移原理相结合,就得到 D'Alembert-Lagrange 原理:加在系统质点上的主动力、约束反力以及惯性力在系统任何虚位移上的元功之和等于零。这可表示为方程

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{R}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (4.1)$$

在特殊情况下，如果加在系统上的约束是理想的，这意味着约束反力在任何虚位移上的元功之和等于零，即

$$\sum_{i=1}^N \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (4.2)$$

那么 (4.1) 式成为

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (4.3)$$

这就是说，在理想约束下所有时刻真实运动不同于运动学上的可能运动之处，仅在于对真实运动来说主动力和惯性力在系统任何虚位移上的元功之和等于零。

在经典完整约束动力学系统中，可以将原理 (4.3) 式变换为广义坐标形式，有

$$\sum_{s=1}^n \left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial T}{\partial q_s} + Q_s \right) \delta q_s = 0 \quad (4.4)$$

其中 T 为系统的动能、 $Q = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s}$ 为广义力，整个括号里的项就是第二类 Lagrange 方程。

4. 1. 2 Jourdan 原理

在 D'Alembert-Lagrange 原理中变分是坐标的变分，即通常所指的虚位移。而在 Jourdan 原理中变分是速度的变分，即所谓速度空间的虚位移。Jourdan 原理可以表示为

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \cdot \delta \dot{\vec{r}}_i = 0 \quad (4.5)$$

因为这时真实运动与比较运动的 m_i ， $\ddot{\vec{r}}_i$ ， $\vec{F}_i$ 是一样的，它们的变分都是零，于是 (4.5) 式可以写成

$$\delta \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \cdot \dot{\vec{r}}_i = 0 \quad (4.6)$$

其中变分号下的项表示主动力 $\vec{F}_i$ 和惯性力 $m_i \ddot{\vec{r}}_i$ 之合力的功率。因此，Jourdan 原理可以表述如下：

在仅仅速度不同的所有运动中，函数 $\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \cdot \dot{\vec{r}}$ 仅在某一真实运动中达到稳定值，此真实运动满足 Newton 第二定律 $\vec{F}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i$ 。我们可以看到，Jourdain 原理 (4.5) 式对约束的要求乃是 Jourdain 意义下的理想性，即

$$\sum_{i=1}^n \vec{R}_i \cdot \delta \dot{\vec{r}}_i = 0 \quad (4.7)$$

其中 $\vec{R}_i$ 为约束反力，(4.7) 式表明约束反力的元功率之和为零。同样 Jourdain 原理可以用广义坐标表示

$$\sum_{s=1}^n \left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial T}{\partial q_s} + Q_s \right) \delta \dot{q}_s = 0 \quad (4.8)$$

其中 T 为系统的动能、 $Q = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s}$ 为广义力，整个括号里的项就是第二类 Lagrange 方程。

4. 1. 3 完整系统的 Hamilton 原理

假设力学系统是完整的、保守的，系统的位形由 n 个广义坐标 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 来确定，系统的动势，即 Lagrange 函数 $L = T - V$ ， $L = L(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t)$ ，其中 T 为系统的动能， V 为系统的势能，我们把 L 在时间 t_0 至 t_1 内的积分

$$I = \int_{t_0}^{t_1} L dt \quad (4.9)$$

称为 Hamilton 意义下的作用量。Hamilton 作用量是一个泛函，此泛函由选取 n 个时间的函数 $q_s(t)$ 总合来确定。在真实路径上，作用量 I 取完全确定的数值 I^* ，此时出现于被积函数 L 的表达式中的 $q_s(t)$ ， $\dot{q}_s(t)$ 就是真实运动中的广义坐标和广义速度。我们计算由真实路径过渡到某个邻近路径时作用量 I 的增量。为此，需将邻近路径的动势代入 (4.9) 式中。即如果限于研究相对于 δq_s ， $\delta \dot{q}_s$ 的一阶小量，就用 $L + \delta L$ 代替 L 。这样，在所指近似下计算的作用量的增量，即作用量的变分 δI 由下式确定

$$I^* + \delta I = \int_{t_0}^{t_1} (L + \delta L) dt = \int_{t_0}^{t_1} L dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt \quad (4.10)$$

因为

$$\delta L = \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s \right) \quad (4.11)$$

所以

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s \right) dt \quad (4.12)$$

对于完整系统，存在交换关系

$$\delta \dot{q}_s = \frac{d}{dt} (\delta q_s) \quad (4.13)$$

将 (4.12) 式的第二项利用分部积分，则 (4.12) 式成为

$$\delta I = \sum_{s=1}^n \left[\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right) \delta q_s dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s \Big|_{t_0}^{t_1} \right] \quad (4.14)$$

假设想象的邻近路径不是任意选取的，而是在瞬时 t_0 和 t_1 与真实路径相重合，因此有

$$\delta q_s \Big|_{t=t_0} = \delta q_s \Big|_{t=t_1} = 0 \quad (4.15)$$

利用 (4.15) 式，将 (4.14) 式写成

$$\delta I = \sum_{s=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right) \delta q_s dt \quad (4.16)$$

因为对完整保守系统来说，在用广义坐标表示的 D'Alembert-Lagrange 原理^[16]

$$\sum_{s=1}^n \left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial T}{\partial q_s} + Q_s \right) \delta q_s = 0 \quad (4.17)$$

中的 δq_s 彼此独立，且 $Q_s = -\frac{\partial V}{\partial q_s}$ ，故得 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0 \quad (s=1,2,\dots,n) \quad (4.18)$$

因此，(4.16) 式可以写成

$$\delta I = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0 \quad (4.19)$$

这就是完整保守系统的 Hamilton 原理。它可表述为：在两个给定的位形之间，系统的真实运动不同于同样位形、同样时间间隔上可能的运动之处在于，对真实运动来说 Hamilton 意义下的作用量具有稳定值。可以利用 Lagrange 方程 (4.18) 式来推证 Hamilton 原理 (4.19) 式；反之，也可以由 Hamilton 原理 (4.19) 式推导出 Lagrange 方程 (4.18) 式。

如果系统是完整的，但非保守的，这时将原理（4.17）式由 t_0 至 t_1 积分，得到

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^n \left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial T}{\partial q_s} + Q_s \right) \delta q_s dt = 0 \quad (4.20)$$

利用关系（4.13）式，动能的变分可表示为

$$\begin{aligned} \delta T &= \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s + \frac{\partial T}{\partial q_s} \delta q_s \right) \\ &= \sum_{s=1}^n \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \frac{d}{dt} (\delta q_s) + \frac{\partial T}{\partial q_s} \delta q_s \right] \end{aligned} \quad (4.21)$$

利用条件（4.15）式，则有

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \delta T dt &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) \delta q_s dt + \sum_{s=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s \Big|_{t_0}^{t_1} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) \delta q_s dt \end{aligned} \quad (4.22)$$

将（4.22）式代入（4.20）式得到

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta W) dt = 0 \quad (4.23)$$

其中 $\delta W = \sum_{s=1}^n Q_s \delta q_s$ 为主动力的元功之和，并非某个函数的变分。原理（4.23）式就是完整非保守系统的 Hamilton 原理。

4. 2 Hamilton 原理的统一形式

4. 2. 1 应用 Appell-Chetaev 条件时本质线性非完整系统 Hamilton 原理的驻值特性

假设一个动力学系统由 Lagrange 函数 $L(q_s, \dot{q}_s, t)$ 和 g 个非完整约束的独立方程

$$f_\beta(q_s, \dot{q}_s, t) = 0 \quad (n=1,2,\dots,n; \beta=1,2,\dots,g) \quad (4.24)$$

来描述。一般说来，约束方程（4.24）式对 $\dot{q}_s$ 不是线性的。这里 q_s 和 $\dot{q}_s \equiv \frac{dq_s}{dt}$ 是

Lagrange 坐标和广义速度， t 是时间，并且 $n > g$ 。在通常的动力学系统情形， L 是

$T+V$ ，其中 $T(q_s, \dot{q}_s, t)$ 是系统的动能， $V(q_s, t)$ 是力函数。由于方程 (4.24) 式的独立性，它们可以表示为如下形式

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta} = \varphi_\beta(q_s, \dot{q}_\sigma, t) \quad (\sigma=1, 2, \dots, \varepsilon; \varepsilon=n-g) \quad (4.25)$$

其中， $\dot{q}_\sigma$ 为独立的广义速度。

那么将应用 Appell-Chetaev 条件证明 Hamilton 作用量取驻值的充分必要条件。

必要性证明—由 Hamilton 驻值原理推导运动方程。

根据 Hamilton 推导驻值条件。Hamilton 的泛函为

$$I = \int_{t_0}^{t_1} L(q_s, \dot{q}_s, t) dt \quad (4.26)$$

其附加条件为 (4.24) 式或 (4.25) 式。将 I 变分，并令 $\delta I = 0$ ，则有

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s \right) dt = 0 \quad (4.27)$$

应用 Appell-Chetaev 条件，其附加条件变为

$$\sum_{s=1}^n \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s = 0 \quad (4.28)$$

或者

$$\delta q_{\varepsilon+\beta} = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma} \delta q_\sigma \quad (4.29)$$

引入 Lagrange 乘子 λ_β ，将附加条件 (4.28) 式纳入泛函 (4.27) 式中，则有

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s \right) + \sum_{\beta=1}^g \lambda_\beta \sum_{s=1}^n \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s \right] dt = 0 \quad (4.30)$$

引入边界条件

$$\delta q_s \Big|_{t=t_0} = \delta q_s \Big|_{t=t_1} = 0 \quad (4.31)$$

分部积分 (4.30) 式，则 (4.30) 式可以变换为

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + \sum_{\beta=1}^g \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \right) \delta q_s dt = 0 \quad (4.32)$$

由于引入 Lagrange 乘子，使得不独立的广义坐标变分 $\delta q_{\varepsilon+\beta}$ 前面的系数为零，可以得到泛函 (4.30) 式取极值的必要条件

$$\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + \sum_{\beta=1}^g \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} = 0 \quad (4.33)$$

方程 (4.33) 式即所谓的真实轨道方程，它表示泛函 I 取极值的必要条件，而非

充分条件。

正确认识 I 的极值性质, 就不难理解 Hamilton 原理是驻值原理而不是极值原理。从变分法可知, $\delta I = 0$ 是泛函 I 取极值的必要条件, 而非充分条件。要了解 I 的极值性质, 就必须研究 $\delta^2 I$ 的正负。把函数 L 的变更展开并取到二阶变分项

$$\begin{aligned}\Delta L &= \delta L + \delta^2 L \\ &= \delta L + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 (T-V)}{\partial q_s \partial q_k} \delta q_s \delta q_k + \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_s \delta \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_s \delta \dot{q}_k\end{aligned}\quad (4.34)$$

则有

$$\delta^2 L = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 (T-V)}{\partial q_s \partial q_k} \delta q_s \delta q_k + \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_s \delta \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_s \delta \dot{q}_k\quad (4.35)$$

那么对于完整保守系统我们知道

$$\delta^2 I > 0\quad (4.36)$$

这就是说, Hamilton 作用量 I 对于真实运动应取极小值。事实上, 可能出现既非极大值又非极小值的临界情况。那么对于本质线性非完整系统, Hamilton 作用量 I 对于真实运动能否取得稳定的极小值呢? 这个问题关系到 Hamilton 原理能否应用于非完整系统。

对于本质线性定常非完整约束, 动能是广义速度 $\dot{q}_s$ 的二次函数, 因此, (4.35) 式的最后一项为

$$\frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_s \delta \dot{q}_k = T(\delta \dot{q}_s)\quad (4.37)$$

其中, $T(\delta \dot{q}_s)$ 是动能 T 中以 $\delta \dot{q}_s$ 代替 $\dot{q}_s$ 时得到的表达式。

由于 $\delta q_s(t_0) = 0$, 所以对于任意时间 t 有

$$|\delta q_s(t)| = \left| \int_{t_0}^{t_1} \delta \dot{q}_s dt \right| < \chi_s(t_1 - t_0)\quad (4.38)$$

其中, χ_s 为 $t_0 < t < t_1$ 时间内 $\delta \dot{q}_s$ 模的极大值。因此对于足够小的 $t_1 - t_0$, (4.35) 式的右端前两项可以任意小, 最后一项起主导作用, $\delta^2 L$ 的正负也就由最后一项决定

$$\delta^2 L \approx T(\delta \dot{q}_s) > 0\quad (4.39)$$

因为动能总为正值, 可以肯定 (4.35) 式对于足够小的 $t_1 - t_0$, 有以下不等式

$$\delta^2 I = \int_{t_0}^{t_1} \delta^2 L dt = \int_{t_0}^{t_1} T(\delta \dot{q}_s) dt > 0 \quad (4.40)$$

成立。也就是说，对于足够小的 $t_1 - t_0$ ，Hamilton 作用量 I 在真实路径中取驻值，而且是极小值。

充分性证明—由运动方程推导 Hamilton 驻值原理的泛函。

将方程 (4.33) 式乘以 δq_s ，相加并积分，可得

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + \sum_{\beta=1}^g \lambda_{\beta} \frac{\partial f_{\beta}}{\partial \dot{q}_s} \right) \delta q_s dt = 0 \quad (4.41)$$

经分部积分，并考虑边界条件 (4.31) 式，(4.41) 式可以变换为

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} \delta q_s - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s \right) + \sum_{\beta=1}^g \lambda_{\beta} \sum_{s=1}^n \frac{\partial f_{\beta}}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s \right] dt = 0 \quad (4.42)$$

应用 Appell-Chetaev 条件 (4.28) 式，则 (4.42) 式变为

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} \delta q_s - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s \right) dt = 0 \quad (4.43)$$

(4.43) 式可以处理为一个泛函的驻值问题。

$$I = \int_{t_0}^{t_1} L(q_s, \dot{q}_s, t) dt \quad (4.44)$$

其附加条件为 (4.28) 式。

4.2.2 一般本质线性非完整系统 Hamilton 原理的驻值特性

必要性证明—由 Hamilton 驻值原理推导运动方程。

Hamilton 的泛函为

$$I = \int_{t_0}^{t_1} L(q_s, \dot{q}_s, t) dt \quad (4.45)$$

其附加条件为 (4.24) 式。

将 I 变分，并令 $\delta I = 0$ ，则有

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s \right) dt = 0 \quad (4.46)$$

其附加条件 (4.24) 式变换为

$$\delta f_{\beta} = \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial f_{\beta}}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{\partial f_{\beta}}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s \right) dt = 0 \quad (4.47)$$

引入 Lagrange 乘子 μ_β ，并将附加条件 (4.47) 式纳入泛函 (4.46) 式中，则有

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s \right) + \sum_{\beta=1}^g \mu_\beta \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s \right) \right] dt = 0 \quad (4.48)$$

在本质线性非完整系统中同样存在边界条件

$$\delta q_s \big|_{t=t_0} = \delta q_s \big|_{t=t_1} = 0 \quad (4.49)$$

经分部积分，则 (4.48) 式变换为

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_s} \delta q_s - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s + \sum_{\beta=1}^g \mu_\beta \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \right) - \sum_{\beta=1}^g \dot{\mu}_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \right] \delta q_s dt = 0 \quad (4.50)$$

由于引入 Lagrange 乘子，使得不独立的广义坐标变分 $\delta q_{\epsilon+\beta}$ 前面的系数为零，可以得到泛函 (4.50) 式取极值的条件

$$\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + \sum_{\beta=1}^g \mu_\beta \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \right) - \sum_{\beta=1}^g \dot{\mu}_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} = 0 \quad (4.51)$$

方程 (4.51) 式即所谓的测地轨道方程，它表示泛函 I 取极值的必要条件。

同样我们可以证明，在一般本质线性非完整系统中，Hamilton 作用量为稳定作用量。

充分性证明—由运动方程推导 Hamilton 驻值原理的泛函。

将方程 (4.51) 式乘以 δq_s ，相加并积分，可得

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + \sum_{\beta=1}^g \mu_\beta \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \right) - \sum_{\beta=1}^g \dot{\mu}_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \right] \delta q_s dt = 0 \quad (4.52)$$

经分部积分，并考虑到边界条件 (4.49) 式，可得

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s \right) + \sum_{\beta=1}^g \mu_\beta \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s \right) \right] dt = 0 \quad (4.53)$$

应用附加条件 (4.47) 式，则 (4.53) 式变换为

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s \right) dt = 0 \quad (4.54)$$

可以将 (4.54) 式处理为一个泛函的驻值问题。

$$I = \int_{t_0}^{t_1} L(q_s, \dot{q}_s, t) dt \quad (4.55)$$

其附加条件为 (4.24) 式。

4. 2. 3 关于泛函 $\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0$ 和 $\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = 0$

多年来，有一个问题使学术界困惑，在一般的非完整系统中，对于泛函

$$\int_{t_0}^{t_1} [\delta L + \sum_{\beta=1}^g \lambda_{\beta} \sum_{s=1}^n \frac{\partial f_{\beta}}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s] dt = 0 \quad (4.56)$$

能否将变分号提到积分号之外。文献[62]给出了一种方法，将 f_{β} 表示为

$$f_{\beta} = \frac{d}{dt} F_{\beta} = \dot{F}_{\beta} \quad (4.57)$$

则 (4.56) 式可变换为

$$\int_{t_0}^{t_1} [\delta L + \sum_{\beta=1}^g \lambda_{\beta} \sum_{s=1}^n \frac{\partial \dot{F}_{\beta}}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s] dt = 0 \quad (4.58)$$

考虑到

$$\dot{F}_{\beta} = \sum_{s=1}^n \frac{\partial F_{\beta}}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial F_{\beta}}{\partial t} \quad (4.59)$$

可得

$$\frac{\partial \dot{F}_{\beta}}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial F_{\beta}}{\partial q_s} \quad (4.60)$$

将 (4.60) 式代入 (4.58) 式，则有

$$\int_{t_0}^{t_1} [\delta L + \sum_{\beta=1}^g \lambda_{\beta} \sum_{s=1}^n \frac{\partial F_{\beta}}{\partial q_s} \delta q_s] dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} [L + \sum_{\beta=1}^g \lambda_{\beta} F_{\beta}] dt = 0 \quad (4.61)$$

因此，对于非完整系统，和完整系统一样，也可以写出

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt \quad (4.62)$$

并且文献[62]指出，(4.62) 式表明泛函 $\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0$ 和 $\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = 0$ 都定义了变分学中的

求定积分形式的泛函

$$\int_{t_0}^{t_1} L dt \quad (4.63)$$

的驻值问题。

由上面的推理，可以得到应用和不应用 Appell-Chetaev 条件推导出系统的运动微分方程组。

应用 Appell-Chetaev 条件可得

$$\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + \sum_{\beta=1}^g \lambda_{\beta} \frac{\partial f_{\beta}}{\partial \dot{q}_s} = 0 \quad (4.64)$$

不应用 Appell-Chetaev 条件可得

$$\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + \sum_{\beta=1}^g \mu_{\beta} \left(\frac{\partial f_{\beta}}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_{\beta}}{\partial \dot{q}_s} \right) - \sum_{\beta=1}^g \dot{\mu}_{\beta} \frac{\partial f_{\beta}}{\partial \dot{q}_s} = 0 \quad (4.65)$$

实际上, (4.64) 式就是第三章里面的 Routh 方程, (4.65) 式就是第三章里面的 Vacco 动力学方程。

Vacco 动力学方程在本质非线性非完整系统中使得约束由理想变为非理想的, Appell-Chetaev 定义应用于本质非线性非完整系统会产生数学上的矛盾。因此, 从上面的分析可以看到, 对于一般的非完整系统, Hamilton 作用量并不会是稳定的作用量。文献[62]指出通过应用 Appell-Chetaev 条件, 只能使非理想约束变为理想约束, 而不能使非完整约束变为完整约束。

实际上, 对于完整约束和本质线性非完整系统 Hamilton 原理才具有 (4.62) 式的形式。对本质非线性非完整系统必须寻求新的、合理的方法来研究。试图把本质非线性非完整系统和本质线性非完整系统统一起来的结论是不合理的。

4. 3 本章小结

通过本章的研究, 发现在本质线性非完整系统中, Hamilton 原理是可用的, 而且变分的泛函满足驻值性条件。完整动力学和本质线性非完整动力学从形式到内容是可以纳入统一框架的, 而且 Hamilton 原理也具有统一形式。对于本质非线性非完整动力学必须寻求新的、合理的方法来研究。

总结与展望

非完整动力学是一门内容丰富、研究问题具有相当复杂性的学科，同时非完整动力学的理论也在不断地发展和完善。

通过本文的研究，发现完整系统与本质线性非完整系统是可以纳入统一框架的，因为研究它们的方法、动力学方程以及 Hamilton 原理，从形式到内容都具有共性。但是要把整个非完整动力学纳入统一框架是不可能的，研究本质线性非完整系统与本质非线性非完整系统的方法应该有着本质上的区别，不能把研究完整系统的整套方法不加考虑地应用到本质非线性非完整动力学中，否则将产生力学或数学上不可克服的矛盾。

通过本文的研究，得到非完整动力学中虚位移的 Appell-Chetaev 定义、牛青萍定义以及确定化的 Suslov 交换关系和 Holder 交换关系的合理适用范围是本质线性非完整系统；Appell-Chetaev 定义在本质非线性非完整系统中是一种线性化处理非完整约束的有效方法。Hamilton 原理是可以应用到完整系统和本质线性非完整系统的，而且在本质线性非完整系统中，Hamilton 作用量是稳定的驻值。

通过本文的研究，认为在本质非线性非完整系统中各种虚位移的定义以及各种交换关系的应用应该重新考虑。Vacco 动力学方程在本质非线性非完整系统中有约束力性质的非理想性，但是为我们研究本质非线性非完整约束的理想性与非理想性的物理性质提供了有益思考。但是对于本质非线性非完整系统必须寻求新的、有效的、正确方法来研究，克服各种线性化虚位移定义和确定化交换关系在本质非线性非完整系统中所产生的力学与数学上的矛盾。

同时，本文认为，对于本质非线性非完整系统必须研究约束本身不确定的非线性性质和物理力学性质。寻求合理的方法重新建立的各类本质非线性非完整系统的动力学方程。

总之，本质非线性非完整动力学是具有相当的复杂性，本文仅仅对非完整系统的线性化条件和确定化交换关系进行了初步研究，还有很多复杂的问题有待进一步的研究。

1. 本质非线性非完整约束的物理实现到底是什么，这是研究本质非线性非完整约束首要的基本问题。

2. 如何找到有效的、正确的方法来研究本质非线性非完整系统，如何克服各种线性化、确定化方法在本质非线性非完整约束动力学系统中产生的数学和

力学上的矛盾，是需要从新解决的一个难题。

3. 从非线性动力学的角度重新认识本质非线性非完整约束也是一个关键的问题。非线性关系本身是一个确定性的可能产生随机结果的不确定性问题，在研究本质非线性非完整系统时必须正确认识到本质非线性非完整约束的非线性本质。如果把本质非线性非完整约束线性化处理，得到的结果离系统动力学的真实情况有多远。

4. 对受有非完整约束的非线性动力学系统从运动方程、变分原理、守恒量来研究，揭示受非完整约束的非线性动力学系统的混沌运动产生的方式、特征及其一般性的规律。研究非完整约束的非线性动力学系统出现混沌运动的条件，为实际应用奠定基础。

关于非完整动力学还有很多实际与理论问题需要解决。本文作者将在这一领域继续工作，以便比较系统、全面地解决这些问题。

致谢

本文是在导师赵跃宇教授的悉心指导和亲切关怀下完整成的。在论文即将脱稿之际，谨向导师赵跃宇教授表示深切的感谢！他以自己渊博的学术知识、开阔的视野、敏锐的洞察力和深厚的学术功底不断启迪、鞭策和鼓励学生，令学生获益非浅。在近两年的硕士学习生活中，导师赵跃宇教授不但传授了学生许多学术知识，还教会了学生很多做人的道理，让学生受益终生。

感谢师母许文喜副教授近两年来在学业上无私的帮助、生活上无微不至的关怀。

感谢傅衣铭教授和刘腾喜副教授，在学生考研过程中的亲切关怀、不断的鼓励与支持；感谢他们在本科和硕士学习阶段悉心的传授，让学生受益非浅。

感谢唐驾时教授、刘又文教授、龙述尧教授、蒯行成教授和罗松南教授对学生各方面的关心与支持。

感谢陈得良博士、陈昌萍博士、符文彬博士、康厚军博士、钱长照博士、方棋红博士、杨金花硕士、刘凯远硕士、刘铸永硕士、周正平硕士、王明斌硕士、李永红硕士和程红梅硕士等师兄弟和同学。

感谢工程力学系所有老师和同学。

感谢北京理工大学梅凤翔教授为学生提供的宝贵资料和学业上的指导与关心；感谢苏州科技学院张毅教授对学生的指导与关心；感谢商丘师范学院陈向炜教授提供的宝贵资料。

感谢我含辛茹苦的父母对多年来的辛勤培育与学业上的支持、鼓励！

致谢人：金 波

2003 年 4 月

参考文献

- [1] 陈 滨. 分析动力学. 北京: 北京大学出版社, 1987.
- [2] 陈 滨. 关于经典非完整力学的一个争议. 力学学报, 1991, 23(3): 379-384.
- [3] 郭仲衡, 高普云. 关于经典非完整力学. 力学学报, 1990, 22(2): 185-190.
- [4] 郭仲衡, 高普云. 再关于非完整力学. 力学学报, 1992, 24(2): 253-257.
- [5] 郭仲衡. 一类非完整问题的合理解. 中国科学 A 辑, 1994, 24(5): 485-497.
- [6] 郝柏林. 分岔、混沌、奇怪吸引子、湍流及其它. 物理学进展, 1983, 3(3): 329-416.
- [7] 黄文虎, 陈滨, 王照林. 一般力学(动力学、振动与控制)最新进展. 北京: 科学出版社, 1993.
- [8] 梁立孚, 胡海昌. 一般力学中三类变量的广义变分原理. 中国科学 A 辑, 2000, 30(12): 1130-1135.
- [9] 梁立孚, 梁忠宏. 论 Suslov 误解和 Holder 缺陷. 固体力学学报, 1995, 16(3): 228-236.
- [10] 梁立孚. 非完整系统动力学中的 Vakonomic 模型和 Chetaev 模型. 力学进展, 2000, 30(30): 358-369.
- [11] 梁立孚. 应用 Lagrange 乘子法推导一般力学中的广义变分原理. 中国科学 A 辑, 2000, 29(12): 1102-1108.
- [12] 刘 端. 非完整非保守动力学系统的 Noether 定理及其逆定理. 中国科学 A 辑, 1990, 20(11): 1189-1197.
- [13] 罗绍凯. 非线性非完整系统 Vacco 动力学方程的积分方法. 应用数学和力学, 1995, 16(11): 981-989.
- [14] 梅凤翔, 刘端, 罗勇. 高等分析力学. 北京: 北京理工大学出版社, 1991.
- [15] 梅凤翔. 非完整系统力学的历史与现状. 力学与实践, 1979, 1(4): 6-10.
- [16] 梅凤翔. 非完整系统力学基础. 北京: 北京工业学院出版社, 1985.
- [17] 梅凤翔. 非完整系统力学中的交换关系. 力学与实践, 1979, 1(3): 37-38.
- [18] 牛青萍. 经典力学基本微分原理与不完整力学组的运动方程. 力学学报, 1964, 7(2): 139-148.
- [19] 韦 扬, 梁立孚, 梁忠伟. 论约束的力学性质. 应用数学和力学, 1995, 16(11): 1017-1024.
- [20] 吴大猷. 古典动力学. 北京: 科学出版社, 1983.
- [21] 许志新. Chetaev 模型、Vakonomic 模型及扩张性拉氏函数模型. 力学学报, 2002, 34(增刊): 27-32.

- [22]张解放. Vacco 动力学的 Noether 理论. 应用数学和力学, 1993, 14(7): 635-641.
- [23]赵跃宇, 梅凤翔. 力学系统的对称性与不变量. 北京: 科学出版社, 2000.
- [24]赵跃宇. 力学的新型变分原理及其应用[硕士学位论文]. 北京: 北京工业学院, 1987.
- [25]赵跃宇. 力学的新型积分变分原理. 力学学报, 1989, 21(1): 101-106.
- [26]朱如曾. 非完整力学的第二类、第一类和中间类型的变分原理. 中国科学 A 辑, 1999, 29(1): 49-54.
- [27]自然科学学科发展战略调研报告: 力学. 北京: 科学出版社, 1997.
- [28]В. Н. Фрадли. Аналитическая динамика механических систем с нелинейными связями. Прикл. Механика АН УССР Т. 1. В. 7. 1965.
- [29]Ф. Г. 甘特马赫. 分析力学讲义(钟奉俄、薛西问译). 人民教育出版社, 1963.
- [30]Aldrovandi R., Pereira J. G. An Introduction to Geometrical Physics. Singapore: World Scientific, 1995.
- [31]Arnold V. I. Mathematical methods of Classical mechanics (2nd edition). New York: Springer-Verlag, 1978.
- [32]Arnold V. I., Kozlov V. V. and Neishtadt A. I. Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics (2nd edition). New York: Springer-Verlag, 1993.
- [33]Bahar. L. Y. A nonlinear nonholonomic formulation of the Appell-Hamel problem. *Int. J. Nonlinear Mech.*, 1998, 33(1): 67-83.
- [34]Bahar. L. Y. On a nonholonomic problem proposed by Greenwood. *Int. J. Nonlinear Mech.*, 1993, 28(2): 169-186.
- [35]Bailey C. D. Hamilton's principle and the calculus of Variations. *Acta Mech.*, 1983, 44(1): 49-57.
- [36]Capon R. S. Hamilton principle on relation to nonholonomic mechanical systems. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 1954, 5(4): 472-480.
- [37]Cardin F., Favretti M. On nonholonomic and vakonomic dynamics of mechanical systems with nonintegrable constraints. *J. Geom. Phys.*, 1996, 18(1): 295-325.
- [38]Chaplygin C. A. 非全定系统的动力学研究(张燮译). 北京: 科学出版社, 1956.
- [39]Dirac P. A. M. Generalized Hamiltonian dynamics. *Canad. J. Math.*, 1950, 2(2): 129-148.
- [40]Djukic Dj. S., Atanackovic T. M. An extremum variational principle for classical Hamilton Systems. *Acta Mech.*, 1984, 50: 163-175.
- [41]Duffin R. J. Pseudo-Hamiltonian Mechanics. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1962, 9(4): 309-318.

- [42]Edelen G. B. Lagrangian Mechanics of Nonconservative Nonholonomic Systems. New York: Noordhoff, 1977.
- [43]Fujimoto K., Sugie T. Stabilization of Hamiltonian systems with nonholonomic constraints based on time-varying generalized canonical transformations. *Systems and Control Letters*, 2001, 44: 309-319.
- [44]Ghori Q. K., Ahmed N. Principles of Lagrange and Jacobi for nonholonomic systems. *Int. J. Nonlinear Mech.*, 1999, 34(5): 823-829.
- [45]Goldstein H. Classical Mechanics (2nd edition). New York: Addison-Wesley Publishing Co., 1980.
- [46]Greenwood D. T. Classical Dynamics. Michigan: Prentice-Hall, 1978.
- [47]Hertz H. Die Prinzipien der Mechanik in Neuem Zusammenhange Dargestellt. Leipzig, 1894.
- [48]Holder. O. Ueber die prinzipien von Hamilton und maupertuis. *Nachrichtent von der Ges. der Wissenschaften zu Gottingen. Math. Phys. KI*, 1896, 2(S): 122-157.
- [49]Huston R. L., Passerello C. E. Nonholonomic systems with nonlinear constraint equations. *Int. J. Nonlinear Mech.*, 1976, 11(3): 331-336.
- [50]Huston R. L., Passerello C. E. 有非线性约束的非完整系统. 力学译丛, 1978, 2(2): 11-15.
- [51]J. 柯歇尔, 邹异明. 辛几何引论. 北京: 科学出版社, 1986.
- [52]Jeffreys J. What is Hamilton principle. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 1954, 7(3): 335-337.
- [53]Kane T. R. Dynamics of Nonholonomic Systems. *ASME J. Appl. Mech.*, 1961, 28(3): 574-578.
- [54]Kaplan D., Glass L. Understanding Nonlinear Dynamics. New York: Spring-Verlag, 1995.
- [55]Kilmister C. W. Hamilton Dynamics. London: Longmans, 1964.
- [56]Kozlov V. V. Realization of nonintegrable constraints in classical mechanics. *Sov. Phys. Dokl.* 1983, 28(9): 735-737.
- [57]Kozlov. V. V. Dynamics of systems with non-integrable constraints 1, 2, 3. *Mosc. Univ. Mech. Bull*, 1982, 37: 27-34, 74-80; 1983, 38: 40-51.
- [58]Kupka I., Oliva W. M. The nonholonomic mechanics. *J. Differential Equations*, 2001, 169(1): 169-189.
- [59]Leipholtz H. H. E. On the application of direct method to initial value problem. *Acta Mech.*, 1986, 58(3): 239-249.
- [60]Lewis A. D., Murray R. M. Variational principles for constrained systems: theory and

- experiment. *Int. J. Nonlinear Mech.*, 1995, 30(6): 793-815.
- [61]Liang L. F., Liang Zh. H., Shi Zh. F. The stationary value property of Hamilton's principle in nonholonomic systems. *Appl. Math. and Mech.*, 1997, 18(12): 1089-1096.
- [62]Liang L. F., Wei Y. On the unification of the Hamilton principles in nonholonomic system and in holonomic system. *Appl. Math. and Mech.*, 1996, 17(5): 457-463.
- [63]Lichtenberg A. J., Lieberman M. A. Regular and Stochastic Motion. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [64]Marsden J. E. and Rayiu T. S. Introduction to Mechanics and Symmetry. New York: Springer-Verlag, 1994.
- [65]Mei F. X. Form invariance of Lagrange system. *Journal of Beijing Institute of Technology*, 2000, 9(2): 120-124.
- [66]Mei F. X. Nonholonomic mechanics. *Appl. Mech. Rev.*, 2000, 53(11): 283-305.
- [67]Morando R., Pasquero S. Singular Lagrangians and the Appell-Hamel problem. *Acta Mech.*, 1993, 96(1): 55-66.
- [68]Nambu Y. Generalized Hamiltonian dynamics. *Phys. Rev. D*, 1973, 7(8): 2405-2411.
- [69]Noether E. Invariante Variationsprobleme. *Nachrichtent von der Ges. der Wissenschaften zu Gottingen. Math. Phys.*, 1918, K1: 235-257.
- [70]Oden J. T., Reddy J. N. Variational Methods in Theoretical Mechanics. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [71]Ostrovskaya S. and Angeles J. Nonholonomic systems revisited within the framework of analytical mechanics. *Appl. Mech. Rev.*, 1998, 51(7): 415-433.
- [72]Papastavridis J. G. A panoramic overview of the principles and equations of motion of advanced engineering dynamics. *Appl. Mech. Rev.*, 1998, 51(4): 239-265.
- [73]Papastavridis J. G. On energy rate theorems for linear first-order nonholonomic systems. *ASME J. Appl. Mech.*, 1991, 58(6): 536-544.
- [74]Papastavridis J. G. On the nonlinear Appell's equations and determination of generalized reaction forces. *Int. J. Engng. Sci.*, 1988, 26: 609-625.
- [75]Papastavridis J. G. Time-integral variational principles for nonlinear nonholonomic systems. *ASME J. Appl. Mech.*, 1997, 64(12): 985-991.
- [76]Papastavridis J. G., Chen G. The principle of least action in nonlinear and/or nonconservative oscillations. *J. of Sound and Vibration*, 1986, 109(2): 225-235.
- [77]Pars L. A. A Treatise on Analytical Dynamics. London: Heinemann, 1965.

- [78]Pars L. A. Variation principles in dynamics. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 1954, 7(3): 338-351.
- [79]Ray J. R. Erratum: nonholonomic constraints. *Am. J. Phys.*, 1966, 34(12): 1202-1203.
- [80]Ray J. R. Nonholonomic constraints. *Am. J. Phys.*, 1966, 34(4): 406-408.
- [81]Rosen A., Edelstein D. E. Investigation of a new formulation of the Lagrange method for constrained dynamic systems. *ASME J. Appl. Mech.*, 1997, 64(2): 116-122.
- [82]Rumyantsev V. V. Forms of Hamilton's principle for nonholonomic systems. *The scientific journal FACTA UNIVERSITY Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics*, 2000, 2(10): 1035-1048.
- [83]Rumyantsev V. V. On Hamilton's principle of nonholonomic systems. *J Appl. Math. and Mech.*, 1978, 42(3): 387-399.
- [84]Rumyantsev V. V. On integral principles of nonholonomic systems. *J. Appl. Math. and Mech.*, 1982, 46(1): 1-12.
- [85]Rumyantsev V. V. 关于非完整系统分析力学的某些问题 (梅凤翔译). *力学进展*, 1987, 17(2): 278-290.
- [86]Rumyantsev V. V. 欧拉和力学变分原理 (梅凤翔译). *力学进展*, 1993, 23(1): 86-104.
- [87]Saletan E. J., Cromer A. H. A variational principle for nonholonomic systems. *Am. J. Phys.*, 1970, 38: 892-897.
- [88]Santilli R. M. *Foundations of Theoretical Mechanics I*. New York: Springer-Verlag, 1978.
- [89]Santilli R. M. *Foundations of Theoretical Mechanics II*. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [90]Struwe M. *Variational Methods* (2nd edition). New York: Springer-Verlag, 1990.
- [91]Suslov G. K. On motion equations of nonholonomic systems. *Metematiceskij Sbornik*, 1901, 22(4):
- [92]Udwadia F. E. Equations of motion for mechanical systems: a unified approach. *Int. J. Nonlinear Mech.*, 1996, 31(6): 951-958.
- [93]Vujanovic B. A variational principle for non-conservative dynamical systems. *Z. Angew Math. Mech.*, 1975, 55(6): 321-331.
- [94]Weber R. M. Hamiltonian systems with constraints and their meaning in mechanics. *Arch. Rational Mech. Anal.* 1986, 91(4): 309-335.
- [95]Whittaker E. T. *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*. London: Cambridge University Press, 1904.
- [96]Xu Mingtao, Liu Chengqun. Analysis of nonlinearly constrained nonholonomic multibody

systems. *Int. J. Nonlinear Mech.*, 1990, 25(5): 511-519.

[97]Zampieri G. Nonholonomic versus vakonomic dynamics.*J. Differential Equations*, 2000, 163(2): 335-347.