

分类号: 0316

密级: _____

学校代码: 10414

学号: 2007010602



江西师范大学

硕士研究生学位论文

三阶拉格朗日方程两个形式的研究

**The Study of Three-Order Lagrangian Equations
in Two Different Forms**

沈艳菲

院所: 物理与通信电子学院

导师姓名: 马善钧

学科专业: 光学

研究方向: 拉格朗日方程

二〇一〇年五月

独 创 性 声 明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

学位论文作者签名： 签字日期： 年 月 日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解江西师范大学研究生院有关保留、使用学位论文的规定，有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权江西师范大学研究生院可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

（保密的学位论文在解密后适用本授权书）

学位论文作者签名： 导师签名：
签字日期： 年 月 日 签字日期： 年 月 日

摘 要

本文主要是讨论三阶 Lagrange 方程的两种形式,一种是含有耗散力的三阶 Lagrange。该方程主要是从非保守力学系统的三阶 Lagrange 方程出发,引入加速度能量,考虑含有耗散力的情况。在经过公式的推导,并融合耗散函数的概念,得出含有耗散力的三阶 Lagrange 方程。再举例说明,即考虑带电粒子在阻尼介质中做抛体运动,求物体的运动方程。对这个问题采用三阶 Lagrange 方程来求解,其所求得的结果与牛顿运动定律所得的结果是一致的,从而证明了它的实用性与优越性。另一种是含有非独立广义坐标的三阶 Lagrange 方程。此方程是从 N 个粒子系统中的三阶 Lagrange 方程出发,引入加速度能、力变率、广义坐标、虚位移等概念,考虑独立的广义坐标和非独立的广义坐标,在给出了位矢与广义坐标的函数关系后,得出了含有非独立广义坐标的三阶 Lagrange 方程的位矢表示。该方程的得出使我们可以求解含有约束的系统运动问题。这两种三阶 Lagrange 方程的导出有着重要的意义,一方面它丰富了三阶 Lagrange 方程的理论体系,另一方面也促进了今后三阶 Lagrange 方程的进一步的发展。

关键词: 分析力学; 约束; 力变率; 完整系统; 加速度能量; 广义坐标; Lagrange 方程; 耗散力; 三阶Lagrange方程

Abstract

In this paper , the two main forms of three-order Lagrangian equation have been discussed. One is the form of the three-order Lagrangian equation under the action of dissipative force. Starting from the Non-conservative mechanical system, introducing the concept of the energy of acceleration, and considering the action of the dissipative force, the three-order Lagrangian equation under the action of dissipative force is obtained. Using this equation, an example is given. Considering a projectile motion of a charged particles in damping medium, the solution of the motion can be obtained by three-order Lagrangian equations. And the solution is the same as the one obtained by Newton's laws of motion. It is easy to demonstrate the practicability and advantage of using three-order Lagrangian equations. The other three-order Lagrangian equations with surplus generalized coordinates is presented in this paper, which originates from the three-order Lagrangian equations of N-particle system. Introducing concept of "energy of acceleration, time rate of force change , generalized coordinates, and virtual displacement, considering the independent generalized coordinates and surplus generalized coordinates, the three-order Lagrangian equations with surplus generalized coordinates and its apparent form have been theoretically obtained. These equations can be used to solve the problem of motion with constraints. The two forms of three-order Lagrangian equations are very important. Not only they can make us solve the problem of motion easy, but also they can enrich the theory of the three-order Lagrangian equations and can promote the further development of Lagrange equations.

Key words: analytical mechanics; constraint; time rate of force change; complete system; energy of acceleration; generalized coordinates; Lagrange equation; dissipative force; three-order Lagrangian equation

目 录

摘 要.....	I
Abstract.....	II
第一章 引 言.....	1
第二章 基本知识.....	4
2.1 约束的概念和分类.....	4
2.2 完整系统和非完整系统.....	5
2.3 保守系统和非保守系统.....	5
2.4 广义坐标.....	6
2.5 虚功原理.....	6
2.5.1 实位移与虚位移.....	6
2.5.2 理想约束.....	7
2.5.3 虚功原理.....	7
2.6 Lagrange 乘子	8
第三章 三阶 Lagrange 方程的推导	10
3.1 Lagrange 方程的介绍	10
3.2 Lagrange 方程的特点及价值	13
3.2.1 方程的特点.....	13
3.2.2 方程的价值.....	13
3.3 三阶 Lagrange 方程的导出	14
3.3.1 三阶 Lagrange 方程概念的提出	14
3.3.2 三阶 Lagrange 方程的推导	14
3.4 三阶 Lagrange 方程与 Lagrange 方程的相容性	17
3.5 三阶 Lagrange 方程的应用	19
3.6 本文所做的工作.....	19
第四章 含有耗散力的三阶 Lagrange 方程	20
4.1 耗散函数的 Lagrange 方程推导	20
4.2 含耗散力的三阶 Lagrange 方程的推导	21
4.3 举例应用.....	23

第五章 含有非独立广义坐标的三阶 Lagrange 方程	25
5.1 含非独立坐标 Lagrange 方程	25
5.2 含有非独立坐标的三阶 Lagrange 方程的推导	26
5.3 含有非独立坐标的三阶 Lagrange 方程的显示表示	27
5.4 讨论.....	29
第六章 总结和对未来工作的展望.....	30
6.1 结论.....	30
6.2 未来工作展望.....	30
参考文献.....	31
致 谢.....	34
在读期间公开发表论文（著）及科研情况.....	35

第一章 引 言

1788 年，拉格朗日写了一本大型著作《分析力学》。在这一本著作中，完全用数学分析的方法来解决所有的力学问题，而无需籍助以往常用的几何方法，全书一张图也没有，在此基础上，逐步发展为一系列处理力学问题的新方法。我们知道牛顿力学是以牛顿定律和力的独立作用原理作为力学的基本原理，在通常的三维空间中广泛应用矢量方法处理力学问题的一种理论体系。应用这种理论体系来处理较为简单的力学问题，可以收到简明和直观的效果。但是这种理论体系并不是一种理想的表述形式。当系统由多个质点构成，并有多约束条件时，牛顿力学常常显得无能为力，所以，从整个物理学的高度看，这种表述形式具有相当的局限性。因此，自然地会促使人们探究力学的其他表述形式。力学就是沿着这条历史道路前进的。因而建立了一种新的表述形式。这种表述形式中，放弃了以牛顿定律作为力学的基本原理，而是把整个系统看作统一的对象，并用统一的方法加以研究，采用了整个物理学中所共有的基本物理量——能量和功——作为力学本身的基本物理量，并以此为根据，建立运动的基本方程。这种表述广泛采用广义坐标（及其共轭变量——广义动量）来描述系统的运动状态。力学的这种新的表述形式称为分析力学。分析力学既是数学、力学、物理学这三大学科的基础，又是许多新兴学科的生长点。分析力学不仅是研究现代科学与技术中多种复杂问题的精美工具，而且其运动规律的独特表达形式远远超出了经典力学的限制^[48-50]。分析力学所注重的不是力和加速度，而是具有更广泛意义的能量，同时又扩大了坐标的概念，因而使这种方法和结论便于运用到物理学的其他领域，它的理论与方法不仅在现代力学、物理学和数学中占有重要的位置，而且为工程学乃至高新技术的发展提供了强有力的理论支撑。200 余年来分析力学的理论与方法一直与时俱进。1834-1835 年，英国数学家、物理学家、力学家 W.R.Hamilton (1805-1865) 发表了两篇划时代的长论文——On a general method in dynamics (1834), Second essay on a general method in dynamics (1835)，提出了著名的 Hamilton 原理和正则方程。1894 年，德国物理学家、力学家 H.Hertz (1857-1894) 在其名著《力学原理》中首次将约束和力学系统分为完整和非完整两大类，这是分析力学发展史上的一个里程碑，开辟了非完整力学研究的新领域。1987 年，美国物理学家 R.M.Santilli 在大数学家 G.D.Birkhoff 工作的基础上给出“Birkhoff 力学”的提法；1992 年-1996 年，我国力学家梅凤翔 (1938-) 在此基础上，构建了一名新力学——

Birkhoff 系统动力学,使得完整约束系统、非完整约束系统和众多的非 Hamilton 系统都可以纳入这一新力学的理论体系框架。近 40 年来,由于微分几何的进步、流行上大范围分析的发展、对称性理论的渗透、数值计算方法的运用,促使分析力学的研究和发展发生了根本性的变化,把动力学理论推进到本质上的近代分析力学的新阶段。

中国对分析力学的研究起步较晚,新中国成立前,几乎无人问津分析力学的研究工作。1958 年,高等教育出版社出版了汪家詠撰写的我国第一本《分析动力学》著作,奠定了我国分析力学教学与科研的基础。半个世纪以来、特别是近 30 年来,我国在分析力学理论发展的完善化、数学方法的现代化、工程应用的专门化诸方面取得了令人瞩目的成就。最近 10 多年来,围绕着解决梅凤翔^[43-48]、陈滨^[39]提出的关于分析力学学科发展的 18 个重要问题(黄文虎、陈滨、王照林. 一般力学(动力学、振动与控制)最新进展. 科学出版社, 1994 年, 37-45),我国学者作了大量的、卓有成效的研究工作,无论是在经典分析力学的学科发展、还是在近代分析力学的几个重要方向上都取得了进步,提高了国际承认程度。而 Lagrange 方程即是分析力学的基础部分,在力学中有着最直接的应用。从虚位移原理可以得到受理想约束的质点系不含约束力的平衡方程,而动静法(即达朗贝尔原理)则将列写平衡方程的静力学方法应用于建立质点系的动力学方程,将这两者结合起来,便可得到不含约束力的质点系动力学方程,这就是动力学普遍方程。动力学普遍方程尽管被称之为方程,但在实际应用时,我们更应将它视为一个原理:动力学普遍原理,它指导我们列写动力学方程。Lagrange 方程则是动力学普遍方程在广义坐标下的具体表现形式。Lagrange 方程可以用来建立不含约束力的动力学方程,也可以用来在给定系统运动规律的情况下求解作用在系统上的主动力。如果想求约束力,可以将 Lagrange 方程与动静法或动量定理(或质心运动定理)联用。

通常,我们将牛顿定律及建立在此基础上的力学理论称为牛顿力学(也称为矢量力学),将 Lagrange 方程及建立在此基础上的理论称为 Lagrange 力学。且如果具有 n 个自由度的完整系统的运动微分方程有如下形式:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0 \quad (s=1,2,\dots,n)$$

则称系统为 Lagrange 系统, q_s 为系统的广义坐标, $\dot{q}_s$ 为广义速度; 方程可

简写为：

$$E_s(L)=0$$

其中：

$$E_s = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial}{\partial q_s}$$

为 Euler 算子。

Lagrange 力学通过位形空间描述力学系统的运动，它适合于研究受约束质点系的运动。Lagrange 力学在解决微幅振动问题和刚体动力学的一些问题的过程中起了重要的作用。

一般而言，如果要建立系统在特殊位置的动力学关系，可以考虑应用动力学普遍方程。如果要建立系统在任意一般位置的动力学关系，则应考虑应用 **Lagrange** 方程。

第二章 基本知识

2.1 约束的概念和分类

一群质点的集合，如果其中有相互作用，以致其中每一质点的运动，都和其它质点的位置和运动有关，则这种集合体，叫做力学体系，或简称为体系（即质点组）^[22-28]。如 n 为力学体系中质点的数目，则因任一质点 P_i 的位置，决定于它的三个坐标 x_i ， y_i 和 z_i ，所以我们要确切知道整个力学体系的位置（位形），就应知道体系中所有质点的坐标。这些坐标的数目，一共是 $3n$ 个。实际上，在一个力学体系中，常存在着一些限制各质点自由运动的条件，我们把这些条件叫做约束，因此， $3n$ 个坐标并不互相独立，而是有一些关系把它们联系着。约束对各质点位置限制的条件通常可以表为力学体系中质点的坐标、速度和时间的方程。如果 n 个质点所形成的力学体系中受有 k 个限制其位置的约束，那就有 k 个表示这种约束的方程，因此 $3n$ 个坐标中就只有 $3n-k$ 个是独立的。譬如一个质点原有 3 个独立的坐标，如果受有曲面

$$f(x, y, z) = 0 \quad (2-1)$$

的约束，那么独立坐标的数目就减为两个。因为已知 x 、 y 和 t 的关系，则 z 和 t 的关系，就可由式（2-1）求出。

如果限制系统位置的约束不是时间 t 的函数，则约束方程中不显含时间 t ，如式（2-1）所表示的那样，这种约束叫做稳定约束。反之，如果约束是时间 t 的函数，则约束方程就将显含时间 t ，例如方程

$$f(x, y, z, t) = 0 \quad (2-2)$$

那么这种约束就称为不稳定约束。

约束又可分为可解的与不可解的。质点始终不能脱离的那种约束，叫做不可解约束。如果质点虽然被约束在某一曲面上，但在某一方向可以脱离，那种约束就叫做可解约束。不可解约束以等式表示，而可解约束则同时以等式和不等式来表示。

约束也可分为几何约束和运动约束。几何约束又叫完整约束，它只限制质点

在空间的位置，因而表现为质点坐标的函数，例如

$$f(x, y, z) = 0 \text{ 或 } f(x, y, z, t) = 0 \quad (2-3)$$

就都是几何约束，至于运动约束，则除了限制质点的坐标外，还要限制质点速度的投影，例如

$$f(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) = 0 \quad (2-4)$$

这就是运动约束。运动约束又叫微分约束，微分约束有时经过积分后可变为几何约束。倘若它还不能积分时，就被称为不完整约束。

2.2 完整系统和非完整系统

如果一个系统有 m 个约束方程，它可能是可积的，也可能是不可积的。如果这 m 个约束方程是完全可积的，也就是，可以通过积分方法从它们导出 m 个如下有限形式的方程：

$$f_\alpha(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n; t) = c_\alpha \quad (2-5)$$

其中常数 c_α 由系统在任一时刻的实际位置确定，这时，我们把相应的系统称为完整系统，反之，称为非完整系统。相应地，如果一个约束方程的形式如 (2-5)，或者能化成 (2-5) 这种形式的，称为完整约束方程，反之，称为非完整约束方程。所以，如果系统至少含有一个无法消去的非完整约束方程，则此系统就是非完整系统。

2.3 保守系统和非保守系统

机械能守恒的力学系统。如果质点在空间内任何位置都受到确定的力的作用，而这力的大小和方向单一地决定于质点的位置，则这种力称为场力。如果作用于质点的场力所作的功只同质点的起始和终了位置有关，而同质点运动的路径无关，则质点所受的场力称为有势力或保守力。重力、万有引力、弹性力、静电学中的引力和斥力等都是保守力；摩擦力、流体粘滞力等都是非保守力。在保守力和定常约束作用下的力学系统称为保守系统，即保守系统是指相空间相体积保持不变的系统。在保守力和非定常约束作用下的力学系统，以及在保守力和非保守力作用下的力学系统称为非保守系统。

2.4 广义坐标

在经典力学的研究对象从自由转向约束质点系统的发展过程中，关键的一步是采用了广义坐标，使得在直角坐标下的约束质点系统在广义坐标下又成为“自由”的了。因此，广义坐标成为分析力学的重要特征之一。

对于 n 个质点所形成的力学体系，如果有 k 个几何约束

$$f_{\alpha}(x, y, z, t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k) \quad (2-6)$$

那么独立坐标就减少为 $3n - k$ 个。这些独立坐标，也就是力学体系的坐标。在力学体系只受有几何约束的情形下，这些独立坐标的数目叫做力学体系的自由度。如果系统不受约束，则该系统称为自由系统，其运动称为自由运动，否则就分别称为约束系统和约束运动但对微分约束来讲，自由度的数目则可能小于独立坐标的数目。

既然只有 $3n - k$ 个坐标是独立的，如果我们令 $3n - k = s$ ，那么我们就可通过式 (2-6)，把 $3n$ 个不独立的坐标用 s 个独立参数 $q_1, q_2, \dots, q_s$ 及 t 表出，即

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n, s < 3n) \quad (2-7)$$

或

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n, s < 3n) \quad (2-8)$$

式中 $q_1, q_2, \dots, q_s$ 叫做 Lagrange 广义坐标，它不一定是长度，可以是角度或其他物理量。几何约束的情况下，广义坐标的数目和自由度的数目相等，此 s 个广义坐标，就足以规定力学体系的位置。

2.5 虚功原理

2.5.1 实位移与虚位移

实位移和虚位移是分析力学的重要概念。设质点按规律

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t) \quad (2-9)$$

运动，那么在无限短的时间 dt 内，质点的位移为 $d\vec{r}(dx, dy, dz)$ ，而且 $d\vec{r} = \dot{\vec{r}}dt$ ，或 $dx = \dot{x}dt$ ， $dy = \dot{y}dt$ ， $dz = \dot{z}dt$ 。在这种情形下，质点的位矢 $\vec{r}$ 或坐标 (x, y, z) 由于参数 t 改变 dt 而发生变化。如 $dt=0$ ，即时间没有变化，则 $d\vec{r}=0$ ，或 $dx=dy=dz=0$ 。质点由于运动实际上所发生的位移，叫做实位移，并以 $d\vec{r}$ 表示。

想象某一时刻 t ，质点 P 在约束所许可的情况下，发生了一个无限小的变更。这一变更，不是由于质点的运动而实际发生的，而只是想象中可能发生的位移，它只决定于质点在此时刻的位置和加在它上面的约束，而不是由于时间的改变所引起的。这种位移叫做虚位移，并以 $\delta\vec{r}$ 表示。由于时间 t 没有改变，故 $\delta t=0$ 。

2.5.2 理想约束

作用在质点上的力（包括约束反力）在任意虚位移 $\delta\vec{r}$ 中所作的功，叫做虚功。如果作用在一力学体系上诸约束反力在任意虚位移 $\delta\vec{r}$ 中所作的虚功之和为零，即

$$\sum_{i=1}^n \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad (2-10)$$

那么这种约束叫做理想约束。光滑面、光滑曲线、光滑铰链、刚性杆、不可伸长的绳等都是理想约束，引入虚位移的目的，就是在于利用式（2-10）来消除这些约束反力。

2.5.3 虚功原理

以下只讨论不可解约束的情况。设受有 k 个几何约束的某力学体系处于平衡状态。取体系中任一质点 P_i ，并设作用在此质点上主动力的合力为 $\vec{F}_i$ ，约束反力的合力为 $\vec{R}_i$ ，则因在此体系中每一质点都必须处于平衡状态中，故此时必有

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2-11)$$

现在让每一质点自它的平衡位置发生一虚位移 $\delta\vec{r}$ ，则由式（2-11），得

$$\vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i + \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2-12)$$

把式（2-12）中各等式相加，就得到

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (2-13)$$

但如为理想约束，则根据式（2-10）， $\sum_{i=1}^n \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$ ，因此，如果这样的力学体系处于平衡状态，则其平衡条件是

$$\delta \vec{W} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (2-14)$$

或

$$\delta \vec{W} = \sum_{i=1}^n (F_{ix} \delta x_i + F_{iy} \delta y_i + F_{iz} \delta z_i) = 0 \quad (2-15)$$

反之，也可证明，如果平衡位置是约束所允许的位置，则当（2-14）式对任意 $\delta \vec{r}$ 都成立时，系统在该位置必保持平衡。由此可知，受有理想约束的力学体系平衡的充要条件是此力学体系的诸主动力在任意虚位移中所作的元功之和等于零。这个关系是 1717 年伯努利首先发现的，叫做虚功原理，也叫虚位移原理。利用虚功原理解理想约束的力学体系的平衡问题时，由于约束反力自动消去，故可以很简单地用它去求主动力在平衡时所应满足的条件，即所谓平衡条件，这是它很大的一个优点。但从另一方面来看，也有它的缺点，因为无法用它来求出约束反力。

2.6 Lagrange 乘子

基本的 Lagrange 乘子法（又称为 Lagrange 乘数法），就是求函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在 $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ 的约束条件下的极值的方法^[24]。其主要思想是引入一个新的参数 λ （即 Lagrange 乘子），将约束条件函数与原函数联系在一起，使能配成与变量数量相等的等式方程，从而求出得到原函数极值的各个变量的解。

具体方法：

假设需要求极值的目标函数（objective function）为 $f(x, y)$ ，限制条件为 $\varphi(x, y) = M$

设：

$$g(x, y) = M - \varphi(x, y) \quad (2-16)$$

定义一个新函数：

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) \quad (2-17)$$

则用偏导数方法列出方程：

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= 0 \end{aligned} \quad (2-18)$$

求出 x, y, λ 的值，代入即可得到目标函数的极值。

扩展为多个变量的式子为：

$$F(x_1, x_2, \dots, \lambda) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda g(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2-19)$$

则求极值点的方程为：

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \quad (x_i \text{ 即为 } x_1, x_2, \dots \text{ 等自变量}) \quad (2-20)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (2-21)$$

我们可以将这种把约束条件乘以 λ （即不定乘子）后加到待求函数上的求极值方法推广到变分极值问题及其它极值问题当中，理论力学当中对非完整约束的处理方法就是利用变分法当中的 Lagrange 乘子法。

第三章 三阶 Lagrange 方程的推导

3.1 Lagrange 方程的介绍

约瑟夫·路易斯·拉格朗日 (Joseph-Louis Lagrange), 法国数学家、物理学家。1736 年 1 月 25 日生于意大利都灵, 1813 年 4 月 10 日卒于巴黎。他在数学、力学和天文学学科领域中都有历史性贡献, 其中尤以数学方面的成绩最为突出。Lagrange 也是分析力学的创立者。Lagrange 在其名著《分析力学》中, 在总结历史上各种力学基本原理的基础上, 发展达朗贝尔、欧拉等人研究成果, 引入了势和等势面的概念, 进一步把数学分析应用于质点和刚体力学。他提出了运用于静力学和动力学的普遍方程, 引进广义坐标的概念, 建立了 Lagrange 方程。并把力学体系的运动方程从以力为基本概念 of 牛顿形式, 改变为以能量为基本概念的分析力学形式, 奠定了分析力学的基础, 为把力学理论推广应用到物理学其他领域开辟了道路。

由 n 个质点所形成的力学体系的动力学方程, 根据牛顿运动定律的表达式可写为

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \bar{\mathbf{F}}_i + \bar{\mathbf{R}}_i \quad (i=1,2,\dots,n)$$

或

$$-m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \bar{\mathbf{F}}_i + \bar{\mathbf{R}}_i = 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (3-1)$$

这个方程和上式在数学上虽然只是移项手续的不同, 但在物理意义上却很有意义。式 (3-1) 是一个力学体系的平衡方程, 代表主动力 $\bar{\mathbf{F}}_i$ 、约束反力 $\bar{\mathbf{R}}_i$ 和质点因有加速度而产生的有效力 (惯性力) 的平衡。通过这种办法就可把动力学问题化为静力学问题来处理。(3-1) 式反映的这种平衡关系, 通常叫做达朗伯原理。若用虚位移 $\delta \mathbf{r}_i$ 标乘式 (3-1), 并对 i 求和, 在理想约束的条件下, 则得:

$$\sum_{i=1}^n (\bar{\mathbf{F}}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (3-2)$$

这是力学体系的静止条件式 (3-1) 相应的虚功原理。即达朗伯原理和虚功原理的结合, 有时又称为达朗伯-拉格朗日方程。

方程从形式上将动力学方程转化为平衡方程——达朗伯原理。达朗伯原理是力学的基本原理。但是，达朗伯原理的形式非常简洁，不便于直接用来解决具体问题，因此，我们现在就完整系统的情形把这原理转化成便于应用的形式，即 Lagrange 方程。完整系统用于广义坐标表示的动力方程，是 Lagrange 首先导出的。

设 $q_1, q_2, \dots, q_k$ 是完整系统的广义坐标， $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q, t)$ 是质点系统中第 i 质点在惯性系中的位矢 $\vec{r}_i$ 与广义坐标 q 和时间 t 之间的关系，由分析可知，对任意 δq 来说，

$\sum (\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}) \delta q_\alpha = \delta \vec{r}_i$ 都是系统的虚位移，于是，达朗伯原理可以写成：

$$\sum_{\alpha=1}^k (\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} - \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}) \delta q_\alpha = 0 \quad (3-3)$$

因为：

$$\begin{aligned} d\vec{r}_i &= \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt \\ &= \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (3-4)$$

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad (3-5)$$

$\vec{r}_i$ 是 $q_1, q_2, \dots, q_k$ 及时间 t 的函数，而 $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}$ ($\alpha=1, 2, \dots, k$) 一般也仍然是 $q_1, q_2, \dots, q_k$ 及 t

的函数，除非这些独立变数在 $\vec{r}_i$ 中都是线性的。因此， $\dot{\vec{r}}_i$ 在一般情况下，是

$q_1, q_2, \dots, q_k$ ； $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k$ 及 t 的函数。同时， $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$ 和每个 $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}$ 都不是 $\dot{q}_\alpha$ 的函数，且因

为 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k$ 也是相互独立的，这样可得：

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left(\sum_{\beta=1}^k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \quad (3-6)$$

又因为：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) = \sum_{\beta=1}^k \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_\alpha}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left(\sum_{\beta=1}^k \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right) \\
&= \frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left(\frac{d\bar{r}_i}{dt} \right)
\end{aligned} \tag{3-7}$$

所以可以把 (1.1-3) 式中第一个和式写成:

$$\begin{aligned}
P_\alpha &= \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\bar{r}}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \left(\dot{\bar{r}}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) - \sum_{i=1}^n m_i \left(\dot{\bar{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) \\
&= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \dot{\bar{r}}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \sum_{i=1}^n m_i \dot{\bar{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \\
&= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}
\end{aligned} \tag{3-8}$$

其中 $T = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\bar{r}}_i^2$ 是系统的动能, 并理解为通过变换方程 $\bar{r}_i = \bar{r}_i(q, t)$ 表示成了 q 、 $\dot{q}$ 和 t 的函数。广义力 $\bar{Q}_\alpha$:

$$\bar{Q}_\alpha = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_\alpha} \tag{3-9}$$

$\bar{Q}_\alpha$ 理解为通过变换方程 $\bar{r}_i = \bar{r}_i(q, t)$ 表示成的 q 、 $\dot{q}$ 和 t 的函数, 于是达朗伯原理的形式变为:

$$\sum_{\alpha=1}^k \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - \bar{Q}_\alpha \right] \tag{3-10}$$

因为是完整系统, 所以各 δq_α 可以彼此独立地任意变化, 于是, 各 δq_α 的系数应该分别等于零:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \bar{Q}_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k) \tag{3-11}$$

在完整系统情况, 上式方程与达朗伯原理等价, 也可以说是达朗伯原理的广义坐标表示, 用广义坐标代换直角坐标, 使之有更大的普遍性和概括性。该方程称为第二类 Lagrange 方程, 也常简称为 Lagrange 方程。从 Lagrange 方程的推导过程看, 这组方程对广义坐标的变换来说是不变式。Lagrange 方程实际上是关于 k 个广义坐标 (作为时间 t 的未知函数) 的, 由 k 个二阶微分方程所构成的常微分方程组。此组方程的好处是, 只要知道一力学体系用广义坐标 $q_1, q_2, \dots, q_k$ 所表示

出来的动能 T ，及作用在此力学体系上的力 $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \dots, \bar{Q}_k$ ，（也是用 q_α 及 t 表出的），就可写出这力学体系的动力学方程。 $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}$ 叫做广义动力，可微线动量亦可为角动量等， $\dot{q}_\alpha$ 叫广义速度（线速度，角速度或其它）。因为动量对时间的微商等于力，故 $\bar{Q}_\alpha$ 叫做广义力。这对列方程和对方程本身的讨论来说，无疑是一个很大的优点。Lagrange 方程中不含未知的约束力。对于给定的系统和已知的主动力（主动力是坐标、速度和时间的已知函数）来说，Lagrange 方程中的动能 T 和广义力 $\bar{Q}_\alpha$ 是广义坐标 q 、广义速度 $\dot{q}$ 以及时间 t 的已知函数。

3.2 Lagrange 方程的特点及价值

3.2.1 方程的特点

1. 是一个二阶微分方程组，方程个数与体系的自由度相同。形式简洁、结构紧凑。而且无论选取什么参数作广义坐标，方程形式不变。
2. 方程中不出现约束反力，因而在建立体系的方程时，只需分析已知的主动力，不必考虑未知的约束反力。体系越复杂，约束条件越多，自由度越少，方程个数也越少，问题也就越简单。
3. 拉氏方程是从能量的角度来描述动力学规律的，能量是整个物理学的基本物理量而且是标量，因此拉氏方程为把力学规律推广到其他物理学领域开辟了可能性，成为力学与其他物理学分支相联系的桥梁。

3.2.2 方程的价值

拉氏方程在理论上、方法上、形式上和应用上用高度统一的规律，描述了力学系统的动力学规律，为解决体系的动力学问题提供了统一的程序化的方法，不仅在力学范畴有重要的理论意义和实用价值，而且为研究近代物理学提供了必要的物理思想和数学技巧。

3.3 三阶 Lagrange 方程的导出

3.3.1 三阶 Lagrange 方程概念的提出

物理学中描述各类运动的运动方程，基本上都是二阶微分方程。最常见的就是在研究机械运动时，引进了位矢、位矢的一阶时间导数和二阶时间导数。通过对大量实验事实的总结归纳，得到了牛顿运动定律。应用牛顿定律得到的描述物体运动的微分方程就是时间的二阶微分运动方程。对牛顿运动方程，如果已知的不是物体所受的外力，而是物体所受外力随时间的变化率，此时就不能单纯根据牛顿运动方程解得物体的运动轨迹。换言之，我们不能在仅知道力随时间的变化率的情况下，用对时间的二阶微分方程加初始条件来求解物体的运动状态。另一方面，现实世界中各种动力学问题都是属于变力问题，有时只能知道力随时间的变化率（即力变率）。因此，找到一种利用力变率来求解物体运动状态方程的方法就显得尤为重要。

人们在研究力变率及含有位矢的三阶时间导数的运动方程中，已做了一些工作。Schot 介绍了加速度的时间变化率（即急动度）的概念。Zhu 从数学上探讨了质点作为空间曲线运动时的加速度、急动度的一般表示形式。Tan 等人则具体给出了急动度在各种坐标系中的表示，并在一些具体的实例中讨论了它的应用及意义。Mei 等人给出了完整系统关于广义速度的 Lagrange 方程。Wu 则利用与牛顿力学的类比，得到了猝量方程。Huang 等人讨论了猝量方程和加速度能定理的一些具体应用问题。所有这些都表明，研究力变率及加速度随时间的变化率的问题以及它们所满足的方程，具有一定的现实意义。虽然人们也曾在“广义经典力学”的意义上得到过含广义加速度的 Euler-Lagrange 方程，但本质上仍然只是关于广义力的二阶微分方程，未能描述力（或加速度）随时间变化的细节。而完整系统关于广义加速度的 Lagrange 方程是关于广义力变率的三阶微分方程，是描述力（或加速度）随时间变化细节的方程。

3.3.2 三阶 Lagrange 方程的推导

考虑一个由 n 个质点组成的体系，对第 i 个质点的牛顿运动方程等号两边同时对时间求一阶导数，可得：

$$\left(\dot{\vec{F}}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i\right) = 0 \quad (3-12)$$

式中 $\dot{\vec{F}}_i$ 为质点 i 受到的合外力（包含约束力）对时间的一阶导数。用每一个质点的虚位移 $\delta \vec{r}_i$ 标乘（3-12）式，并对 i 求和，有

$$\sum_i \left(\dot{\vec{F}}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i\right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (3-13)$$

引入 s 个广义坐标 q_α ($\alpha=1,2,\dots,s$)，则

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_\alpha, t), \quad \delta \vec{r}_i = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \quad (3-14)$$

（3-14）式代入（3-13）式，可得：

$$-\sum_i \sum_\alpha m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} + \sum_i \sum_\alpha \dot{\vec{F}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (3-15)$$

式中等号左边第一项可通过以下方式进行化简：

$$P_\alpha = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \left[\sum_i m_i \left(\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) \right] - \sum_i m_i \left(\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) \quad (3-16)$$

由（3-14）式中 $\vec{r}_i$ 的表示形式，可求得：

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad (3-17)$$

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_\beta \sum_\alpha \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + \sum_\alpha \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \ddot{q}_\alpha + \sum_\beta \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_\beta \partial t} \dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t^2} \quad (3-18)$$

由（3-17），（3-18）式可得：

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{\partial \ddot{\vec{r}}_i}{\partial \ddot{q}_\alpha} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \quad (3-19)$$

将（3-19）式代入（3-16）式，得：

$$P_\alpha = \frac{d}{dt} \left[\sum_i m_i \left(\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \right] - \sum_i m_i \left(\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \quad (3-20)$$

继续将（3-20）式等号右边第二项化简，有：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = \sum_\beta \frac{\partial}{\partial q_\beta} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \dot{q}_\beta + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left[\sum_\beta \frac{\partial}{\partial q_\beta} \left(\sum_\gamma \frac{\partial}{\partial q_\gamma} \dot{q}_\gamma + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right) \right] \dot{q}_\beta + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_\gamma \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_\gamma} \dot{q}_\gamma + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left[\sum_\beta \frac{\partial}{\partial q_\beta} \left(\sum_\gamma \frac{\partial}{\partial q_\gamma} \dot{q}_\gamma \right) \right] \dot{q}_\beta + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_\gamma \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_\gamma} \dot{q}_\gamma + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left[\frac{1}{2} \sum_\beta \frac{\partial}{\partial q_\beta} \left(\sum_\gamma \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_\gamma} \dot{q}_\gamma \right) \right] \dot{q}_\beta + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_\gamma \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_\gamma} \dot{q}_\gamma \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \sum_\gamma \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_\gamma} \dot{q}_\gamma + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left[\sum_\beta \frac{\partial}{\partial q_\beta} \left(\sum_\gamma \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_\gamma} \dot{q}_\gamma \right) \right] \dot{q}_\beta + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left(\sum_\gamma \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_\gamma} \dot{q}_\gamma \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_\gamma \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_\gamma} \dot{q}_\gamma + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left[\sum_\beta \frac{\partial}{\partial q_\beta} \left(\sum_\gamma \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_\gamma} \dot{q}_\gamma \right) \right] \dot{q}_\beta + \sum_\beta \frac{\partial}{\partial q_\beta} \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right) \dot{q}_\beta + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left(\sum_\gamma \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_\gamma} \dot{q}_\gamma + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left[\sum_\beta \frac{\partial}{\partial q_\beta} \left(\sum_\gamma \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_\gamma} \dot{q}_\gamma + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right) \right] \dot{q}_\beta + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left(\sum_\gamma \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_\gamma} \dot{q}_\gamma + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left[\sum_\beta \frac{\partial}{\partial q_\beta} (\dot{\bar{r}}_i) \dot{q}_\beta + \frac{\partial}{\partial t} (\dot{\bar{r}}_i) \right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} (\ddot{\bar{r}}_i)
\end{aligned} \tag{3-21}$$

将 (3-21) 代入 (3-20) 式, 可得:

$$P_\alpha = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left(\frac{1}{2} \sum_i m_i \ddot{\bar{r}}_i^2 \right) \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left(\frac{1}{2} \sum_i m_i \ddot{\bar{r}}_i^2 \right) \tag{3-22}$$

令 :

$$S = \frac{1}{2} \sum_i m_i \ddot{\bar{r}}_i^2$$

为系统的加速度能量, 将 (3-22) 式代入 (3-15) 式, 有:

$$\sum_\alpha \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_\alpha} + \sum_i \dot{\bar{F}}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_\alpha} \right] \delta q_\alpha = 0 \tag{3-23}$$

又令:

$$Q_\alpha^* = \sum_i \dot{\bar{F}}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_\alpha} ,$$

对于完整系统, $q_1, \dots, q_s$ 相互独立, 由 (3-23) 式最后可得:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_\alpha} = Q_\alpha^* \quad (\alpha=1,2,\dots,s) \quad (3-24)$$

(3-24) 就是描述物体变加速度运动的三阶微分方程，方程中包含了力变率 $\dot{\bar{F}}_i$ 。它在形式上与分析力学中的 Lagrange 方程很相似，所以称为三阶 Lagrange 方程。它使我们在处理物体运动时，特别是在已知力变率 $\dot{\bar{F}}_i$ 时，又多了一种得到运动方程的方法。

3.4 三阶 Lagrange 方程与 Lagrange 方程的相容性

我们由上述方法推导出的三阶 Lagrange 方程与分析力学中的 Lagrange 方程应该是相容的，即用 (3-24) 式和分析力学中的 Lagrange 方程处理同一力学问题，得到的运动方程应该可以经过适当的数学运算，化为相同的描述该力学问题的运动方程。否则 (3-24) 式就是不正确的。事实上，将利用 Lagrange 方程得到的运动方程等号两边同时对时间 t 求一阶导数，即可得到与用三阶 Lagrange 方程得到的相同的运动方程，对此将给出证明。

分析力学中 Lagrange 方程为：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \bar{Q}_\alpha$$

又因为：

$$T = \sum m_i \dot{\bar{r}}_i^2 / 2$$

$$\bar{Q}_\alpha = \sum \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_\alpha} \quad (3-25)$$

由 (3-17) 式的结果，可得：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) = \sum_i m_i \left[\left(\sum_\beta \sum_\alpha \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + \sum_\alpha \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_\alpha} \ddot{q}_\alpha + 2 \sum_\beta \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_\beta \partial t} \dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial t^2} \right) \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \right]$$

$$+ \left(\sum_\alpha \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right) \times \left(\sum_\beta \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial t \partial t} \right)$$

$$(3-26)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \sum_i m_i \left(\sum_\alpha \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right) \times \left(\sum_\beta \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial t \partial q_\alpha} \right) \quad (3-27)$$

将 (3-26), (3-27) 式代入 (3-25) 式, 等号两边对时间 t 求一阶导数, 得:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\sum_i m_i \left(\sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + \sum_\alpha \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_\alpha} \ddot{q}_\alpha + 2 \sum_\beta \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_\beta \partial t} \dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial t^2} \right) \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_\alpha} \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_i \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) \end{aligned} \quad (3-28)$$

式中已考虑了 (3-19) 式的结果。另一方面, 由 S 的定义和 (3-19) 式的结果, 可得:

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_i m_i \left(\sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + \sum_\alpha \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_\alpha} \ddot{q}_\alpha + 2 \sum_\beta \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_\beta \partial t} \dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial t^2} \right) \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_\alpha} \quad (3-29)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_i m_i \ddot{\bar{r}}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_i m_i \ddot{\bar{r}}_i \cdot \left(2 \sum_\beta \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \dot{q}_\beta + 2 \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial t \partial q_\alpha} \right) \quad (3-30)$$

将 (3-29) 代入 (3-24) 式, 并与 (3-28) 式比较, 可知当

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_i \left[\dot{\bar{F}}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) \right] \quad (3-31)$$

成立时, Lagrange 方程 (3-25) 对时间 t 求一阶导数, 就得到三阶 Lagrange 方程。

对 (3-31) 式化简后, 得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_\alpha} &= \sum_i \dot{\bar{F}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) = \sum_i 2 \bar{F}_i \cdot \left(\sum_\beta \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial t \partial q_\alpha} \right) \\ &= \sum_i 2 m_i \ddot{\bar{r}}_i \cdot \left(\sum_\beta \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_\alpha \partial t} \right) \end{aligned} \quad (3-32)$$

式中已利用了 $\bar{F} = \sum_i m_i \ddot{\bar{r}}_i$ 的结论。此式与 (3-30) 式的结果相同, 由此可知 (3-25)

式等号两边对时间 t 求一阶导数, 即可得到三阶 Lagrange 方程 (3-24)。这就普遍性地证明了三阶 Lagrange 方程与分析力学中的 Lagrange 方程是相容的, 所以三阶 Lagrange 方程也可以应用于分析力学中, 解决问题。

3.5 三阶 Lagrange 方程的应用

三阶 Lagrange 方程和 Lagrange 方程都可以用来描述物体的运动规律，但它们的出发点不同。当已知物体受力的力变率，利用三阶 Lagrange 方程来求物体的运动方程就较为方便。相反，当已知物体的受力情况，利用 Lagrange 方程求物体的运动方程就容易一些。因此，三阶 Lagrange 方程是对 Lagrange 方程的补充。

3.6 本文所做的工作

本文是在已有的三阶 Lagrange 方程的基础上，考虑在力学系统里在耗散力的作用下的三阶 Lagrange 方程，并加以举例应用，说明用三阶 Lagrange 方程解决问题的优越性；另考虑含有非独立广义坐标的三阶 Lagrange 情况，在给出了位矢和广义坐标的函数关系后，得到了三阶 Lagrange 方程的位矢表示。从而得出三阶 Lagrange 方程的另外两种形式，丰富了三阶 Lagrange 方程的理论体系。

第四章 含有耗散力的三阶 Lagrange 方程

在力学运动研究领域，新的动力学理论的创立和发展变得越来越重要。在实际的力学问题中，力学系统的运动和受力往往较为复杂。当我们不知道力学系统所受力随时间的变化规律，我们可能知道的是力随时间的变化率（力变率），这时通过牛顿运动定律来解出物体的运动轨迹，就会较为麻烦。换言之，当知道力变率时，我们利用二阶运动微分方程求解物体的运动状态就显得较为困难。为了更加容易的解决此问题，引进了三阶 Lagrange 方程^[1-2]和急动度方程^[13]，它们包括了坐标对时间的三阶导数。

近年来，有关变加速动力学和三阶 Lagrange 方程的研究工作做了很多^[29-37]。Linz^[14-15]研究了非线性动力模型、猝变运动、以及牛顿猝变动力学的一些基本特征。Gottlieb^[17-18]研究了简单非线性急动度方程的周期解和它的谐振平衡近似。黄沛天^[19-21]研究了变加速运动的基本理论和应用问题，以及有关变加速问题的急动度方程和力变率问题。马善钧^[2-8, 19-21]和杨学慧^[8]研究了三阶 Lagrange 方程和不同条件下的三阶 Lagrange 方程、三阶 Lagrange 方程的对称性和守恒量、以及三阶变 Hamilton 正则方程。

本章给出了存在耗散力情况下的三阶 lagrange 方程的形式，通过实例得到了阻尼运动方程的解。比较求解过程，可知运用三阶 lagrange 方程求解，较为方便。

4.1 耗散函数的 Lagrange 方程推导

考虑系统的每个质点上有与速度相关的阻力：

$$\dot{\vec{F}}_i = -k_i f_i(v_i) \frac{\vec{v}_i}{v_i} \quad (4-1)$$

其中 v_i 为点的速度的大小， k_i 是点的坐标和时间的正函数：

$$k_i = k_i(x_j, y_j, z_j, t) > 0 \quad (4-2)$$

f_i 满足：

$$f_i(v_i))0$$

与式 1 相应的广义力为：

$$\begin{aligned}\dot{\bar{Q}}_s &= -\sum_{i=1} k_i f_i(v_i) \frac{\bar{v}_i}{v_i} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} = -\sum_{i=1} k_i f_i(v_i) \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_s} \\ &= -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \sum_{i=1} k_i \int_0^{v_i} f_i(u) du\end{aligned}\quad (4-3)$$

其中，函数：

$$\phi = \sum_{i=1}^n k_i \int_0^{v_i} f_i(u) du \quad (4-4)$$

称为 Π_{ypbe} 耗散函数。

系统所受阻力的广义力用 Π_{ypbe} 函数表示为：

$$\dot{\bar{Q}}_s = -\frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}_s}, \quad (s=1,2,\dots,n) \quad (4-5)$$

如果广义力分成有势的 $\ddot{\bar{Q}}_s$ 和与阻力对应的广义力 $\dot{\bar{Q}}_s$ ，则 Lagrange 方程写成：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = -\frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}_s}, \quad (s=1,2,\dots,n) \quad (4-6)$$

式中：

$$L = T - V, \quad V = V(t, q, \dot{q}), \quad \ddot{\bar{Q}}_s = -\frac{\partial V}{\partial q_s}$$

T 为系统的动能， V 为系统的势能

4.2 含耗散力的三阶 Lagrange 方程的推导

我们知道非保守力学系统的三阶 Lagrange 方程为：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha^* (\alpha = 1, 2, \dots, n) \quad (4-7)$$

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i, \quad Q_\alpha^* = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{F}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha},$$

式中 S 为加速度能量。

研究含有耗散力的 N 个质点组成的力学系统，设第 i 个质点的位矢为 $\vec{r}_i$ ，作用在其上的主动力合力分为两部分

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{iN} + \vec{F}_{iD}, \quad \vec{F}_{iD} = -k_i f_i(r_i, \vec{V}_i, t) \vec{\tau}, \quad (4-8)$$

式中 $\vec{F}_{iN}$ 是非耗散力， $\vec{F}_{iD}$ 是耗散力， k_i 是一个常量， $f_i(r_i, V_i, t)$ 是关于位矢为 $\vec{r}_i$ 、速度 V_i 和时间 t 的一个函数， $\vec{\tau}$ 是运动坐标系中速度的切线方向矢量。把 (4-8) 代入 (4-7) 式的 Q_α^* ，得：

$$Q_\alpha^* = \sum_{i=1}^n \dot{\vec{F}}_{iN} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} + \sum_{i=1}^n \dot{\vec{F}}_{iD} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = Q_{aN}^* + Q_{aD}^*, \quad (4-9)$$

式中

$$\dot{\vec{F}}_{iD} = -k_i \frac{d}{dt} \left[f_i(r_i, V_i, t) \frac{\vec{V}_i}{V_i} \right]. \quad (4-10)$$

引入 S 个广义坐标 $q_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$ ，则有

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_\alpha, t), \quad (4-11)$$

$$\vec{V}_i = \dot{\vec{r}}_i = \sum_{\alpha} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}, \quad \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha}, \quad (4-12)$$

将 (4-10) 式和 (4-12) 式代入 (4-9) 式中的 Q_{aD}^* ，得

$$Q_{aD}^* = - \sum_i k_i \frac{d}{dt} \left[f_i(\vec{r}_i, \vec{V}_i, t) \frac{\vec{V}_i}{V_i} \right] \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}$$

$$= -\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left[\sum_i k_i \int_0^{V_i} f(\vec{r}_i, u, t) du \right] + \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left[\sum_t k_i \int_0^{V_i} f(\vec{r}_i, u, t) du \right]。 \quad (4-13)$$

令：

$$\Phi = \sum_t k_i \int_0^{V_i} f(\vec{r}_i, u, t) du, \quad (4-14)$$

系统所受阻力的广义力表为

$$Q_{\alpha D}^* = -\frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha}。 \quad (4-15)$$

将（4-15）式和（4-9）式代入（4-7）式，得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_\alpha} = Q_{\alpha N}^* - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha}。 \quad (4-16)$$

式中的 Φ 称为耗散函数，方程（4-16）是含有耗散力的三阶 Lagrange 方程。

4.3 举例应用

考虑一个带电粒子以初速度 V_0 在阻尼介质中做抛体运动，它的质量为 m ，发射时与水平面的夹角为 α ，作用在它上面的阻力与其速度成正比例关系，即 $f(V)=V$ ，在水平方向上受电场力 $\vec{F}_e = \frac{1}{2} \beta_0 q t^2 \vec{i}$ 的作用，求物体的运动方程。我们用三阶 Lagrange 方程来解决这个问题。

在直角坐标系中，

$$\vec{r} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}, \quad \vec{F}_{IN} = \frac{1}{2} \beta_0 q t^2 \vec{i} - mg\vec{j}, \quad f(V) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \quad (4-17)$$

$$S = \frac{1}{2} m \ddot{r}^2 = \frac{1}{2} m (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2), \quad (4-18)$$

计算后可以得到

$$Q_{xN}^* = \beta_0 q t, \quad Q_{yN}^* = 0, \quad \Phi = \frac{1}{2} k (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)。 \quad (4-19)$$

将（4-18）式和（4-19）式代入（4-16）式，得

$$m\ddot{x} = \beta_0 q t - k\ddot{x}, \quad m\ddot{y} = -k\ddot{y}, \quad (4-20)$$

或:

$$\ddot{x} + \omega\ddot{x} = \beta t, \quad \ddot{y} + \omega\ddot{y} = 0, \quad (4-21)$$

式中

$$\omega = \frac{k}{m}, \quad \beta = \frac{\beta_0 q}{m}.$$

式 (4-21) 式的特征值为:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -\omega. \quad (4-22)$$

最后解得 x , y 和 t 的函数关系如下

$$x = a_0 + a_1 t - \frac{\beta}{2\omega^2} t^2 + \frac{\beta}{6\omega} t^3 + a_2 e^{-\omega t}, \quad (4-23)$$

$$y = b_0 + b_1 t + b_2 e^{-\omega t} \quad (4-24)$$

考虑式 (4-23) 和 (4-24) 的初始条件, 及当 $t=0$ 时, 有 $x=0$, $y=0$, $\dot{x}=V_0 \cos \alpha$,

$\dot{y}=V_0 \sin \alpha$, $\ddot{x}=-\omega V_0 \cos \alpha$, $\ddot{y}=-g-\omega V_0 \sin \alpha$ 。可以得到

$$x = -\left(\frac{\beta}{\omega^4} - \frac{V_0 \cos \alpha}{\omega}\right) + \frac{\beta t}{\omega^3} - \frac{\beta t^2}{2\omega^2} + \frac{\beta t^3}{\left(6\omega + \left(\frac{\beta}{\omega^4} - \frac{V_0 \cos \alpha}{\omega}\right)\right)} e^{-\omega t}, \quad (4-25)$$

$$y = \left(\frac{g}{\omega^2} + \frac{V_0 \sin \alpha}{\omega}\right)(1 - e^{-\omega t}) - \frac{gt}{\omega}. \quad (4-26)$$

式 (4-25) 和 (4-26) 所得到的结果与牛顿运动定律所得结果一致, 而含有耗散力的三阶 Lagrange 方程来解题显然更容易。

第五章 含有非独立广义坐标的三阶 Lagrange 方程

当人们研究物体的机械运动时，如果作用在物体上的外力未知，人们仅仅知道作用在物体上外力的力变率，这时，运用牛顿运动方程来求解物体运动的轨迹就显得较为繁琐。类似采用二阶 Lagrange 方程来求解物体的运动状态也不方便。对这种情况，采用三阶 Lagrange 方程求解就较为简单方便。近年来，有关三阶 Lagrange 方程，已有许多工作完成^[3-12]。这些工作主要是在加速度能的基础上，讨论不同条件下三阶 Lagrange 方程的基本形式和基本性质。但对系统存在一些非独立的广义坐标的情况，三阶 Lagrange 方程的形式如何改变以及它的显式形式等问题，目前并未涉及。本文即考虑在位矢和广义坐标的关系中，含有非独立广义坐标的情况，三阶 Lagrange 方程的基本形式如何，以及用位矢广义坐标的导数关系，给出这种三阶 Lagrange 方程的基本形式。

5.1 含非独立坐标 Lagrange 方程

设完整系统的位形（对于一个质点系统来说，我们把整个系统的位置称为它的一个位形）由 $n+m$ 个广义坐标 q_s ($s=1,2,\dots,n+m$) 来确定。为方便计算，选 m 个非独立坐标，记作 q_ν ($\nu=1,2,\dots,m$)，此时有 m 个理想、双面、完整约束：

$$f_\nu(q_s, q_{n+\mu}, t) = 0, \quad (\nu, \mu = 1, 2, \dots, m) \quad (5-1)$$

约束 (5-1) 加在坐标变分上的条件为：

$$\sum_{u=1}^{n+m} \frac{\partial f_\nu}{\partial q_u} \delta q_u = 0 \quad (5-2)$$

由 Euler-Lagrange 原理和虚位移方程 (5-2)，利用通常的 Lagrange 乘子法，可以得到方程：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_u} - \frac{\partial T}{\partial q_u} = Q_u + \sum_{\nu=1}^m \lambda_\nu \frac{\partial f_\nu}{\partial q_u} \quad (u=1, \dots, n+m) \quad (5-3)$$

方程 (5-3) 称为含有非独立广义坐标的完整系统的 Lagrange 方程。该方程的优

点是可以用求约束反力。

5.2 含有非独立坐标的三阶 Lagrange 方程的推导

对含有 N 个粒子的系统，我们有三阶 Lagrange 方程^[1]：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial q_j} = Q_s^* = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{F}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \quad (j=1, 2, \dots, n), \quad (5-4)$$

(5-4) 式中 $S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i$ 是加速度能， $\dot{\vec{F}}_i$ 是作用在第 i 个质点上的力变率， q_s 是

广义坐标。

如果完整系统由 $n+m$ 个广义坐标 q_s 描述，有 m 个理想、双面、完整约束为

$$f_v(q_s, q_{n+\mu}, t) = 0, \quad (v, \mu = 1, 2, \dots, m). \quad (5-5)$$

则确定系统的运动状态的广义坐标为 n 个，不妨假设前 n 个广义坐标为独立的广义坐标，其余 m 个广义坐标为非独立的广义坐标。对 (5-5) 式的约束方程，存在如下的虚位移等式：

$$\sum_{u=1}^{n+m} \frac{\partial f_v}{\partial q_u} \delta q_u = 0, \quad (v = 1, 2, \dots, m). \quad (5-6)$$

将 (5-6) 式乘以 Lagrange 乘子 λ_v 后与 (5-4) 式相加，可以得到

$$\sum_{\alpha=1}^{n+m} \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha^* + \sum_{v=1}^m \lambda_v \frac{\partial f_v}{\partial q_\alpha} \right] \delta q_\alpha = 0, \quad (5-7)$$

式中 $n+m$ 个广义坐标 q_s 中，只有前 n 个广义坐标是独立的，后 m 个非独立的广义坐标 $q_{n+\mu}$ 可以用前 n 个独立的广义坐标 q_s 表示。当选择一套合适的 Lagrange 乘子 λ_v ，使后 m 个非独立广义坐标 $q_{n+\mu}$ 虚位移 $\delta q_{n+\mu}$ 前的系数等于零，则可得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial q_s} = Q_s^* + \sum_{v=1}^m \lambda_v \frac{\partial f_v}{\partial q_s}, \quad (s = 1, 2, \dots, n). \quad (5-8)$$

联立求解 (5-8) 式和 (5-5) 式，可以解得 n 个独立得广义坐标 q_s 和 m 个非独立的广义坐标 $q_{n+\mu}$ 。

5.3 含有非独立坐标的三阶 Lagrange 方程的显示表示

考虑第 i 个质点位矢和广义坐标的关系为 $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_s, t)$, 则有

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}_i &= \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}, \\ \ddot{\vec{r}}_i &= \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} \ddot{q}_s + \sum_{s,t} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_s \partial q_t} \dot{q}_s \dot{q}_t + 2 \sum_s \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_s \partial t} \dot{q}_s + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t^2} \\ &= A + B + C + D,\end{aligned}\tag{5-9}$$

以及加速度能为:

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (A + B + C + D)(A + B + C + D) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + 2AB + 2AC + 2AD + 2BC + 2BD + 2CD),\end{aligned}\tag{5-10}$$

式中:

$$\begin{aligned}A^2 &= \sum_{s,t} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_t} \ddot{q}_s \ddot{q}_t, \\ B^2 &= \sum_{s,t,q,r} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_q \partial q_r} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_s \partial q_t} \dot{q}_q \dot{q}_r \dot{q}_s \dot{q}_t, \\ C^2 &= 4 \sum_{s,t} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_s \partial t} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_t \partial t} \dot{q}_s \dot{q}_t, \\ D^2 &= \sum_{s,t} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t^2}, \\ 2AB &= 2 \sum_r \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_r} \ddot{q}_r \cdot \sum_{s,t} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_s \partial q_t} \dot{q}_s \dot{q}_t, \\ 2AC &= 4 \sum_s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} \ddot{q}_s \cdot \sum_t \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_t \partial t} \dot{q}_t, \\ 2AD &= 2 \sum_s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} \ddot{q}_s \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2BC &= 4 \sum_{s,t} \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_s \partial q_t} \dot{q}_s \dot{q}_t \cdot \sum_r \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_r \partial t} \dot{q}_r, \\
2BD &= 2 \sum_{s,t} \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_s \partial q_t} \dot{q}_s \dot{q}_t \cdot \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial t^2}, \\
2CD &= 4 \sum_s \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_s \partial t} \dot{q}_s \cdot \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{5-11}$$

令：

$$F_s = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \quad \alpha = \frac{1}{2} \sum_i m_i,$$

考虑(5-11)式的结果，可得：

$$\begin{aligned}
F_s(\alpha A^2) &= \sum_i m_i \left[\sum_t \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_t} \ddot{q}_t + \sum_{t,r} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \cdot \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_r \partial q_t} \ddot{q}_t \dot{q}_r + \sum_t \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \cdot \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial t \partial q_t} \ddot{q}_t \right. \\
&\quad \left. + \sum_{t,r} \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_r \partial q_s} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_t} \ddot{q}_t \dot{q}_r + \sum_t \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial t \partial q_s} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_t} \ddot{q}_t \right], \\
F_s(\alpha B^2) &= \sum_i m_i \left[- \sum_{q,t,r} \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_q \partial q_r} \cdot \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_s \partial q_t} \dot{q}_r \dot{q}_q \dot{q}_t \right], \\
F_s(\alpha C^2) &= \sum_i m_i \left[- 2 \sum_t \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_s \partial t} \cdot \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_t \partial t} \dot{q}_t \right], \\
F_s(\alpha D^2) &= 0, \\
F_s(2\alpha AB) &= \sum_i m_i \left[\left(\sum_q \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_s \partial q_q} \dot{q}_q + \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_s \partial t} \right) \cdot \sum_{k,t} \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_k \partial q_t} \dot{q}_k \dot{q}_t \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \cdot \left(\sum_{q,k,t} \frac{\partial^3 \bar{r}_i}{\partial q_q \partial q_k \partial q_t} \dot{q}_q + \sum_{k,t} \frac{\partial^3 \bar{r}_i}{\partial t \partial q_k \partial q_t} \right) \dot{q}_s \dot{q}_t - \sum_r \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_r} \ddot{q}_r \cdot \sum_t \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_s \partial q_t} \dot{q}_t \right], \\
F_s(2\alpha AC) &= 2 \sum_i m_i \left[\left(\sum_t \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_t \partial q_s} \dot{q}_t + \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial t \partial q_s} \right) \cdot \sum_r \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_r \partial t} \dot{q}_r \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \cdot \left(\sum_{r,t} \frac{\partial^3 \bar{r}_i}{\partial q_r \partial q_t \partial t} \dot{q}_r \dot{q}_t + \sum_t \frac{\partial^3 \bar{r}_i}{\partial q_t \partial t^2} \dot{q}_t \right) - \frac{1}{2} \sum_s \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \ddot{q}_s \cdot \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_t \partial t} \right], \\
F_s(2\alpha AD) &= \sum_i m_i \left[\left(\sum_t \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_t \partial q_s} \dot{q}_t + \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_s \partial t} \right) \cdot \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial t^2} + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \cdot \left(\sum_t \frac{\partial^3 \bar{r}_i}{\partial q_t \partial t^2} \dot{q}_t + \frac{\partial^3 \bar{r}_i}{\partial t^3} \right) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_s(2\alpha BC) &= -\sum_i m_i \left[\left(\sum_{s,t} \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_s \partial q_t} \dot{q}_s \dot{q}_t \cdot \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_r \partial t} \right) + 2 \sum_r \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_r \partial t} \dot{q}_r \cdot \sum_t \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_s \partial q_t} \dot{q}_t \right], \\
F_s(2\alpha BD) &= -\sum_i m_i \left[\left(\sum_t \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_s \partial q_t} \dot{q}_t \cdot \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial t^2} \right) \right], \\
F_s(2\alpha CD) &= -\sum_i m_i \left[\frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_s \partial t} \cdot \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial t^2} \right].
\end{aligned} \tag{5-12}$$

将(5-12)式中的全部结果代入(5-8)式，可以得到如下结果，

$$\begin{aligned}
&\sum_i m_i \left[\sum_t \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_t} \ddot{q}_t + \sum_t \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_t \partial t} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \ddot{q}_t + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_q} \cdot \sum_{r,s,t} \frac{\partial^3 \bar{r}_i}{\partial q_r \partial q_s \partial q_t} \dot{q}_r \dot{q}_s \dot{q}_t \right. \\
&\quad + \sum_{r,t} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \cdot \frac{\partial^3 \bar{r}_i}{\partial q_r \partial q_t} \ddot{q}_t \dot{q}_r + 3 \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_r} \cdot \sum_{s,t} \frac{\partial^3 \bar{r}_i}{\partial q_s \partial q_t \partial t} \dot{q}_s \dot{q}_t + 3 \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \cdot \sum_t \frac{\partial^3 \bar{r}_i}{\partial q_t \partial t^2} \dot{q}_t \\
&\quad \left. \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \cdot \frac{\partial^3 \bar{r}_i}{\partial t^3} \right] = Q_s^* + \sum_{v=1}^m \lambda_v \frac{\partial f_v}{\partial q_s}, \quad (s=1,2,\dots,n).
\end{aligned} \tag{5-13}$$

当位矢不是时间的显函数时，即 $\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} = 0$ ，(5-13)式可以化简为：

$$\begin{aligned}
&\sum_i m_i \left[\sum_t \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_t} \ddot{q}_t + \sum_{r,t} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \cdot \frac{\partial^3 \bar{r}_i}{\partial q_r \partial q_t} \ddot{q}_t \dot{q}_r + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_q} \cdot \sum_{r,s,t} \frac{\partial^3 \bar{r}_i}{\partial q_r \partial q_s \partial q_t} \dot{q}_r \dot{q}_s \dot{q}_t \right] = Q_s^* + \sum_{v=1}^m \lambda_v \frac{\partial f_v}{\partial q_s} \\
&\quad (s=1,2,\dots,n).
\end{aligned} \tag{5-14}$$

(5-13)式和(5-14)式称为含有非独立广义坐标的三阶 Lagrange 方程。

5.4 讨论

本章从三阶 Lagrange 方程出发，导出了含有非独立广义坐标的三阶 Lagrange 方程，并给出了方程用位矢对广义坐标的导数表示的形式。方程中包含约束方程对广义坐标的导数。含有非独立广义坐标的三阶 Lagrange 方程具有两方面的重要意义，一方面方程扩大了三阶 Lagrange 方程的应用范围，使我们可以求解含有约束的系统运动问题；另一方面，方程也丰富了有关三阶 Lagrange 方程的理论体系，促进今后三阶 Lagrange 方程的进一步发展。

第六章 总结和对未来工作的展望

6.1 结论

本文研究了三阶 Lagrange 方程的另外两种表述方式，即含有耗散力的三阶 Lagrange 方程和含有非独立广义坐标的三阶 Lagrange 方程。从而可以知道，我们在解决含有耗散力作用下的力学问题时，我们既可以用牛顿运动定律也可以运用三阶 Lagrange 方程。但是对于某些情况，我们用含有耗散力的三阶 Lagrange 方程来求解却更为简单。而推导出含有非独立广义坐标的三阶 Lagrange 方程，不仅扩大了三阶 Lagrange 方程的应用范围，而且也方便了我们求解含有约束的系统运动问题，同时，也为三阶 Lagrange 方程的研究工作做了铺垫。

6.2 未来工作展望

目前已经有很多学者对三阶 Lagrange 方程做了大量的工作，讨论了不同条件下三阶 Lagrange 方程的基本形式和基本性质。例如：黄沛天等把三阶 Lagrange 方程用来描述电流突变运动，将磁 Appell 函数替代加速度能量，得到了关于磁 Appell 函数的三阶 Lagrange 方程，并用它求得了一种 RL 电路暂态过程的电流急动度函数；马善钧和杨学慧研究了三阶 Lagrange 方程和不同条件下的三阶 Lagrange 方程、三阶 Lagrange 方程的对称性和守恒量等等

本文就是基于已有的三阶 Lagrange 方程的研究工作上，推导出了含有耗散力的三阶 Lagrange 方程和含有非独立广义坐标的三阶 Lagrange 方程。并对这两种形式的三阶 Lagrange 方程进行了讨论，确定了他们的应用范围。今后也要继续关注这方面的文章，把 Lagrange 方程推广到更多方面的应用上去。

参考文献

- [1]梅凤翔, 刘瑞, 罗勇. 高等分析力学. 北京: 北京理工大学出版社, 1991.
- [2]马善钧, 徐学翔, 黄沛天, 等. 完整系统三阶 Lagrange 方程的一种推导和讨论[J]. 物理学报, 2004 (11)
- [3]Ma Shanjun, Liu Mingping, Huang Peitian. The forms of three-order Lagrange equation in relative motion[J]. Chinese Physics, 2005, 14(2):244-246
- [4]Ma S J, Ge W G, Huang P T. The third-order Lagrange equation for mechanical systems of variable mass [J]. Chin. Phys, 2005, 14: 879-881.
- [5]Ma S J, Yang X H, Yan R, Huang P T, Lie symmetry and the conserved quantity of three order Lagrangian equations for non-conserved mechanical system [J]. Commun. Theor. Phys, 2006, 45: 350-352.
- [6]Ma S J, Yang X H, Yan R. Noether symmetry of three-order Lagrangian equations[J]. Commun. Theor. Phys, 2006, 46: 309-312.
- [7]Ma S J, Huang P T, Yan R, Zhao H X. Three-order pseudo-Hamilton's canonical equations[J]. Chin. Phys, 2006, 15: 2193-2196.
- [8]Yang X H, Ma S J, Three-order form invariance and conserved quantity [J]. Chin Phys, 2006, 15: 1672-1677.
- [9]张相武. 完整力学系统的高阶运动微分方程[J]. 物理学报, 2005, 54: 3978-3982
- [10]张相武. 完整有势力学系统的高阶 Lagrange 方程[J]. 物理学报, 2005, 54: 4483-4487.
- [11]张相武. 变质量完整力学系统的高阶运动微分方程[J]. 物理学报, 2006, 55: 1543-1547.
- [12]张相武. 完整力学系统相对运动动力学方程的普遍形式[J]. 物理学报, 2006, 55: 2669-2675.
- [13]黄沛天, 黄文, 胡利云. 变加速度理论与实践意义初探[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2003, 27: 8-11.
- [14]Linz S J. Nonlinear dynamical models and jerk motion [J]. Am J

Phys, 1997,65:523-526.

[15]Linz S J .Newtonian jerky dynamics:some general properties[J].Am J Phys, 1998,66:1109-1114.

[16]王勇, 郭永新.Riemann-Cartan 空间中的 D'Alembert-Lagrange 原理.物理学报, 2005, 54 (12): 5517-5520

[17]Gottlieb H P W.Simpel nonlinear jerk function with periodic solutions. [J].Am J Phys, 1998,6:903-906.

[18]Gottlieb H P W.Harmonic balance approach to periodic solutions of non-linear jerk equations[J].J Sound Vib, 2004,271:671-683.

[19]黄沛天, 马善钧, 胡利云.变加速动力学和三阶微分方程[J].江西师范大学学报:自然科学版,2003,27:338-340.

[20]黄沛天, 马善钧, 胡利云.辐射阻尼力和电磁质量的动力学本质[J].江西师范大学学报:自然科学版,2004,28:99-101.

[21]黄沛天, 马善钧, 胡利云.关于变加速动力学及其应用[J].力学与实践.2004, 26(1):69-70.

[22]刘书振, 陈输勤, 罗绍凯. 分析力学. 开封: 河南大学出版社, 1992

[23]郭永新, 罗绍凯, 梅凤翔. 非完整约束系统集合动力学研究进展: Lagrange 理论及其他.力学进展, 2004, 34(4): 477-492

[24]梅凤翔. 分析力学中的 Nielsen 算子和 Euler 算子.力学学报, 1984, 16(6): 596-603

[25]Tan K F, Zhao Y K and Guo X D 1988 Mech. Practice 10 46 (in Chinese) [谈开孚、赵永凯、郭小弟 1988 力学与实践 10 46]

[26]Goldstein H 1986 Classical Mechanics (Beijing: Science Press) (in Chinese) [戈德斯坦 H 1986 经典力学 (第二版) (北京: 科学出版社)]

[27]梅凤翔, 刘桂林. 分析力学基础. 西安: 西安交通大学出版社, 1987

[28]罗绍凯, 张永发等.约束系统动力学研究进展.北京: 科学出版社, 2008

[29]Papastavridis J G. A panoramic overview of the principle and equations of motion of advanced engineering dynamics. ASME Applied Mechanics Reviews, 1998,51(4): 239-265

[30]Mei Fengxiang. Nonholonomic mechanics. ASME Applied Mechanics Reviews, 2000, 53(11): 283-305

[31]Kane T R, Levinson D A. Dynamics: theory and applications. New York: Mc Graw Hill, 1985

[32]Shang Mei, Mei Fengxiang. Integrals of generalized Hamilton systems with additional terms. Chinese Physics, 2005, 14(9):1707-

1710

- [33]Schot S H 1978 Am.J.Phys.46 1090
- [34]Zhu M 1983 Mech.Practice 5 48 (in Chinese) [朱 明 1983 力学与实践 5 48]
- [35]Mei F X and Shang M 2000 Acta Phys. Sin. 49 1901(in Chinese)[梅凤翔、尚梅 2000 物理学报 49 1901]
- [36]Chen X W, Shang M and Mei F X 2001 Chin.Phy. 10 997
- [37]Shen H C 2000 Physics 29 743(in Chinese)[沈惠川 2000 物理 29 743]
- [38]郭仲衡, 高普云. 关于经典非完整力学. 力学学报, 1990, **22**(2): 185-190
- [39]陈滨. 关于经典非完整力学的一个争议. 力学学报. 1991, **23**(3): 379-384
- [40]郭仲衡, 高普云. 再关于非完整力学——答争议. 力学学报, 1992, **24**(3): 253-257
- [41]罗勇, 刘桂林.变质量高阶非完整力学系统的两类新型方程.北京工业学院学报, 3, 1987
- [42]刘延柱. 高等动力学. 北京: 高等教育出版社, 2001
- [43]梅凤翔.Lagrange 系统的 Noether-Lie 对称性.北京理工大学学报, 2005, 25 (4): 283-285
- [44]梅凤翔.分析力学专题.北京: 北京工业学院出版社, 1988
- [45]梅凤翔. 非完整系统力学基础. 北京: 北京工业学院出版社, 1985
- [46]梅凤翔. 非完整动力学研究. 北京: 北京工业学院出版社, 1987
- [47]梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量. 北京: 北京理工大学出版社, 2004
- [48]Mei Fengxiang. Form invariance of Appell equations. Chinese Physics, 2001, **10**(3):177-180
- [49]Papastavridis J G. Analytical mechanics. New York: Oxford Univ. Press, 2002
- [50]叶敏, 肖龙翔. 分析力学. 天津: 天津大学出版社, 2001

致 谢

时光匆匆，光阴荏苒，这几年的读书生涯转眼即将结束。回首这三年的时光，收获颇丰，感慨万千，所以应该衷心的感谢所有关心和帮助过我的老师、亲人和同学们。

首先，我要感谢我的导师马善钧教授，马老师在专业上指导我，在精神上鼓励我，他教给我的不仅仅是科研的方法，更教给了我做人的学者风范。马老师的严谨细致地工作作风，孜孜不倦的探索精神，循循善诱、谦虚宽容的为师之道是我学习的楷模，让我终身受益匪浅。在此，我真诚的感谢我的导师马善钧教授。求学期间我也得到了许多其他老师的指导和帮助，感谢聂义友教授、罗开基教授、嵇英华教授、叶志清教授、陶向阳教授、谢芳森教授、桑明煌教授、熊小华副教授以及理电学院的其他教职员工和各位公共课老师，是他们帮助我完成学业的学习。正是他们在学习、生活方面给予我的关心、帮助和指导，才使得我顺利的完成学业。

感谢我的同学们，对我的关心、支持和帮助！我们一起走过的日子，我会铭记于心。

最后我要感谢我的父母和家人，对我的支持，使我能够安心的学习，安心的在学校进行我的科研工作。

我将在今后的工作中继续努力，以取得更好的成绩来回报所有关心，支持我的老师、同学、朋友、亲人们。

在读期间公开发表论文（著）及科研情况

沈艳菲,马善钧. 含有耗散力的三阶 Lagrange 方程[J],江西师范大学学报. 2008,27(4).

沈艳菲,马善钧. 含有非独立广义坐标的三阶拉格朗日方程[J],江西师范大学学报.2009,33(2).