

分类号\_\_\_\_\_

密级

# 几类非线性电路系统动力学行为研究

研究生姓名：彭智俊

指导教师姓名、职称：汤琼 教授

学科专业：数学

研究方向：微分方程与动力系统

湖南工业大学

二零二零年 六月 九日

分类号\_\_\_\_\_

密级

几类非线性电路系统动力学行为研究  
Research on the Dynamic Behavior of Several  
Nonlinear Circuit Systems

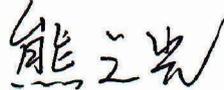
研究生姓名：彭智俊

指导教师姓名、职称：汤琼 教授

学科专业：数学

研究方向：微分方程与动力系统

论文答辩日期 2020.6.2

答辩委员会主席 

湖南工业大学

二零二零年 六月 九日

## 湖南工业大学学位论文原创性声明

本人郑重声明:所呈交的学位论文,是本人在导师的指导下,独立进行研究工作所取得的成果.除文中已经注明引用的内容外,本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果.对本文的研究做出重要贡献的个人和集体,均已在文中以明确方式标明.本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担.

作者签名: 彭智俊

日期:2020年 5 月 31 日

## 湖南工业大学论文授权使用授权书

本人了解湖南工业大学有关保留、使用学位论文的规定,即:学校有权保留学位论文,允许学位论文被查阅和借阅;学校可以公布学位论文的全部或部分内容,可以采用复印、缩印或其他手段保存学位论文;学校可根据国家或湖南省有关部门规定送交学位论文.

作者签名: 彭智俊 导师签名: 汤琼 日期:2020年 5 月 31 日

## 摘 要

在自然科学和工程技术的实际应用中, 存在大量的非线性现象. 由于非线性电路具有通过实验研究手段, 便捷的观察到各种非线性现象的优势, 使得有关非线性电路的研究得到广泛关注.

本文设计了几类非线性电路, 根据 Routh-Hurwitz 等定理分析系统平衡点的存在性和稳定性, 并利用 Matlab 软件, 通过相轨迹图、Lyapunov 指数、Poincaré 截面和分岔图等, 针对这些系统分析了它们的动力学行为. 具体研究内容如下:

本文首先阐述了研究背景及意义, 并介绍了混沌基本理论及分析方法, 然后对能产生多涡卷吸引子的改进 Chua 电路进行基本动力学分析, 通过改变系统中的参数, 系统有混沌演化的行为.

本文在改进 Chua 电路中引入一个双曲正切函数, 扩展相空间中  $y$  方向上指标 2 鞍焦点, 构造出双向网格多涡卷吸引子混沌系统, 设计了具有随机运动轨迹和复杂动力学行为的混沌系统. 研究了系统参数变化对系统动力学行为的影响, 通过改变系统参数, 电路出现周期、分岔和混沌等复杂的非线性现象, 从稳定到周期到分岔, 然后通向混沌的演化过程.

本文在增广 Lü 系统中引入一个简单的线性项和一个非线性项, 设计出一个能产生四翼超混沌吸引子的四维系统. 相较于混沌系统, 超混沌系统具有更强的随机性. 该系统仅有一个鞍点, 数值仿真结果表明, 该系统具有更复杂的动力学特性, 运动轨迹的随机性更强. 通过研究系统参数变化的影响, 发现在混沌区间内还存在大量的周期窗口, 并能够产生各种各样复杂的周期性轨道.

文中模型的数值仿真结果与理论分析一致, 证实了模型设计的准确性, 表明了这些系统均具有丰富的动力学特性, 为具有混沌和超混沌现象非线性电路的动力学行为分析提供了好的思路.

**关键词:** 分岔, 动力学分析, Lyapunov 指数, 多涡卷吸引子, 四翼超混沌系统

## ABSTRACT

In the practical application of natural science and engineering technology, there are a lot of nonlinear phenomena. The nonlinear circuit has the advantage of observing various nonlinear phenomena conveniently through experimental research methods, which makes the research on the nonlinear circuit get widespread attention.

This paper takes several types of nonlinear circuits as research objects, mainly analyzes the existence and stability of the system equilibrium point according to the theorem of Routh-Hurwitz, etc., and uses Matlab software to pass the phase trajectory diagram, Lyapunov exponent, Poincaré section and bifurcation diagram, The dynamic behavior of these systems is analyzed. The specific research contents are as follows:

This article first describes the research background and significance, and introduces the basic theory and analysis method of chaos. Then, the basic dynamic analysis of the improved Chua circuit that can generate multiple scroll attractors is carried out. By changing the parameters in the system, the system has chaotic evolution behavior.

This paper introduces a hyperbolic tangent function in the improved Chua circuit, expands the index 2 saddle focus in the  $y$  direction in the phase space, constructs a bidirectional grid multi-scroll attractor chaotic system, and designs a random trajectory and complex dynamic behavior. Chaotic system. The influence of system parameter changes on the system dynamics is studied. By changing the system parameters, the circuit exhibits complex nonlinear phenomena such as period, bifurcation and chaos, from stability to period to bifurcation, and then leads to the chaotic evolution process.

This paper introduces a simple linear term and a nonlinear term in the augmented Lü system to design a four-dimensional four-wing hyperchaotic system. Compared with chaotic systems, hyperchaotic systems have stronger randomness. The system has only one saddle point.

The numerical simulation results show that the system has more complex dynamic characteristics and the randomness of the motion trajectory is stronger. By studying the influence of system parameter changes, it is found that there are a large number of periodic windows in the chaotic interval, and various complex periodic orbits can be generated.

The numerical simulation results of the model in this paper are consistent with the theoretical analysis, confirming the accuracy of the model design, indicating that these systems have rich dynamic characteristics, and provide a good idea for the dynamic behavior analysis of nonlinear circuits.

**Key Words:** bifurcation, dynamic analysis, Lyapunov exponente, multi-scroll attractor, four-wing hyperchaotic system

# 目 录

摘 要.....	I
ABSTRACT.....	II
第一章 绪论.....	1
1.1 研究背景 .....	1
1.2 国内外研究现状 .....	1
1.3 研究意义 .....	3
1.4 研究内容 .....	4
第二章 混沌理论及分析方法.....	6
2.1 混沌理论 .....	6
2.2 混沌的定量指标和分析方法 .....	9
2.3 混沌的定性分析方法 .....	11
第三章 多涡卷 Chua 混沌电路动力学行为研究 .....	16
3.1 改进的 Chua 电路模型 .....	16
3.2 平衡点稳定性分析 .....	18
3.3 耗散性分析 .....	20
3.4 数值仿真分析 .....	22
3.5 系统参数的影响 .....	23
3.6 本章小结 .....	33
第四章 网格多涡卷混沌吸引子.....	34
4.1 网格多涡卷混沌吸引子模型 .....	34
4.2 平衡点的存在性与稳定性分析 .....	38
4.3 耗散性分析 .....	41
4.4 Lyapunov 指数与维数 .....	41
4.5 Poincaré截面分析 .....	42
4.6 系统参数的影响 .....	43
4.7 本章小结 .....	55
第五章 四维四翼超混沌 Lü 系统 .....	56
5.1 三维增广 Lü 系统 .....	56
5.2 四维超混沌 Lü 系统 .....	56
5.3 平衡点稳定性分析 .....	57
5.4 对称性和耗散性分析 .....	59
5.5 数值分析 .....	59
5.6 系统参数的影响 .....	61
5.7 本章小结 .....	65
总结与展望.....	66
参考文献.....	68
攻读硕士学位期间取得的研究成果.....	72
致 谢.....	73

# 第一章 绪论

## 1.1 研究背景

非线性现象普遍存在于自然科学和工程技术的实际应用当中,随着科学技术的不断发展,非线性电子器件得到广泛使用,使得在电路中存在周期式跳跃、拟周期运动、分岔和混沌等大量的非线性现象<sup>[1]</sup>.当前,非线性电路的研究成为了现代非线性科学领域中的重要分支之一.混沌理论作为非线性科学中的一个重要组成部分,近些年来,与其他科学的联系更是越发的紧密,它在电子工程、生物工程、信息工程等工程技术领域中具有良好的应用潜能.大量的研究表明,非线性电路系统中普遍存在混沌现象.

20世纪60年代以来,关于非线性电路分析与综合、电路故障诊断以及与非线性电路元器件有关的电路技术等理论研究得到飞速发展.自1963年美国气象学家 Lorenz 表明了混沌的随机性和不可预测性,并提出著名的“蝴蝶效应”——对初始条件敏感的行为<sup>[2]</sup>,从此混沌现象引起了众多学者的广泛关注.1981年,美国学者 Linsay 描述了一种驱动非谐振荡器,它能够表现出周期加倍和混沌行为,并通过实际物理实验对 Feigenbaum 的倍周期分岔通向混沌的理论进行了验证<sup>[3]</sup>.

之后的几十年里,国内外学者在构造非线性混沌电路,以及研究一些实际电路动力学行为等方面,都取得了极大的成就.随着混沌学理论的不断深入以及混沌应用的广泛研究,混沌在信息领域的应用也引起了众多学者的关注,如信息存储、图像处理以及保密通讯等.混沌信号作为加密信号使用,在电路系统中,利用简单的非线性元器件便能产生有效的混沌信号<sup>[1,4,5]</sup>.由于非线性电路的复杂性,在非线性电路系统中存在丰富的动力学行为,因此需要进一步的展开探究.

本文主要以 Tang 提出的能够生成多涡卷混沌吸引子的改进 Chua 电路和三维增广 Lü 系统为研究对象,重点探究系统由稳定状态过渡到混沌状态的动力学行为及其中参数的变化范围.

## 1.2 国内外研究现状

非线性电路系统是现代非线性科学领域中的重要一部分,关于非线性电路系统动力学问题的研究成为了非线性科学中的一大研究热点.混沌是一种典型的非线性动力学行为,并且大量研究结果表明在非线性电路系统中存在混沌现象,因

此关于非线性混沌电路的构造,以及非线性电路系统动力学行为研究被广泛关注.

1983年,美籍学者蔡少棠教授以两个电容、一个电感和一个运算放大器构成的分段线性电阻,设计了一个能够产生复杂混沌现象的三阶非线性自治电路,即著名的“Chua 电路”<sup>[6]</sup>. Chua 电路在非线性电路领域中是最早提出且研究比较透彻的混沌电路,也是能够产生复杂动力学行为的最简单有效的混沌电路之一.并且该电路具有极丰富的动力学行为,通过变化电路参数,能够出现倍周期分岔、单涡卷、周期 3 到双涡卷吸引子等复杂的非线性现象,具有明显向混沌演化的行为过程<sup>[7-9]</sup>.由于 Chua 电路结构简单,在工程技术上容易实现,因此在通讯、信息处理等领域具有很高的应用价值,并得到了广泛的关注<sup>[10,11]</sup>.

基于 Chua 电路,国内外学者通过改变电路结构,改变非线性元器件或增加控制元器件等手段,得到了一系列变形的 Chua 电路.2001年, Tang 等人利用正弦函数替换 Chua 电路中的非线性项,设计出了单方向多涡卷混沌吸引子<sup>[12]</sup>. Koliopoulos 等人通过增加一个负电导将原三维电路系统变化为四维自治系统,并且将原三段分段线性 Chua 二极管替换为五段分段线性二极管,构造出一个四维电路系统,在该电路系统中发现了由间歇产生的危机<sup>[13]</sup>.禹思敏和吕金虎在 Chua 电路电感支路中串入一个  $\pi$  型子电路(由负电阻、电容、电感和电阻构成),从而构建出一种可以实现四到七阶的 Chua 电路<sup>[14]</sup>.

除 Chua 电路以外,其他类型的电路设计和研究也倍受关注,其中 Lorenz 电路、Chen 系统、Lü 系统、Jerk 电路和 Colpitts 电路等都是非线性电路系统中的研究热点<sup>[15-19]</sup>.新型元器件忆阻器的出现进一步推动了非线性混沌电路设计领域的研究.忆阻器是一种非线性特性的电阻,且具有纳米级尺寸、低功耗和高耐久性等特点.将忆阻器作为混沌系统的非线性部分,能够有效的提高系统信号的随机性和复杂程度,增强系统的安全性能<sup>[20]</sup>.利用忆阻器设计忆阻型混沌电路成为当前非线性混沌电路设计领域研究的一大热点.2010年,包伯成等人将一个磁控忆阻器和一个负电导并联替代 Chua 电路中的蔡氏二极管设计了几个混沌电路,详细分析了电路的动力学特性,并实现了等效电路<sup>[21-24]</sup>.随后,又构造了一种含有两个忆阻器的多涡卷混沌电路<sup>[25]</sup>.王延江用荷控型忆阻器设计与磁控忆阻 Chua 电路成对偶关系的超混沌系统<sup>[26]</sup>.张琳琳等人将 Chua 对偶电路中的二极管替换为荷控忆阻器,并且交换电阻和电容的位置,构造出了基于 Chua 对偶电路的四阶忆阻混沌电路<sup>[27]</sup>.闫登卫等人在增广 Lü 系统中引入一个磁控忆阻器,设计出一个仅改变系统一个参数,便可得到不同涡卷混沌吸引子的三维忆阻混沌系统<sup>[28]</sup>.仇睿煌等人在 Liu 混沌系统中引入忆阻器作为非线性反馈项,构建出四阶忆阻超混沌系统,并研究了该系统的动力学特性.同时通过设计模拟电路进行仿真,

且结果与理论分析一致,证实了该混沌系统的物理可行性<sup>[29]</sup>.张毅等人在 Chua 电路的耦合电阻支路中串联一个电感,并将电路中的二极管替换为压控忆阻,设计了一种五阶压控忆阻 Chua 混沌电路.该电路在不同的初始条件下会出现混沌吸引子与周期极限环共存的双稳定性现象<sup>[30]</sup>.由此可见,在非线性电路中引入忆阻器使系统具有更复杂的动力学特性.

同时关于非线性电路动力学问题的研究,例如稳定性分析、分岔和混沌的研究也是一大研究热点.1993年,Silva提出了利用 Silnikov 定理判定系统是否存在 Smale 马蹄混沌的方法,并通过 Chua 电路验证了该方法的有效性<sup>[31]</sup>.之后,其他学者通过这种方法验证了 Chen 系统、广义 Lorenz 系统以及 Liu 系统也存在 Smale 马蹄混沌<sup>[32-34]</sup>.2010年,周良强等人通过解析方法和 Silnikov 定理判定方法讨论了一个三维系统的 Hopf 分岔与混沌运动<sup>[35]</sup>.Sandra 等人针对 Chua 电路研究了双涡卷吸引子的产生与同宿轨道之间的关联<sup>[36]</sup>.Algaba 等人对简单电子设备的 Takens-Bogdanov 分岔进行了研究,并检测到了几种类型的周期性和同宿动力学行为<sup>[37]</sup>.Nishiuchi 等人通过深入研究一个三维自治电路中各种极限环和分岔现象,得到了超临界 Neimark-Sacker 和极限环的切分岔<sup>[38]</sup>.Miliou 等人对非线性电路中通向混沌运动的三种途径,即倍周期、间歇性和危机诱导的间歇性进行了深入的研究和讨论,利用 Grassberger-Procaccia 方法对电路运行的混沌特性进行了评估<sup>[39]</sup>,并探讨了噪声(内部或外部)对驱动响应配置系统(两个相同系统之间的单向耦合)同步的影响,同时考虑了混沌通讯系统的实际应用<sup>[40]</sup>.陈章耀等人研究了两个耦合混沌电路的动力学,通过变换边界将参数空间划分为与不同类型相图相关的区域,并指出在一定参数条件下,两个稳定平衡点能够由倍周期分岔分别演化为不同的混沌吸引子<sup>[41]</sup>.雷腾飞等人设计了一类吸引子共存的三维连续自治混沌系统,研究了系统的动力学特性,实现了吸引子共存的倍周期现象和混沌运动,并通过构造电路,证实了系统的可行性<sup>[42]</sup>.闵富红等人在经典 Chua 混沌振荡电路中引入一种双曲余弦函数的新型磁控忆阻器,设计含有两个双曲余弦忆阻器的混沌电路系统,该系统能够产生不同拓扑结构的混沌吸引子和不同周期运动的多稳态隐藏吸引子共存现象<sup>[43]</sup>.

### 1.3 研究意义

当前,各个领域对电力电子系统与设备的要求越来越高,研究非线性电路系统的理论知识和动力学特性,并探究其控制方法,对于有效的提高电路的工作效率、稳定性、工作范围等各种性能具有实用价值.混沌现象是一种典型的非线性

动力学行为,国内外学者对于混沌的研究也取得了一定的成就.

社会信息化的快速发展,信息安全在日常生活中扮演着越来越重要的角色.而混沌在保密通信、图像加密、信息存储等方面取得了大量的研究成果.混沌保密通信即是利用混沌信号对信息进行加密处理,隐藏信息保密性的强弱与混沌信号复杂程度有关,即混沌信号越复杂,隐藏信息保密性越好.目前已有大量的文献<sup>[21-30]</sup>表明,混沌信号可以通过简单的电路元件产生,从而关于非线性电路系统动力学问题的研究十分必要.超混沌吸引子相较于混沌吸引子具有更高的不可预测性、更大的随机性以及更加复杂多变的拓扑结构和演化轨迹,故应用范围更广,应用于信号加密中也具有更可靠的安全性.

当前对非线性混沌电路的研究是非线性科学中至关重要的一部分,混沌电路系统的研究主要分为两个方面:一是关于混沌电路系统的理论研究;二是对于混沌电路系统的应用探究,即应用研究;两者相辅相成.目前在非线性电路中关于混沌现象的研究取得了较好的成果,但关于超混沌现象的研究相对较少,本文主要设计了几类非线性电路,对其由周期、分岔到混沌、超混沌的动力学行为进行理论分析和数值模拟,为之后的应用实践提供理论依据.

## 1.4 研究内容

本文主要以几类典型非线性电路系统作为研究对象,分别研究了多涡卷混沌吸引子和超混沌的动力学行为,研究内容主要从平衡点稳定性、耗散性以及利用数值计算的方法对系统进行定量分析这几个方面进行展开.

第一章绪论部分,主要阐述了本文的研究背景及意义,简单介绍了混沌理论的发展历史,同时阐述了多涡卷混沌吸引子和超混沌的研究现状.

第二章简述了混沌理论的基本知识,包括四个从不同角度给出的混沌定义,混沌的基本特征,混沌分析的定量指标以及 Hopf 分岔理论.

第三章主要对 Tang 提出的单方向多涡卷 Chua 电路进行动力学分析,研究内容包括系统平衡点稳定性分析,耗散性分析,并通过相轨迹图、Poincaré 截面图、Lyapunov 指数、分数维和分岔图对系统进行定量分析,最后讨论了参数变化范围内系统的动力学行为.

第四章通过对 Tang 提出的改进 Chua 电路中的  $y$  方向上引入一个双曲正切函数,生成了网格多涡卷混沌吸引子,并对该系统进行动力学分析.

第五章基于三维增广 Lü 系统构造出一个新的四维四翼超混沌系统.同时对

该系统进行了基本动力学分析,最后重点讨论了参数变化对该系统动力学行为的影响.

最后对全文的研究工作做出总结,指出当前研究工作的不足,并对接下来的工作进行展望.

## 第二章 混沌理论及分析方法

本文主要对几类典型的非线性电路系统的动力学行为展开研究,系统中存在的混沌现象将作为研究重点,本章主要介绍混沌基本理论与与论文相关的分析方法.

### 2.1 混沌理论

#### 2.1.1 混沌的定义

基于混沌的复杂性,直至今日,混沌依然没有统一的数学定义.因此,在混沌研究过程中,不同的角度会有不一样的理解.下面列举出几种不同领域的研究者从不同角度给出的混沌定义.

Li-Yorke 混沌定义<sup>[44,45]</sup>:

**引理 2.1**(Li-Yorke 定理<sup>[44]</sup>) 设  $f(x)$  是有界闭区间  $I$  上的连续自映射,若  $f(x)$  存在 3 周期点,那么对于任意正整数  $k$ ,  $f(x)$  有  $k$  周期点.

**定义 2.1**(Li-Yorke 混沌定义) 对于有界闭区间  $I$  上的连续自映射  $f(x)$ ,若以下条件成立:

- (1)  $f(x)$  的周期点的周期无上界;
- (2) 闭区间  $I$  上存在不可数子集  $S$ , 满足

(i) 对  $\forall x_1, x_2 \in S$ , 有

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} |f^k(x_1) - f^k(x_2)| = 0,$$

(ii) 对  $\forall x_1, x_2 \in S$ , 当  $x_1 \neq x_2$  时, 有

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |f^k(x_1) - f^k(x_2)| > 0,$$

(iii) 对  $\forall x_1 \in S$  和  $f(x)$  的任意周期点  $x_2$ , 有

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |f^k(x_1) - f^k(x_2)| > 0,$$

则称  $f(x)$  是混沌的.

上述的 Li-Yorke 混沌定义体现了混沌的‘有界性’、‘对初值的敏感性’和‘非周期性’.前两个极限表明不可数子集  $S$  中的  $x_1$  和  $x_2$  既无限接近又相互分离,第三

个极限(iii)表明不可数子集  $S$  不趋近于任何的周期点.

Devaney 混沌定义<sup>[46]</sup>:

1989年, Devaney 在拓扑学意义下提出了更直观、更易于理解的混沌定义.

定义 2.2(Devaney 混沌定义) 设  $(X, \rho)$  为一个紧致度量空间,  $f$  是  $X$  上的一个映射, 若满足以下三个条件, 则称映射  $f: X \rightarrow X$  是混沌的.

(1)  $f$  对初值具有敏感依赖性, 即存在  $\delta > 0$ , 对任意的  $x \in X$  和点  $x$  的任意邻域  $V$ , 都存在  $y \in V$  及自然数  $m$ , 使得  $\rho(f^m(x), f^m(y)) > \delta$ ;

(2)  $f$  的周期点在  $X$  中稠密;

(3) 映射  $f$  在空间  $X$  中具有拓扑传递性, 即对任意的开集  $U, V \subset X$ , 都存在自然数  $m$ , 使得  $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$ .

上述 Devaney 混沌定义中的三个条件分别说明了:(1)混沌对初值具有敏感依赖性, 混沌行为不可预测, 即不管初始状态有多接近的两条轨道, 经过映射  $f$  的迭代后, 都将发生一定程度的偏离;(2)混沌运动中的周期轨道是稠密的;(3)混沌具有拓扑传递性, 即在映射  $f$  的作用下, 空间中任意一点的邻域将历遍整个度量空间  $X$ .

1992年, Banks 等人证明出了 Devaney 定义中, 如果映射  $f$  连续, 则条件(1)可以通过条件(2)和条件(3)推导出<sup>[47]</sup>. 此外, 数学家 Wiggins 认为对初值敏感依赖性和拓扑传递性才是混沌运动的本质特征, 而存在稠密的周期轨道并不是混沌运动的本质特征, 从而给出了如下的混沌定义.

Wiggins 意义下的混沌<sup>[48]</sup>:

定义 2.3(Wiggins 混沌定义) 设  $X$  是一个度量空间,  $f$  是  $X$  上的一个连续自映射, 如果满足下列条件, 则称映射  $f$  是混沌的,

(1) 映射  $f$  在  $X$  中对初始值是敏感依赖的;

(2) 映射  $f$  在  $X$  上是拓扑传递的.

根据上述三种混沌定义可知, Wiggins 意义下的混沌可以通过 Devaney 混沌定义推出, 反之不然, 1998年, Martelli 等人举出了反例<sup>[49]</sup>. 2002年, Devaney 和 Wiggins 的混沌定义在一定条件下都可以推出 Li-Yorke 的混沌定义得到了证明<sup>[50]</sup>.

Morotto 混沌定义<sup>[51,52]</sup>

定义 2.4(Morotto 混沌定义) 设  $n$  维欧氏空间  $\mathbb{R}^n$  的范数为  $\|\cdot\|$ ,  $f$  是定义在  $\mathbb{R}^n$  上的连续自映射, 如果满足下列三个条件, 则称映射  $f$  是混沌的.

(1) 存在一个正整数  $N$ , 对于任意的整数  $M > N$ , 映射  $f$  都有周期为  $M$  的点;

(2) 存在映射  $f$  的 Scrambled 集  $S \in \mathbb{R}^n$ , 即  $S$  是满足以下条件的一个不可数非周期点集:

(i) 存在  $k > 0, f^k(S) \subset S$ ;

(ii) 对  $\forall x_1, x_2 \in S, x_1 \neq x_2$ , 均有

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |f^k(x_1) - f^k(x_2)| > 0,$$

(iii) 对  $\forall x_1 \in S$ , 和映射  $f$  的任意周期点  $x_2$ , 均有

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |f^k(x_1) - f^k(x_2)| > 0,$$

(3)  $\exists S_0 \subset S, S_0$  是不可数子集, 对  $\forall x_1, x_2 \in S_0$ , 均有

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} |f^k(x_1) - f^k(x_2)| = 0.$$

### 2.1.2 混沌的基本特征

混沌现象普遍存在于非线性系统中, 混沌是一种典型的非线性动力学行为, 它包含着及其丰富的信息, 下面介绍混沌的几个典型特征<sup>[53-55]</sup>:

(1) 对初始条件的敏感依赖性: 在混沌系统中, 初始条件的微小扰动, 经过长时间的运动, 会使扰动前后系统相空间轨道存在很大偏差, 即著名的‘蝴蝶效应’.

(2) 内在随机性: 对于确定性系统来说, 若能产生随机性输出, 则在系统中必然有随机性输入; 而混沌系统在不受外界随机因素的干扰下也能产生不规则性行为, 表现出类似随机的特征, 这种随机性是混沌系统内部自发产生的, 故称为混沌系统的内在随机性.

(3) 有界性: 混沌的运动轨迹始终局限在一个有限的区域内, 这个区域称为混沌吸引域. 由于混沌吸引域具有正不变性, 所以无论系统内部如何不稳定, 系统的运动轨线都不会离开这个吸引域, 即混沌是有界的.

(4) 遍历性: 在有限的时间内, 混沌运动轨道会历经混沌吸引域内的每一个点.

(5) 分维性: 分维性是混沌运动轨道在相空间中的几何形态, 即混沌运动轨道在混沌吸引域内经过无限次折叠, 这种无限次的拉伸和折叠可以利用分数维数描述. 混沌运动轨道在混沌吸引域内经过无限次的拉伸和折叠以后, 会形成无穷层次的自相似结构, 即奇怪吸引子.

(6) 普适性: 系统趋向混沌状态时, 所呈现出来的特征具有普适意义, 这些特征不受系统和参数变化的影响.

(7) 标度性: 是指混沌运动在其无序运动状态的小范围内存在有序的运动.

(8) 统计特性: 例如正 Lyapunov 指数. Lyapunov 指数是对非线性系统运动轨道相互之间分离或接近的整体效果进行的定量刻画, 表示相空间中运动轨道沿各个方向的平均指数发散率.

## 2.2 混沌的定量指标和分析方法

定性分析和定量分析是混沌研究的两大类分析方法. 对于无法求出精确解的非线性系统, 可以利用定性分析方法求出系统的近似解, 然后利用数值计算的方法对系统进行定量分析, 验证所求近似解是否趋于真实解, 并刻画系统的运动轨迹, 以弥补定性分析中的缺陷. 当前, 反映混沌性质通常采用的特征量有以下几种 [53-55].

### (1) 相轨迹图

对动力学系统进行数值运算, 可作出系统的相轨迹图. 在相空间中, 封闭曲线对应系统进行周期运动, 在一定区域内随机分布且不封闭的轨迹对应着混沌运动.

### (2) Poincaré 截面图和分岔图

十九世纪末 Poincaré 提出了一种把连续系统转化为维数较低的离散系统来研究的方法, 即在相空间  $(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \dots, x_n, \dot{x}_n)$  中选取一个截面(Poincaré 截面)来截断所有的运动轨线, 通过观测运动轨线与该截面交点的分布情况, 来判断系统的运动状态. 如果 Poincaré 截面上呈现的是一片片无序的密集点, 此时系统处于混沌状态, 作非周期的混沌运动; 如果 Poincaré 截面上是一条封闭曲线, 则系统作拟周期运动; 如果 Poincaré 截面上仅有  $m(m \geq 1)$  个离散点, 则系统作  $m$  周期运动.

分岔图是一种特殊的 Poincaré 映象, 用来表示系统随参数变化的运动状态. 常用的分岔图有两种, 第一种分岔图是通过参数的连续变化, 对系统运动轨迹的局部极值点进行描绘, 即局部极值分岔图; 第二种分岔图表示的是随参数变化的相邻两个 Poincaré 截点在相轨线上的时间差, 被称为 ISI 分岔图. 通过分岔图可以直观的分析出系统运动状态.

### (3) Lyapunov 指数

Lyapunov 指数是量化动力学系统稳定性和确定混沌的重要统计量. 它能够反映相空间中相邻轨道的扩张或收缩特性. 在混沌研究时, 通常只需计算出最大的 Lyapunov 指数, 根据最大 Lyapunov 指数的正负, 判断一个已知系统是否存在混沌. 若 Lyapunov 指数大于零, 说明在系统相空间中, 相邻轨道之间以指数速率相分离, 系统出现了混沌; 若 Lyapunov 指数小于零, 说明该系统在 Lyapunov 指数小于零的方向上, 轨道收缩, 运动稳定; 若 Lyapunov 指数等于零, 系统处于临界状态.

表 2-1 Lyapunov 指数的大小与各类吸引子的关系

Lyapunov 指数 ( $LE_1, LE_2, LE_3, LE_4, \dots$ )	吸引子的类型	维数 $D$
(-, -, -, -, ...)	不动点	$D = 0$
(0, -, -, -, ...)	周期	$D = 1$
(0, 0, -, -, ...)	拟周期	$D = 2$
(+, 0, -, -, ...)	混沌	$2 < D < 3$
(+, +, 0, -, ...)	超混沌	$D > 3$ (非整数)

#### (4)分形和分数维

若混沌是在时间尺度上反映了世界的复杂性态,那么分形则是在空间尺度上反映了世界的复杂性态.维数是定量描述吸引子几何复杂程度的物理量.在欧氏空间中,不管是平衡点还是周期性轨道,它们的维数都是整数.然而混沌运动轨道在相空间中经过无数多次拉伸、压缩及折叠变换以后,会形成无穷层次的自相似结构.因此,分数维是混沌的一个显著特征量.

#### (5)平衡点

在非线性系统中,通过对系统平衡点类型和性质的分析,可以了解系统的定态性质,平衡点的性质决定了系统的特征.

对于一个三阶的非线性自治系统,首先对该系统进行线性化处理,得到系统在平衡点处的特征方程,并求出其对应的三个特征值:  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .若特征值均为正实数,则该平衡点为不稳定结点;若特征值均为负实数,则该平衡点为稳定结点;若三个特征值中有两个正实数根和一个负实数根,则该平衡点为指标 2 的鞍点;若三个特征值中有一个正实数根和两个负实数根,则该平衡点为指标 1 的鞍点;若三个特征值中有一个实特征值  $\gamma$  和一对共轭复特征值  $\sigma + i\omega$ ,则称此类平衡点为鞍焦平衡点.

根据 Shilnikov 定理<sup>[31]</sup>可知,具有鞍焦平衡点是系统存在混沌运动的关键.而混沌运动轨迹由实特征值  $\gamma$  和共轭复特征值的实部  $\sigma$  决定.

表 2-2  $\gamma, \sigma$  的取值范围与平衡点类别的关系

$\gamma, \sigma$	平衡点类别
$\gamma > 0, \sigma < 0$	指标 1 的鞍焦平衡点
$\gamma > 0, \sigma > 0$	不稳定焦点
$\gamma < 0, \sigma > 0$	指标 2 的鞍焦平衡点
$\gamma < 0, \sigma < 0$	稳定焦点

指标 1 的鞍焦平衡点对应运动轨迹为连接两个涡卷之间的键带, 指标 2 的鞍焦平衡点对应运动轨迹为涡卷.

然而, 以上介绍的相轨迹图、Poincaré 截面图、分岔图、Lyapunov 指数、分形和分数维以及平衡点这些混沌特征量, 在物理意义上, 只有系统中存在大于零的 Lyapunov 指数时, 才认为在该系统中存在混沌现象.

## 2.3 混沌的定性分析方法

在研究动力系统的分岔行为时, 对于高维动力系统, 通常采用中心流形定理对系统进行降维, 即利用流形与对应子空间相切的特性, 求出系统在中心流形上的约化方程. Hopf 分岔是一类简单且重要的动态分岔问题, 是指参数变化经过分支值时, 系统从平衡状态过渡到周期轨道的现象. 此外, Hopf 分岔也是通向混沌的途径.

### 2.3.1 中心流形理论

#### (1) 稳定流形<sup>[55,57,63]</sup>

稳定流形主要研究非线性系统在双曲平衡点邻域内解的拓扑结构. 即当系统没有零特征值时, 该系统的拓扑性质可以用其线性化系统的平衡点附近的拓扑性质表示.

考虑  $n$  维非线性系统

$$\dot{x} = f(x) \tag{2-1}$$

设系统(2-1)的平衡点为  $x_0$ , 则系统(2-1)在平衡点  $x_0$  处的线性化系统为:

$$\dot{x} = A(x - x_0) \tag{2-2}$$

其中  $A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_0}$  为  $n \times n$  阶矩阵. 设矩阵  $A$  的特征值集为  $\sigma$ , 记  $\sigma = \sigma_- \cup \sigma_0 \cup \sigma_+$ , 其中  $\sigma_0$  表示  $\text{Re}(\lambda) = 0$  的特征值集,  $\sigma_-$  表示  $\text{Re}(\lambda) < 0$  的特征值集,  $\sigma_+$  表示  $\text{Re}(\lambda) > 0$  的特征值集. 记这些特征值集  $\sigma_0, \sigma_-, \sigma_+$  对应的特征子空间分别为:  $E^c, E^s$  和  $E^u$ , 其中  $E^c$  被称为系统(2-1)的中心子空间,  $E^s$  被称为系统(2-1)的稳定子空间,  $E^u$  被称为系统(2-1)的不稳定子空间.

对于系统(2-1)平衡点附近的局部稳定流形  $W_{Loc}^s(x_0)$ , 有以下定理成立, 同理对于局部不稳定流形  $W_{Loc}^u(x_0)$  亦有类似结论.

**引理 2.2(稳定流形定理<sup>[55,57,63]</sup>)** 设  $x_0$  为  $C^r$  系统(2-1)的双曲平衡点,  $E^s$  为系统(2-1)在平衡点  $x_0$  处线性化系统的稳定子空间, 并且  $\dim E^s = n_s$ , 则  $W_{Loc}^s(x_0)$  是  $n_s$  维  $C^r$  微分流形, 并且在平衡点  $x_0$  处与  $E^s$  相切.

(2)中心流形<sup>[48,58]</sup>

若系统(2-1)的平衡点  $x_0$  是非双曲的, 即系统(2-1)所对应的线性系统中存在实部为零的特征值. 不妨假设系数矩阵  $A$  仅存在零实部和负实部的特征值, 那么系统(2-1)经过适当的坐标变换后, 得到如下形式:

$$\begin{cases} \dot{u} = Bu + g(u, v) \\ \dot{v} = Cv + h(u, v) \end{cases}; (u, v) \in \mathbb{R}^{n_c} \times \mathbb{R}^{n_s} \quad (2-3)$$

其中, 矩阵  $B \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$  特征值的实部均为零, 矩阵  $C \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}$  特征值的实部均为负. 函数  $g, h \in C^r (r \geq 2)$ , 并满足以下条件:

$$g(0, 0) = 0, Dg(0, 0) = 0, h(0, 0) = 0, Dh(0, 0) = 0.$$

**定义 2.5(中心流形的定义<sup>[48,58]</sup>)** 若系统(2-3)有不变(局部不变)流形  $v = \psi(u)$ , 其中  $\psi$  是光滑的, 则

$$W_{Loc}^c(0) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^{n_c \times n_s} \mid v = \psi(u), |u| < \delta \ll 1, \psi(0) = 0, D\psi(0) = 0\}$$

称为系统(2-3)的中心流形(局部中心流形).

**引理 2.3(中心流形存在性定理<sup>[48,58]</sup>)** 系统(2-3)存在一个  $C^r (r \geq 2)$  的局部中心流形  $v = \psi(u)$ ,  $|u| < \delta$ ,  $\delta$  充分小, 系统(2-3)限制在该中心流形上的流满足:

$$\dot{\eta} = B\eta + g(\eta, \psi(\eta)), \quad \eta \in \mathbb{R}^{n_c}. \quad (2-4)$$

**引理 2.4(中心流形稳定性定理)** 系统(2-3)和(2-4)存在以下关系:

(a) 假设系统(2-4)  $\eta = 0$  的平衡点是稳定(渐进稳定/不稳定)的, 则系统(2-3)  $(u, v) = (0, 0)$  的平衡点也是稳定(渐进稳定/不稳定)的.

(b) 假设系统(2-4)  $\eta = 0$  的平衡点是稳定的, 并设  $(u(t), v(t))$  是系统(2-3)初始条件为  $(u(0), v(0))$  且靠近平衡点  $(0, 0)$  的解, 则存在系统(2-4)的一个解  $\eta(t)$ , 使得当

$t \rightarrow +\infty$  时, 有以下关系成立:

$$\begin{cases} u(t) = \eta(t) + O(e^{-\gamma_0 t}), \\ v(t) = \psi(\eta(t)) + O(e^{-\gamma_0 t}), \end{cases}$$

其中,  $\gamma_0$  为大于零的常数.

根据上述中心流形稳定性定理可知, 通过判断系统(2-4)在其  $\eta = 0$  的平衡点附近的动力学性质, 可以判定系统(2-3)在其  $(u, v) = (0, 0)$  的平衡点附近的动力学性质.

### 2.3.2 Hopf 分岔理论

#### (1) 二维 Hopf 分岔理论<sup>[56-58]</sup>

考虑平面系统

$$\dot{x} = f(x, y, \zeta), \quad \dot{y} = g(x, y, \zeta), \quad \zeta \in \mathbb{R}. \quad (2-5)$$

**定义 2.6**(Hopf 分岔的定义<sup>[56-58]</sup>) Hopf 分岔是由于系统平衡点稳定性的突然改变而产生孤立的周期解(极限环)的现象. 即此时平衡点特征值有一对纯虚根,  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \omega_0 > 0$ . 若极限环存在于参数  $\zeta$  大于分岔值的范围内, 则将其称为超临界 Hopf 分岔; 若极限环存在于参数  $\zeta$  小于分岔值的范围内, 则将其称为亚临界 Hopf 分岔.

**引理 2.5**(Hopf 分岔定理 1<sup>[56-58]</sup>) 假设  $O_\zeta(x_\zeta, y_\zeta)$  为系统(2-5)对应的线性系统的中心型奇点,  $|\zeta|$  充分小, 当  $\zeta = 0$ ,  $O_\zeta = O(0, 0)$  是非线性系统的稳定(或不稳定)的焦点; 当  $\zeta > 0 (< 0)$ ,  $O_\zeta$  是不稳定(或稳定)的焦点. 则当  $\zeta > 0 (< 0)$  时, 系统(2-5)在  $O$  点附近至少存在一个稳定(或不稳定)的极限环.

由上述定理可知, 在判定系统奇点的稳定性的同时, 也能够判定出系统周期解的存在性. 若系统有非奇异的线性部分, 则有如下结论.

**引理 2.6**(Hopf 分岔定理 2<sup>[56-58]</sup>) 若  $O(0, 0)$  为系统

$$I(\zeta): \dot{x} = f(x, \zeta), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad f \in C^1. \quad (2-6)$$

的奇点, 即  $f(0, 0) = 0$ . 设  $A(\zeta) = D_x f(x, \zeta)|_{O_\zeta}$ , 其中  $O_\zeta$  是  $I(\zeta)$  的奇点,  $\det A(\zeta) \neq 0$ ,  $A(\zeta)$  有一对共轭复根  $\alpha(\zeta) \pm i\omega(\zeta)$ . 若

(a)  $\alpha(0) = 0, \omega(0) > 0$ ;

(b)  $\left. \frac{d\alpha(\zeta)}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} \neq 0$ .

则当  $|\zeta|$  充分小, 系统(2-6)在  $\zeta = 0$  的某一侧邻域中至少有存在一个周期解, 并且当  $|\zeta| < \zeta_0$ , 参数的分岔值  $\zeta = 0$  是唯一的.

上述定理表明, 判定系统是否存在 Hopf 分岔, 仅需对系统的线性部分进行讨

论.

(2)高维 Hopf 分岔理论<sup>[56-60]</sup>

引理 2.7(高维 Hopf 分岔定理 1<sup>[56-58]</sup>) 设  $f(X, \mu)$ ,  $X \in R^n$ ,  $\mu \in R^1$  满足以下条件:

- (a) 对  $X = X^*(\mu)$ ,  $f(X^*, \mu) \equiv 0$ ;
- (b) 在  $(X, \mu) = (X^*(\mu), \mu_c)$  的邻域  $U$  内,  $f$  关于  $X, \mu$  解析;
- (c)  $f(X, \mu)$  在  $(X^*(\mu), \mu_c)$  点处对  $X$  的导算子为:

$$D_X f(X^*(\mu), \mu_c) = \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}.$$

其中  $A: R^2 \rightarrow R^2$  的特征根的实部均为 0;  $B: R^{n-2} \rightarrow R^{n-2}$  的特征根的实部均具有负实部, 且当  $t \rightarrow +\infty$  (或  $t \rightarrow -\infty$ ) 时, 系统的轨线在平面  $x_1 - x_2$  上的投影盘旋趋于原点. 对于系统

$$\dot{x} = f(x, \mu). \tag{2-7}$$

如果当  $\mu = \mu_c$  时,  $X = X^*(\mu)$  是渐进稳定(不稳定)的, 并且当  $\mu > \mu_c$  (或  $\mu < \mu_c$ ) 时是不稳定(渐进稳定)的, 则当  $\mu > \mu_c$  (或  $\mu < \mu_c$ ) 且  $|\mu - \mu_c|$  充分小时, 系统(2-7)在  $X = X^*(\mu)$  的邻域内有渐进稳定(不稳定)的闭轨.

引理 2.8(高维 Hopf 分岔定理 2<sup>[56-60]</sup>) 设  $f(X, \mu)$ ,  $X \in R^n$ ,  $\mu \in R^1$  满足以下条件:

- (a) 对  $X = X^*(\mu)$ ,  $f(X^*, \mu) \equiv 0$ ;
- (b) 在  $(X, \mu) = (X^*(\mu), \mu_c)$  的邻域  $U$  内,  $f$  关于  $X, \mu$  解析;
- (c)  $A(\mu_c) = D_X f(X^*(\mu), \mu_c)$  有一对共轭复根  $\lambda, \bar{\lambda}$ , 使得

$$\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu), \omega(\mu_c) = \omega_0 > 0, \alpha(\mu_c) = 0, \alpha'(\mu_c) \neq 0;$$

- (d)  $A(\mu_c)$  其余的特征根的实部均小于零.

那么, 当  $|\mu - \mu_c|$  充分小时, 系统至少存在一个闭轨  $\Gamma_\mu$ , 且  $\exists \mu_0 > 0$ , 对同一闭轨  $\Gamma$  的分岔值  $\mu = \mu_\Gamma$  在  $|\mu - \mu_c| < \mu_0$  中是唯一的.

(3)Hopf 分岔条件<sup>[61,62]</sup>

考虑非线性系统

$$\dot{x} = f(x), x \in R^n. \tag{2-8}$$

系统(2-8)在其平衡点处的特征方程可以写成如下形式:

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{2-9}$$

结合上述的 Hopf 分岔定理, 设  $\mu_0$  是系统(2-8)的 Hopf 分岔值, 则根据其定义, 可以把 Hopf 分岔的条件转化为<sup>[61,62]</sup>:

(a)  $\Delta_i(\mu_0) > 0, (i = 1, 2, \dots, n-2, n);$

(b)  $\Delta_{n-1}(\mu_0) = 0.$

其中  $\Delta_i (i = 1, 2, \dots, n-2, n)$  为多项式(2-9)式的 Routh-Hurwitz 行列式:

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

### 第三章 多涡卷 Chua 混沌电路动力学行为研究

本章主要通过反映混沌性质通常采用的特征量如平衡点、耗散性、Lyapunov 指数以及 Poincaré 截面等方法对改进的 Chua 电路进行动力学分析。

#### 3.1 改进的 Chua 电路模型

利用分段正弦函数替换经典 Chua 电路中的非线性项, 得到了一个可以生成多涡卷混沌吸引子的改进的 Chua 电路. 量纲状态方程如下<sup>[12]</sup>:

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{RC_1}(v_2 - v_1) - \frac{1}{C_1}g(v_1) \\ \frac{dv_2}{dt} = \frac{1}{RC_2}(v_1 - v_2) + \frac{1}{C_2}i_L \\ \frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{L}v_2 \end{cases} \quad (3-1)$$

其中

$$g(v_1) = \left(\frac{b\pi}{2a} - \frac{1}{R}\right)v_1 - \frac{b\pi}{4a}(|v_1 + 2ac| - |v_1 - 2ac|) - b \sin\left(\frac{\pi v_1}{2a} + d\right) \quad (3-2)$$

其无量纲状态方程可表示为:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - f(x)) \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = -\beta y \end{cases} \quad ; \quad (3-3)$$

其中

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b\pi}{2a}(x - 2ac) & ; \quad x \geq 2ac \\ -b \sin\left(\frac{\pi x}{2a} + d\right) & ; \quad -2ac < x < 2ac \\ \frac{b\pi}{2a}(x + 2ac) & ; \quad x \leq -2ac \end{cases} \quad (3-4)$$

这里,  $\alpha, \beta, a, b$  是常数, 生成具有以下关系  $n$  涡卷混沌吸引子:

$$n = c + 1$$

并且

$$d = \begin{cases} \pi, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

参数  $c$  控制分段函数  $f(x)$  的周期数, 当  $\alpha = 10.814$ ,  $\beta = 14$ ,  $a = 1.3$ ,  $b = 0.11$  时, 函数  $f(x)$  图像如图 3-1 所示. 此时该系统可以生成  $n$  涡卷混沌吸引子.

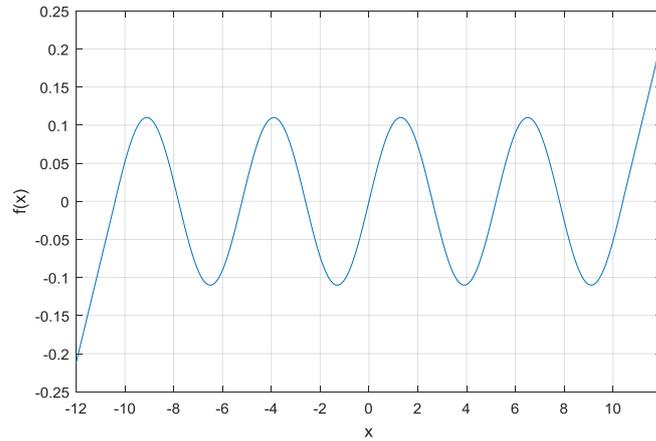


图 3-1  $c = 4$  时,  $f(x)$  的图像

参数  $\alpha = 10.814$ ,  $\beta = 14$ ,  $a = 1.3$ ,  $b = 0.11$ ,  $c$  分别取 1、2、5、8, 系统(3-3)分别能够生成 2 涡卷吸引子、3 涡卷吸引子、6 涡卷吸引子和 9 涡卷吸引子, 如图 3-2 所示.

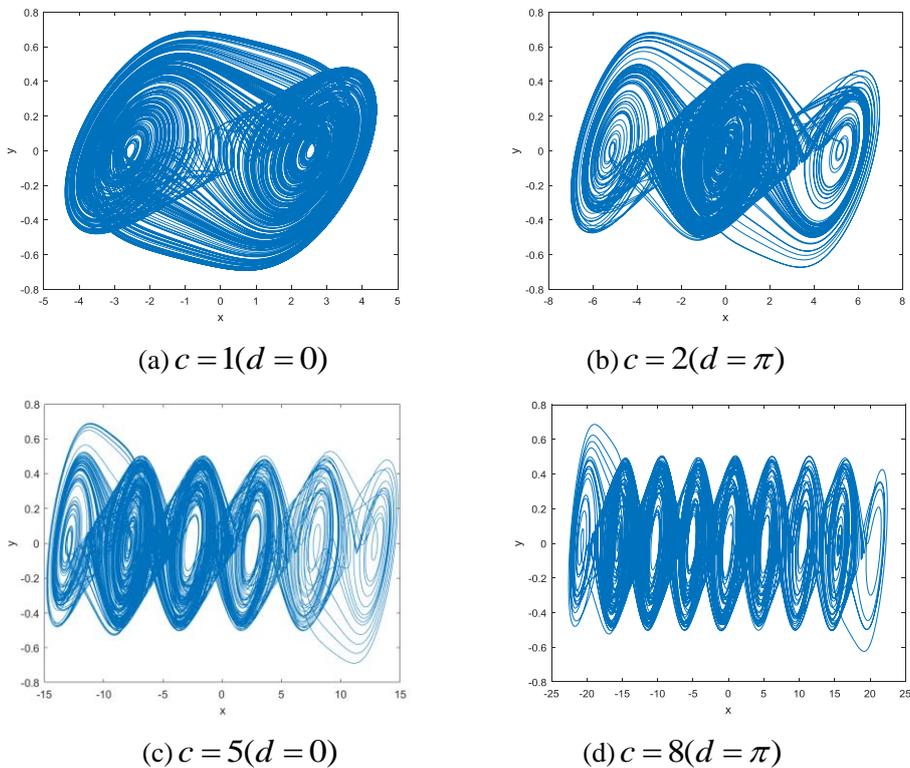


图 3-2 系统(3-3)单方向多涡卷吸引子相图

### 3.2 平衡点稳定性分析

为求解系统的平衡点, 令(3-3)式右边等于零, 得到以下方程组:

$$\begin{cases} \alpha(y - f(x)) = 0 \\ x - y + z = 0 \\ -\beta y = 0 \end{cases}; \quad (3-5)$$

系统的平衡点为:  $(x_{eq}, 0, -x_{eq})$ ,  $x_{eq}$  为非线性函数  $f(x) = 0$  的根.  $f(x)$  为分段函数, 因此需要分段求解系统的平衡点.

当  $x \geq 2ac$  时,  $x_{eq} = 2ac$ ,  $P_1(2ac, 0, -2ac)$ ;

当  $x \leq -2ac$  时,  $x_{eq} = -2ac$ ,  $P_2(-2ac, 0, 2ac)$ ;

当  $-2ac < x < 2ac$  时,  $x_{eq} = 2ak - \frac{2ad}{\pi}$ ,  $P_3(2ak - \frac{2ad}{\pi}, 0, -2ak + \frac{2ad}{\pi})$ , 其中  $(k = 0, \pm 1, \dots, \text{且 } k < c)$ .

系统(3-3)线性化的 Jacobian 矩阵为:

$$J = \begin{bmatrix} -\alpha f'(x) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}; \quad (3-6)$$

其中

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{b\pi}{2a}, & |x| \geq 2ac \\ -\frac{b\pi}{2a} \cos(\frac{\pi x}{2a} + d), & |x| < 2ac \end{cases} \quad (3-7)$$

**定理 3.1** 令  $a \neq 0$ , 且

(1) 当  $2a^2 + \alpha ab\pi > 0$ ,  $\alpha\beta ab > 0$  及  $(2a + \alpha b\pi)(\alpha b\pi - 2a\alpha) + 4a^2\beta > 0$ , 平衡点  $P_1$  和  $P_2$  是渐进稳定的; 否则, 平衡点  $P_1$  和  $P_2$  是不稳定的.

(2) 当  $\alpha\beta ab \cos k\pi < 0$ ,  $4a^2\beta - (2a - \alpha b\pi \cos k\pi)(\alpha b\pi \cos k\pi + 2a\alpha) > 0$ , 及  $2a^2 - \alpha ab\pi \cos k\pi > 0$  时, 平衡点  $P_3$  是渐进稳定的; 否则, 平衡点  $P_3$  是不稳定的.

证明: (1) 当  $|x| \geq 2ac$  时, 系统(3-3)在平衡点  $P_1$  或  $P_2$  处的特征方程为:

$$\lambda^3 + (1 + \frac{\alpha b\pi}{2a})\lambda^2 + (\frac{\alpha b\pi}{2a} - \alpha + \beta)\lambda + \frac{\alpha\beta b\pi}{2a} = 0 \quad (3-8)$$

令

$$A_1 = 1 + \frac{\alpha b\pi}{2a}, \quad A_2 = \frac{\alpha b\pi}{2a} - \alpha + \beta, \quad A_3 = \frac{\alpha\beta b\pi}{2a}.$$

根据 Routh-Hurwitz 条件, 计算下列行列式:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= A_1, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} A_1 & 1 \\ A_3 & A_2 \end{vmatrix} = A_1 A_2 - A_3, \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} A_1 & 1 & 0 \\ A_3 & A_2 & A_1 \\ 0 & 0 & A_3 \end{vmatrix} = A_3 \Delta_2.\end{aligned}$$

方程(3-3)的根均具有负实部的充分必要条件为:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0.$$

即当

$$2a^2 + \alpha ab\pi > 0, \alpha\beta ab > 0, (2a + \alpha b\pi)(\alpha b\pi - 2a\alpha) + 4a^2\beta > 0.$$

特征方程(3-8)式的根均具有负实部, 此时系统(3-3)的平衡点  $P_1$  和  $P_2$  是渐进稳定的, 否则, 平衡点  $P_1$  和  $P_2$  是不稳定的.

(2) 当  $|x| < 2ac$  时, 系统(3-3)在平衡点  $P_3$  处的特征方程为:

$$\lambda^3 + B_1\lambda^2 + B_2\lambda + B_3 = 0 \quad (3-9)$$

其中

$$B_1 = 1 - \frac{\alpha b\pi}{2a} \cos k\pi, B_2 = -\frac{\alpha b\pi}{2a} \cos k\pi - \alpha + \beta, B_3 = -\frac{\alpha\beta b\pi}{2a} \cos k\pi.$$

根据 Routh-Hurwitz 条件, 计算下列行列式:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= B_1, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} B_1 & 1 \\ B_3 & B_2 \end{vmatrix} = B_1 B_2 - B_3, \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} B_1 & 1 & 0 \\ B_3 & B_2 & B_1 \\ 0 & 0 & B_3 \end{vmatrix} = B_3 \Delta_2.\end{aligned}$$

当且仅当

$$\begin{aligned}\alpha\beta ab \cos k\pi &< 0, \\ 2a^2 - \alpha ab\pi \cos k\pi &> 0, \\ 4a^2\beta - (2a - \alpha b\pi \cos k\pi)(\alpha b\pi \cos k\pi + 2a\alpha) &> 0.\end{aligned}$$

特征方程(3-9)式的根均具有负实部, 此时系统(3-3)的平衡点  $P_3$  是渐进稳定的,

否则,平衡点  $P_3$  是不稳定的. 证毕.

当选取参数  $\alpha=10.814$ ,  $\beta=14$ ,  $a=1.3$ ,  $b=0.11$ ,  $c=1$  ( $d=0$ ), 得到系统 (3-3) 的三个平衡点:  $E_1(2.6, 0, -2.6)$ ,  $E_2(-2.6, 0, 2.6)$ ,  $E_3(0, 0, 0)$ .

系统(3-3)在  $E_1$  和  $E_2$  处的特征方程为:

$$\lambda^3 + 2.4373\lambda^2 + 4.6233\lambda + 20.1226 = 0$$

解得特征值:

$$\lambda_1 = -3.0681, \lambda_2 = 0.3154 + 2.5415i, \lambda_3 = 0.3154 - 2.5415i.$$

其中一个实特征根小于 0, 两个共轭复特征根的实部大于 0, 由表 2-2 可知, 这两个平衡点均为指标 2 的鞍焦点, 对应的系统轨迹为涡卷.

系统(3-3)在  $E_3$  处的特征方程为:

$$\lambda^3 - 0.4373\lambda^2 + 1.7487\lambda - 20.1226 = 0$$

解得特征值:

$$\lambda_1 = 2.6476, \lambda_2 = -1.1051 + 2.5257i, \lambda_3 = -1.1051 - 2.5257i.$$

其中一个实特征根大于 0, 两个共轭复特征根的实部小于 0, 因此这个平衡点为指标 1 的鞍焦点, 对应的系统轨迹为连接两个涡卷之间的键带.

### 3.3 耗散性分析

当系统在运动时, 其相空间体积  $V$  是收缩的, 这类系统我们称为耗散系统; 当体积  $V$  不变时, 系统称为保守系统. 可以通过系统相空间体积变化率来判断系统的耗散性.

$$\nabla V = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \quad (3-10)$$

若  $\nabla V < 0$ , 系统是耗散的;  $\nabla V = 0$ , 系统是保守的.

若系统为耗散系统, 则系统相体积的指数衰减率可表示为:

$$\frac{dV}{dt} = \nabla V \cdot V \quad (3-11)$$

即一个初始体积为  $V_0$  的体积元经过时间  $t$  收缩至体积元  $V_0 e^{t \nabla V}$ , 这意味着, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 包含系统轨线的每个体积元以指数速率  $\nabla V$  收缩到 0, 因此, 当  $\nabla V < 0$  时, 吸引子的整数维体积为零.

系统(3-3)相空间体积变化率为:

$$\nabla V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -\alpha f'(x) - 1 \quad (3-12)$$

当  $|x| \geq 2ac$  时,  $\nabla V = -\frac{\alpha b\pi}{2a} - 1$ . 当  $\frac{\alpha b\pi}{2a} + 1 > 0$  时, 系统(3-3)是耗散的, 相空间的体积元以指数形式收敛:

$$\frac{dV}{dt} = -\left(\frac{\alpha b\pi}{2a} + 1\right)V \quad (3-13)$$

解得

$$V = V_0 e^{-\left(\frac{\alpha b\pi}{2a} + 1\right)t} \quad (3-14)$$

即当  $t \rightarrow \infty$  时, 系统(3-3)的轨线以指数率  $-\left(\frac{\alpha b\pi}{2a} + 1\right)$  收缩到 0. 最终系统所有轨迹线会收敛至体积为 0 的一个集合中, 并逐渐运动固定在一个吸引子上.

当  $|x| < 2ac$  时,

$$\nabla V = \frac{\alpha b\pi}{2a} \cos\left(\frac{\pi x}{2a} + d\right) - 1. \quad (3-15)$$

系统(3-3)的耗散性与  $x$  有关.

(1) 当  $\frac{\pi x}{2a} + d \in [2k\pi, 2k\pi + \pi]$ , 即  $x \in [4ak - \frac{2ad}{\pi}, 2a(2k+1) - \frac{2ad}{\pi}]$ .

$$x > \frac{2a}{\pi}(2k\pi - d) + \frac{2a}{\pi} \arccos\left(\frac{2a}{\alpha b\pi}\right) \quad (3-16)$$

有  $\nabla V < 0$ , 系统是耗散的.

(2) 当  $\frac{\pi x}{2a} + d \in [2k\pi - \pi, 2k\pi]$ , 即  $x \in [2a(2k-1) - \frac{2ad}{\pi}, 4ak - \frac{2ad}{\pi}]$ .

$$x < \frac{2a}{\pi}(2k\pi - d) - \frac{2a}{\pi} \arccos\left(\frac{2a}{\alpha b\pi}\right) \quad (3-17)$$

有  $\nabla V < 0$ , 系统是耗散的.

综上所述, 当  $|x| \geq 2ac$ ,  $\frac{\alpha b\pi}{2a} + 1 > 0$  时, 系统(3-3)是耗散的; 当  $|x| < 2ac$ , 且  $x \in \left[2a(2k-1) - \frac{2ad}{\pi}, \frac{2a}{\pi}(2k\pi - d) - \frac{2a}{\pi} \arccos\left(\frac{2a}{\alpha b\pi}\right)\right) \cup \left(\frac{2a}{\pi}(2k\pi - d) + \frac{2a}{\pi} \arccos\left(\frac{2a}{\alpha b\pi}\right), 2a(2k+1) - \frac{2ad}{\pi}\right]$ , ( $k \in \mathbb{Z}$  且  $k < |c|$ ) 时, 系统(3-3)是耗散的.

### 3.4 数值仿真分析

#### 3.4.1 Lyapunov 指数与维数

Lyapunov 指数( $LE$ )是量化动态系统稳定性和确定混沌的重要统计量,它能够反映相空间中相邻轨道的扩张或收缩特性. 根据最大 Lyapunov 指数( $LLE$ )的正负,可以判断系统是否存在混沌. 若系统最大 Lyapunov 指数大于零,则系统处于混沌状态;若最大 Lyapunov 指数小于 0,则系统处于稳定状态;若最大 Lyapunov 指数等于 0,则系统处于临界状态.

选取参数  $\alpha=10.814$ ,  $\beta=14$ ,  $a=1.3$ ,  $b=0.11$ ,  $c=1$  ( $d=0$ ), 利用 MATLAB LET 工具箱, 计算系统(3-3)的三个 Lyapunov 指数分别为:  $LE_1=0.37933$ ,  $LE_2=0.0020172$ ,  $LE_3=-2.2567$ . 并得到系统的 Lyapunov 指数谱, 如图 3-3 所示. 系统的最大 Lyapunov 指数为正, 这是混沌状态的一个显著特征, 说明系统对初值及其敏感, 进一步验证了系统中存在混沌.

Lyapunov 维数  $D$ 为:

$$D = k + \frac{1}{|LE_{k+1}|} \sum_{i=1}^k LE_i \quad (3-18)$$

其中  $k$  由以下条件确定:

$$\sum_{i=1}^k LE_i \geq 0 \text{ 并且 } \sum_{i=1}^{k+1} LE_i < 0. \quad (3-19)$$

故

$$D = 2 + \frac{(LE_1 + LE_2)}{|LE_3|} = 2.169.$$

系统(3-3)的 Lyapunov 维数是分数维, 说明该系统的混沌吸引子具有复杂分形结构, 通常意义上, 分形即是空间尺度上的混沌, 因此, 再次证明了该系统中存在混沌现象.

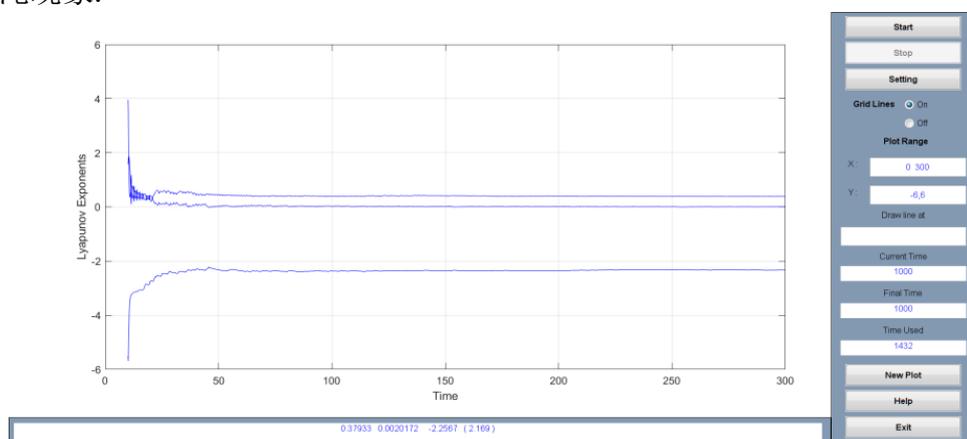


图 3-3 系统(3-3)的李雅普诺夫指数图

### 3.4.2 Poincaré截面

Poincaré 截面分析法是一种分析复杂动力学系统的基本方法. 即用 Poincaré 截面将连续运动的轨迹横截, 根据运动轨线与该截面交点的分布情况, 判断系统运动的形态. 若截面上是一片密集且无序的点, 并具有层次结构, 此时系统处于混沌状态, 做非周期的混沌运动; 若截面上只有一个或几个离散点, 则系统做周期运动; 若截面上是一条封闭曲线, 则系统在做拟周期运动.

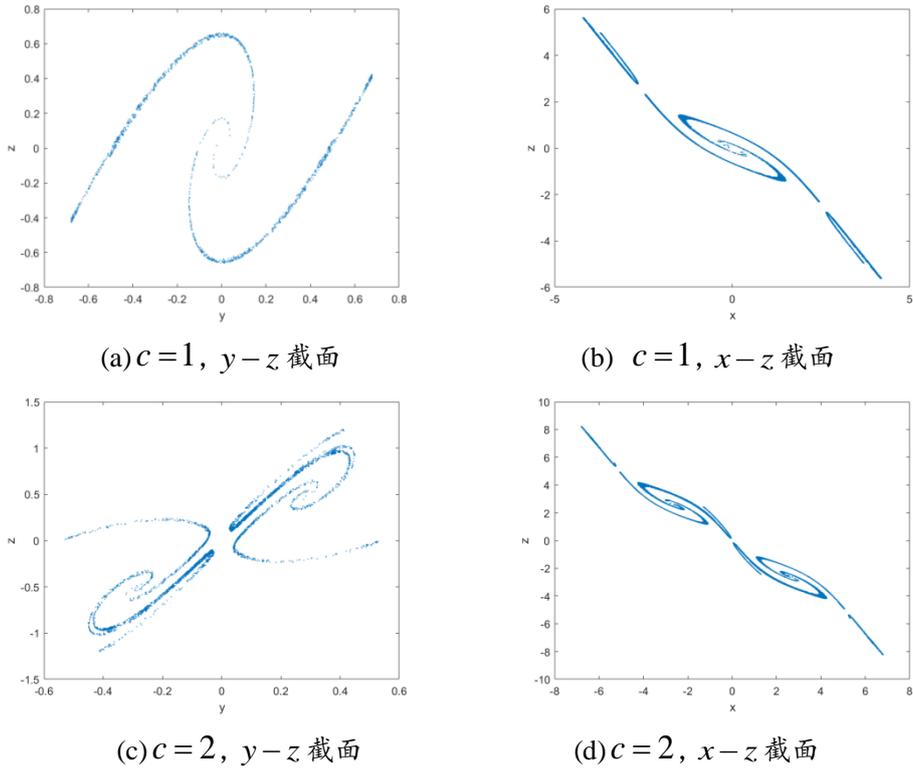


图 3-4 系统(3-3)的 Poincaré 截面图

由图 3-4 可以看出, 该系统的 Poincaré 截面上是一片片密集且无序的点, 由此可以进一步判定, 该系统存在混沌行为.

## 3.5 系统参数的影响

当系统的参数发生改变, 所研究系统的平衡点的稳定性也会随之变化, 即系统的运动状态发生改变.

### 3.5.1 参数 $\alpha$ 的影响

固定参数  $\beta = 14$ ,  $a = 1.3$ ,  $b = 0.11$ ,  $c = 1(d = 0)$ , 根据 Routh-Hurwitz 定理讨论

系统(3-3)渐进稳定时参数  $\alpha$  的变化范围.

(1)当  $|x| \geq 2ac$  时, 其特征方程为:

$$\lambda^3 + \left(1 + \frac{\alpha b \pi}{2a}\right) \lambda^2 + \left(\frac{\alpha b \pi}{2a} - \alpha + \beta\right) \lambda + \frac{\alpha \beta b \pi}{2a} = 0 \quad (3-20)$$

令

$$A_1 = 1 + \frac{\alpha b \pi}{2a}, \quad A_2 = \frac{\alpha b \pi}{2a} - \alpha + \beta, \quad A_3 = \frac{\alpha \beta b \pi}{2a}.$$

经计算, 当  $\alpha \in (0, 7.8841)$  时, 有  $\Delta_1 > 0$ ,  $\Delta_2 > 0$ ,  $\Delta_3 > 0$  成立, 即满足 Routh-Hurwitz 定理条件, 所以此时系统(3-3)的平衡点  $P_1, P_2$  是渐进稳定的.

在三维系统中, 系统发生 Hopf 分岔的必要条件为:

$$A_1 A_2 - A_3 = 0$$

固定其他参数不变, 当  $A_1 A_2 - A_3 = 0$  时,  $\alpha = \alpha_0 = 7.8841$ , 将其代入(3-20)式中, 解得三个特征根分别为:

$$\lambda_1 = -2.0479, \quad \lambda_2 = 2.6765i, \quad \lambda_3 = -2.6765i.$$

特征根中有一对纯虚根和一个负根, 满足 Hopf 分岔定理的条件, 因此, 当固定其他参数不变,  $\alpha = \alpha_0 = 7.8841$  时, 系统(3-3)在平衡点处发生 Hopf 分岔产生极限环.

(2)当  $|x| < 2ac$  时, 特征方程为:

$$\lambda^3 + \left(1 - \frac{\alpha b \pi}{2a}\right) \lambda^2 + \left(-\frac{\alpha b \pi}{2a} - \alpha + \beta\right) \lambda - \frac{\alpha \beta b \pi}{2a} = 0 \quad (3-21)$$

令

$$B_1 = 1 - \frac{\alpha b \pi}{2a}, \quad B_2 = -\frac{\alpha b \pi}{2a} - \alpha + \beta, \quad B_3 = -\frac{\alpha \beta b \pi}{2a}.$$

经计算, 当  $\alpha < 0$  时, 有  $\Delta_1 > 0$ ,  $\Delta_2 > 0$ ,  $\Delta_3 > 0$  成立, 即满足 Routh-Hurwitz 定理条件, 此时系统(3-3)的平衡点  $P_3$  是渐进稳定的.

综上所述, 固定其他参数不变, 当  $|x| \geq 2ac$ ,  $\alpha \in (0, 7.8841)$  时, 系统(3-3)的平衡点  $P_1$  和  $P_2$  是渐进稳定的; 并且系统在  $\alpha = \alpha_0 = 7.8841$  时发生 Hopf 分岔产生极限环. 当  $|x| < 2ac$  时,  $\alpha < 0$  时, 系统(3-3)的平衡点  $P_3$  是渐进稳定的.

数值模拟:

随着参数的变化, 系统可呈现不同的动力学状态, 固定其他参数不变,  $\alpha$  的变化范围是  $[0, 12]$ .

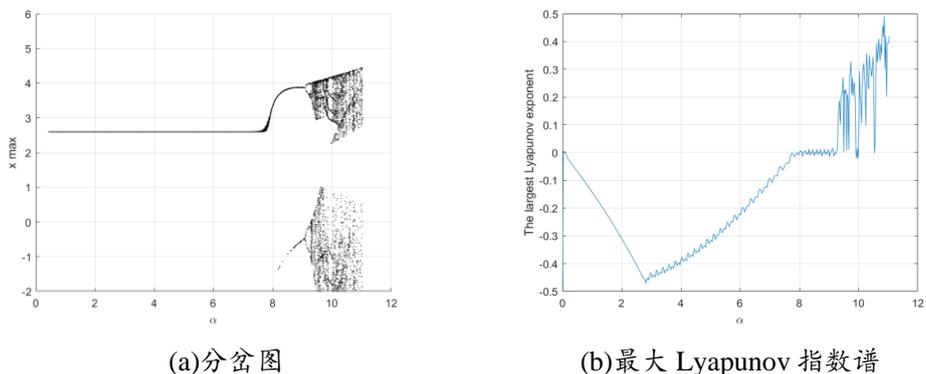
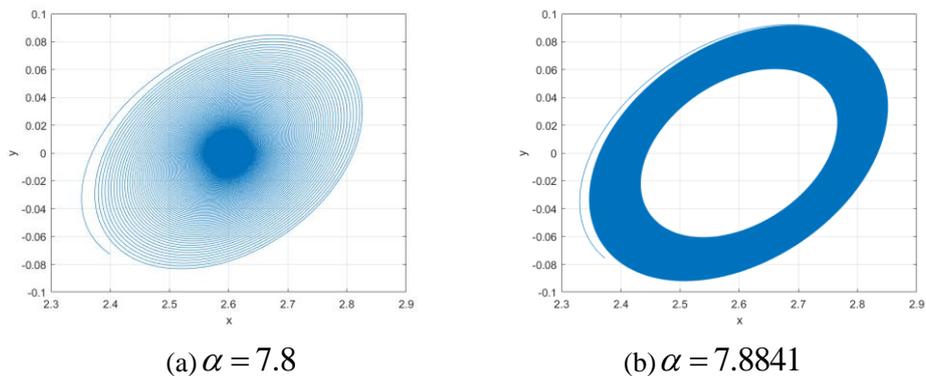


图 3-5 随参数  $\alpha$  变化的分岔图和最大 Lyapunov 指数谱

从图 3-5 随参数  $\alpha$  变化的分岔图和最大 Lyapunov 指数可以发现, 当  $\alpha \in (0, 7.8841)$  时, 系统的分岔图是一条平稳的直线, 同时系统最大 Lyapunov 指数小于 0, 说明此时系统处于稳定状态, 其运动轨迹逐渐的趋向系统的平衡点. 当  $\alpha \in [9.3, 9.89) \cup (10, 11.04)$  时, 系统(3-3)的最大 Lyapunov 指数大于 0, 说明此时该系统处于混沌状态. 当  $\alpha \in [7.8841, 9.3) \cup [9.89, 10]$  时, 出现了大量的周期窗口, 说明此时系统做周期性运动, 能够产生各种各样的周期性轨道; 并且该系统在混沌区域  $\alpha = 10.53$  的邻域范围内也产生了一个周期窗口, 此时系统也能够产生不同的周期性轨道.

通过分岔图和最大 Lyapunov 指数谱可以发现该系统在参数变化范围内产生了大量且复杂的动力学行为. 为了更直观的观察系统随参数  $\alpha$  变化时丰富的动力学行为, 下面通过选取不同区域内的  $\alpha$  值得到系统的一些吸引子, 其图像如图 3-6 所示.



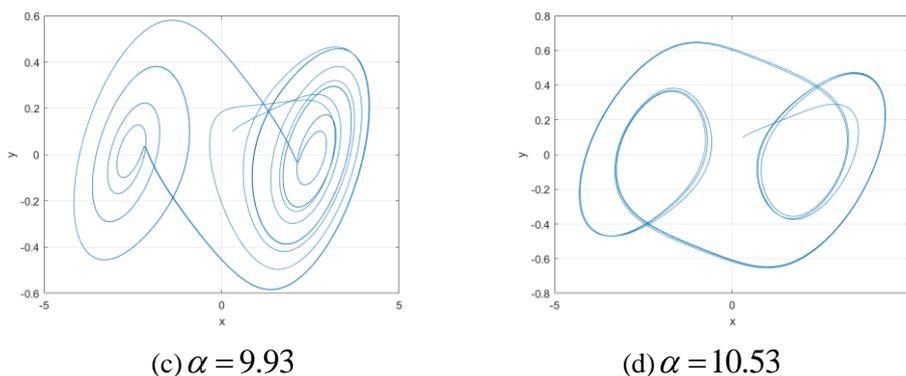


图 3-6 参数  $\alpha$  变化时系统(3-3)的相图

根据上述稳定性分析以及图 3-5 系统随参数  $\alpha$  变化的分岔图和最大 Lyapunov 指数谱可知, 当  $\alpha \in (0, 7.8841)$  时, 系统处于稳定状态, 即当参数  $\alpha = 7.8$  时, 如图 3-6(a)所示, 系统的运动轨迹趋于一个平衡点; 当  $\alpha = 7.8841$ , 如图 3-6(b)所示, 此时系统在该处发生 Hopf 分岔产生极限环; 当  $\alpha \in [7.8841, 9.3) \cup [9.89, 10]$  时, 系统出现了大量的周期窗口, 并且该系统在混沌区域  $\alpha = 10.53$  的邻域内出现了单个周期窗口, 如图 3-6(c)、(d)所示, 此时系统产生了不同复杂的周期性轨道.

同理, 可以讨论其他参数对系统(3-3)动力学行为的影响.

### 3.5.2 参数 $\beta$ 的影响

固定参数  $\alpha = 10.814$ ,  $a = 1.3$ ,  $b = 0.11$ ,  $c = 1(d = 0)$ .

(1) 当  $|x| \geq 2ac$  时,  $\beta \in (22.8540, +\infty)$ , 满足 Routh-Hurwitz 定理条件, 此时系统(3-3)的平衡点  $P_1, P_2$  是渐进稳定的.

并且当  $A_1 A_2 - A_3 = 0$  时,  $\beta = \beta_0 = 22.854$ . 将  $\beta = \beta_0 = 22.854$  代入特征方程(3-20)式中, 解得特征根分别为:

$$\lambda_1 = -2.4373, \lambda_2 = 3.6712i, \lambda_3 = -3.6712i.$$

特征根中有一对纯虚根和一个负根, 满足 Hopf 分岔定理的条件, 此时系统(3-3)在平衡点处发生 Hopf 分岔产生极限环.

(2) 当  $|x| < 2ac$  时,  $\Delta_1 = 1 - \frac{ab\pi}{2a} = -0.4373 < 0$ , 不满足 Routh-Hurwitz 定理条件, 此时, 无论  $\beta$  取何值, 系统(3-3)的平衡点  $P_3$  都是不稳定的.

综上所述, 固定其他参数不变, 当  $\beta \in (22.8540, +\infty)$  时, 系统(3-3)的平衡点  $P_1$  和  $P_2$  是渐进稳定的, 并且系统在  $\beta = \beta_0 = 22.854$  时发生 Hopf 分岔产生极限环.

数值模拟:

固定其他参数不变,  $\beta$  的变化范围是  $[12, 24]$ .

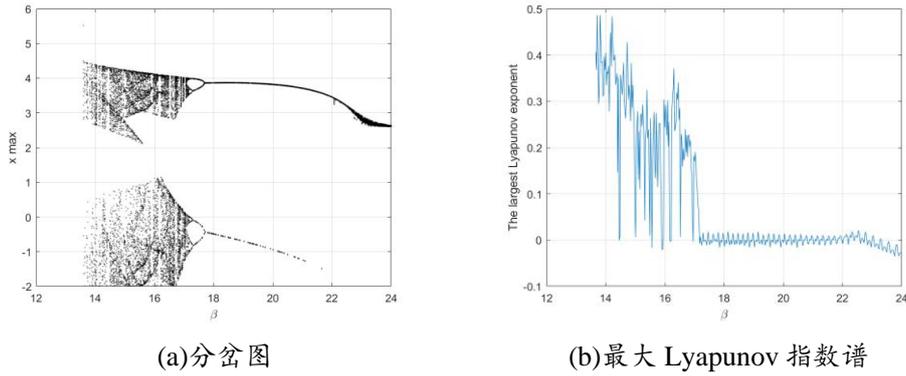
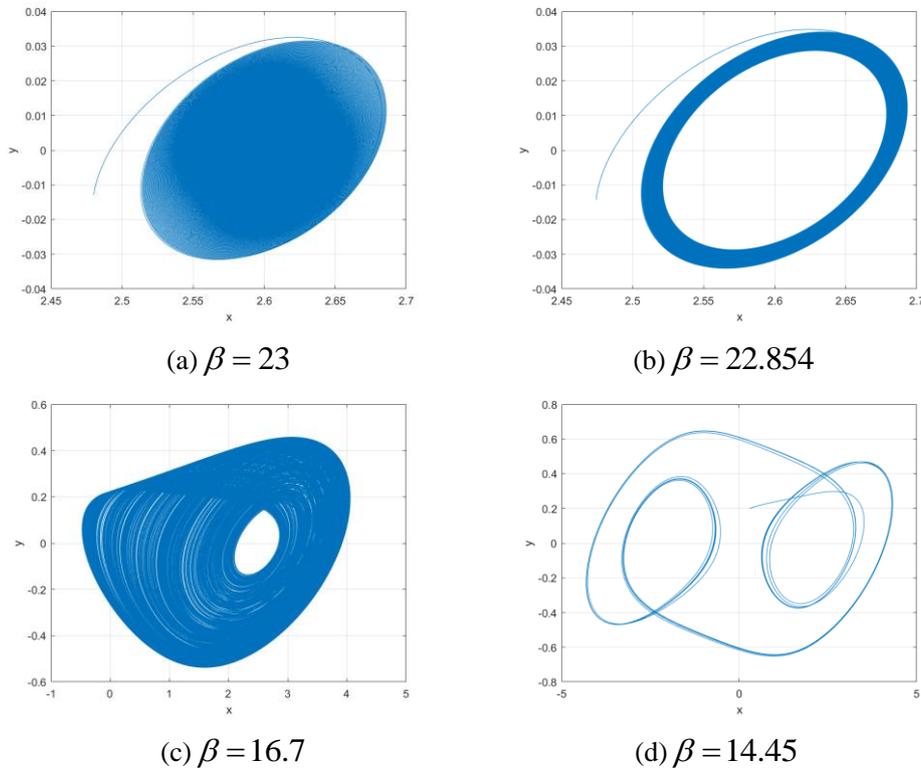


图 3-7 随参数  $\beta$  变化的分岔图和最大 Lyapunov 指数谱

由图 3-7 随参数  $\beta$  变化的分岔图和最大 Lyapunov 指数谱可以看出, 当  $\beta \in (22.854, 24]$  时, 系统的分岔图趋于平稳的一条直线, 并且最大 Lyapunov 指数小于 0, 说明此时系统处于稳定的状态. 当  $\beta \in [13.65, 17.15]$  时, 该系统处于混沌状态. 当  $\beta \in (17.15, 22.854]$  时, 出现了大量的周期窗口, 说明此时系统做周期性运动; 并且该系统在混沌区域内的  $\beta = 14.45, 15.33, 15.91, 16.21$  以及  $\beta = 16.94$  的邻域范围内分别出现了单个周期窗口, 此时系统也能够产生不同的周期性轨道.

为了更直观的观察系统随参数  $\beta$  变化时丰富的动力学行为, 下面通过选取不同区域内的  $\beta$  值得到系统的一些吸引子, 其图像如图 3-8 所示.



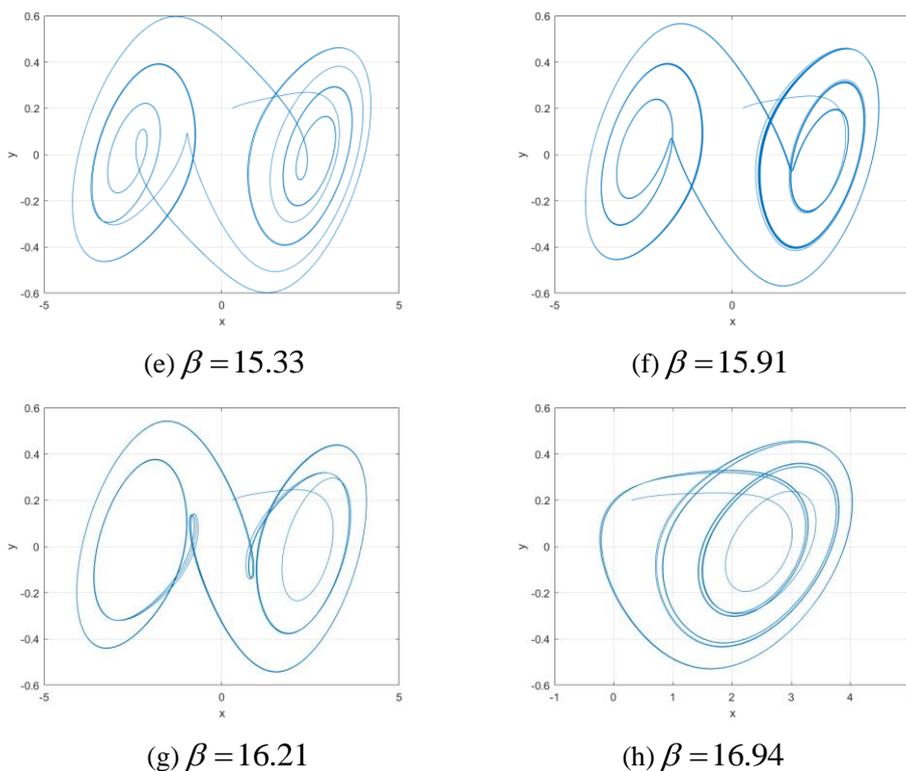


图 3-8 参数  $\beta$  变化时系统(3-3)的相图

结合上述随参数  $\beta$  变化的稳定性分析以及图 3-7 随参数  $\beta$  变化的分岔图和最大 Lyapunov 指数谱可知, 当  $\beta \in (22.854, 24]$  时, 系统处于稳定状态, 即当参数  $\beta = 23$  时, 如图 3-8(a)所示, 系统的运动轨迹趋于一个平衡点; 当  $\beta = 22.854$  时, 系统发生 Hopf 分岔产生极限环, 如图 3-8(b)所示; 当  $\beta \in (17.15, 22.854]$  时, 系统出现了大量的周期窗口, 并且该系统在混沌区域内的  $\beta = 14.45, 15.33, 15.91, 16.21$  以及  $\beta = 16.94$  的邻域范围内分别出现了单个周期窗口, 如图 3-8(d)、(e)、(f)、(g)、(h)所示, 此时系统产生了各种各样复杂的周期性轨道。

### 3.5.3 参数 $b$ 的影响

固定参数  $\alpha = 10.814$ ,  $\beta = 14$ ,  $a = 1.3$   $c = 1$  ( $d = 0$ ).

(1) 当  $|x| \geq 2ac$  时,  $b \in (0, 0.0257) \cup (0.7253, +\infty)$ , 满足 Routh-Hurwitz 定理条件, 此时系统(3-3)的平衡点  $P_1, P_2$  是渐进稳定的。

并且当  $A_1 A_2 - A_3 = 0$  时, 有  $b = b_0 = 0.0257$  和  $b = b_1 = 0.7253$ , 分别将  $b_0$  和  $b_1$  代入特征方程(3-20)中。

当  $b = b_0 = 0.0257$  时, 解得三个特征根为:

$$\lambda_1 = -1.3352, \lambda_2 = 1.8764i, \lambda_3 = -1.8764i.$$

当  $b = b_1 = 0.7253$  时, 解得三个特征根为:

$$\lambda_1 = -10.4773, \lambda_2 = 3.5586i, \lambda_3 = -3.5586i.$$

解得的特征根中均有一对纯虚根和一个负根,即满足 Hopf 分岔定理条件,因此,当  $b = b_0 = 0.0257$  和  $b = b_1 = 0.7253$  时,系统(3-3)在平衡点处发生 Hopf 分岔产生极限环.

(2) 当  $|x| < 2ac$  时,  $b \in (-\infty, -0.7253) \cup (-0.0257, 0)$ , 此时系统(3-3)的平衡点  $P_3$  是渐进稳定的.

并且当  $B_1 B_2 - B_3 = 0$  时, 有  $b = b_2 = -0.0257$ ,  $b = b_3 = -0.7253$ . 分别将  $b_2$  和  $b_3$  代入特征方程(3-21)式中.

当  $b = b_2 = -0.0257$  时, 解得三个特征根为:

$$\lambda_1 = -1.3352, \lambda_2 = 1.8764i, \lambda_3 = -1.8764i.$$

当  $b = b_3 = -0.7253$  时, 解得三个特征根为:

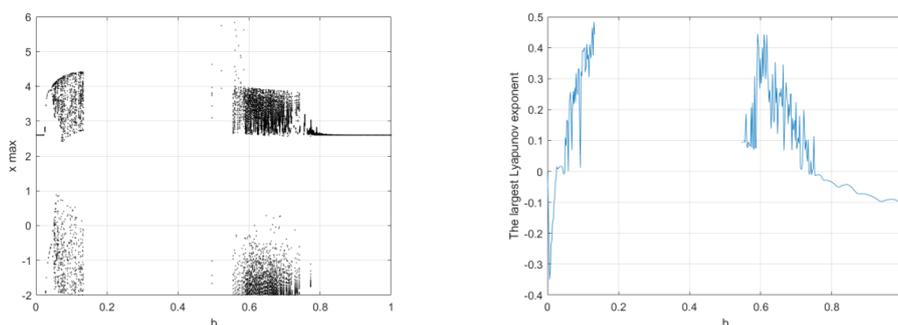
$$\lambda_1 = -10.4773, \lambda_2 = 3.5586i, \lambda_3 = -3.5586i.$$

特征根中均有一对纯虚根和一个负根,满足 Hopf 分岔定理条件,因此,固定其他参数不变,当  $b = b_2 = -0.0257$  和  $b = b_3 = -0.7253$ , 系统(3-3)在平衡点  $P_3$  处发生 Hopf 分岔产生极限环.

综上所述,固定其他参数不变,当  $b \in (0, 0.0257) \cup (0.7253, +\infty)$  时,系统(3-3)的平衡点  $P_1$  和  $P_2$  是渐进稳定的,并且当  $b = b_0 = 0.0257$  和  $b = b_1 = 0.7253$  时,系统(3-3)在平衡点处发生 Hopf 分岔产生极限环.当  $b \in (-\infty, -0.7253) \cup (-0.0257, 0)$  时,平衡点  $P_3$  是渐进稳定的,且当  $b = b_2 = -0.0257$  和  $b = b_3 = -0.7253$  时,系统在平衡点  $P_3$  处发生 Hopf 分岔产生极限环.

数值模拟:

固定其他参数不变,  $b$  的变化范围是  $[0, 1]$ .



(a) 分岔图

(b) 最大 Lyapunov 指数谱

图 3-9 随参数  $b$  变化的分岔图和最大 Lyapunov 指数谱

根据图 3-9 随参数  $b$  变化的分岔图和最大 Lyapunov 指数谱可以看出, 当  $b \in (0, 0.0257) \cup (0.7253, 1]$  时, 系统处于稳定状态, 此时系统的最大 Lyapunov 指数小于 0; 当  $b \in [0.05, 0.1324] \cup [0.5531, 0.7253]$  时, 系统(3-3)的最大 Lyapunov 指数总是大于 0, 此时该系统处于混沌状态; 当  $b \in [0.0257, 0.05]$  以及在  $b = 0.7253$  附近

的邻域内, 出现了周期窗口, 此时系统(3-3)能够产生各种各样的周期性轨道. 下面通过选择不同区间里的  $b$  值得到系统的一些吸引子. 其图像如图 3-10 所示.

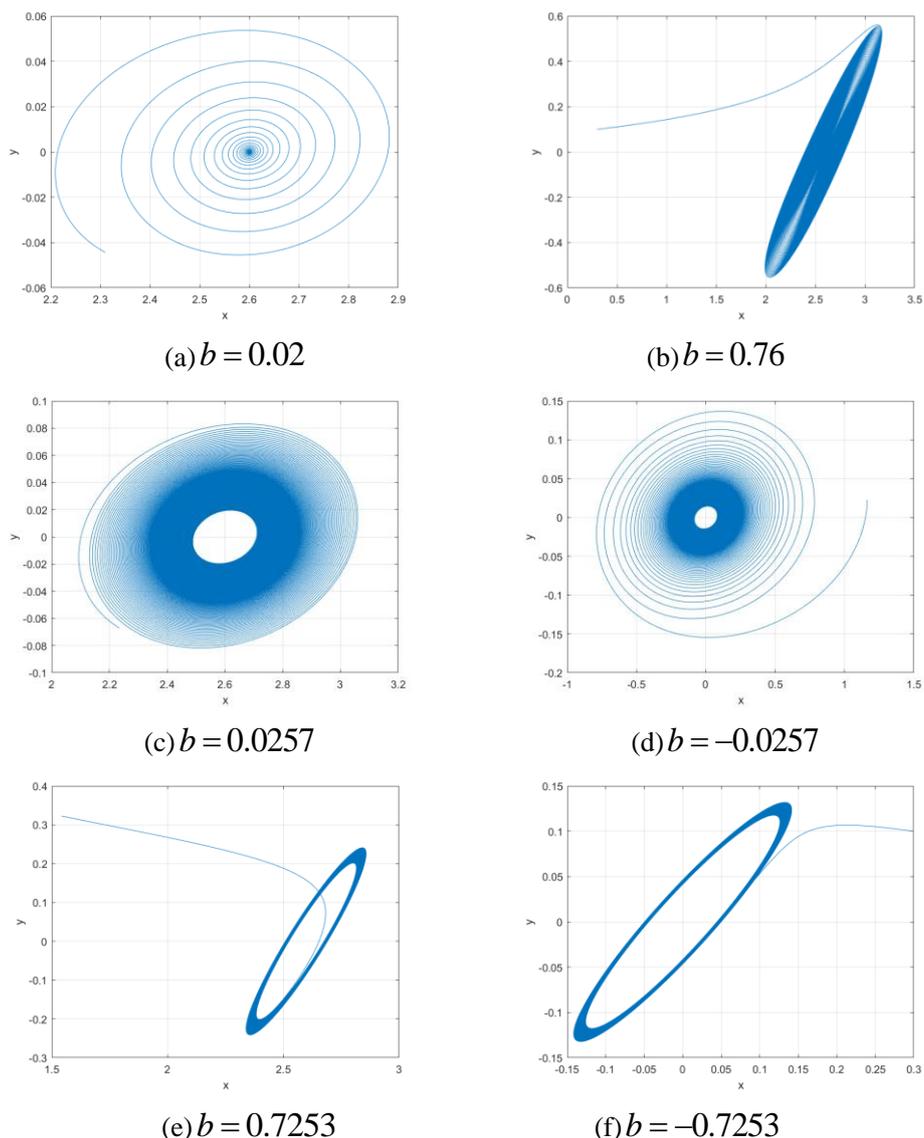


图 3-10 参数  $b$  变化时系统(3-3)的相图

根据上述稳定性分析以及图 3-9 随参数  $b$  变化的分岔图和最大 Lyapunov 指数谱可知, 当  $b \in (0, 0.0257) \cup (0.7253, 1]$  时, 系统处于稳定状态, 如图 3-10(a)、(b) 所示, 系统的运动轨迹趋于平衡点; 当  $b = \pm 0.0257$  和  $b = \pm 0.7253$  时, 如图 3-10(c)、(d)、(e)、(f) 所示, 该系统在平衡点处发生 Hopf 分岔, 产生了极限环.

### 3.5.4 参数 $a$ 的影响

固定参数  $\alpha = 10.814$ ,  $\beta = 14$ ,  $b = 0.11$ ,  $c = 1(d = 0)$ .

(1) 当  $|x| \geq 2ac$  时,  $a \in (0, 0.1971) \cup (5.5586, +\infty)$ , 满足 Routh-Hurwitz 定理条

件, 此时系统(3-3)的平衡点  $P_1, P_2$  是渐进稳定的.

并且当  $A_1 A_2 - A_3 = 0$  时,  $a = a_0 = 0.1971$ ,  $a = a_1 = 5.5586$ , 将  $a_0, a_1$  分别代入(3-20)式中, 求特征值.

$a = a_0 = 0.1971$  时, 解得三个特征根为:

$$\lambda_1 = -10.4801, \lambda_2 = 3.5561i, \lambda_3 = -3.5561i.$$

$a = a_1 = 5.5586$  时, 解得三个特征根为:

$$\lambda_1 = -1.3362, \lambda_2 = 1.8767i, \lambda_3 = -1.8767i.$$

上述求解的特征根中均有一对纯虚根和一个负根, 满足 Hopf 分岔定理的条件, 因此, 固定其他参数不变, 当  $a = a_0 = 0.1971$  和  $a = a_1 = 5.5586$  时, 系统(3-3)在平衡点处发生 Hopf 分岔产生极限环.

(2) 当  $|x| < 2ac$  时,  $a \in (-\infty, -5.5586) \cup (-0.1971, 0)$ , 满足 Routh-Hurwitz 定理的条件, 由于  $a > 0$ , 所以此时系统(3-3)的平衡点是不稳定的.

综上所述, 当  $a \in (0, 0.1971) \cup (5.5586, +\infty)$  时, 平衡点  $P_1, P_2$  是渐进稳定的; 当  $a = a_0 = 0.1971$  和  $a = a_1 = 5.5586$  时, 系统在平衡点处发生 Hopf 分岔产生极限环.

数值模拟:

固定其他参数不变,  $a$  的变化范围是  $(0, 7]$ .

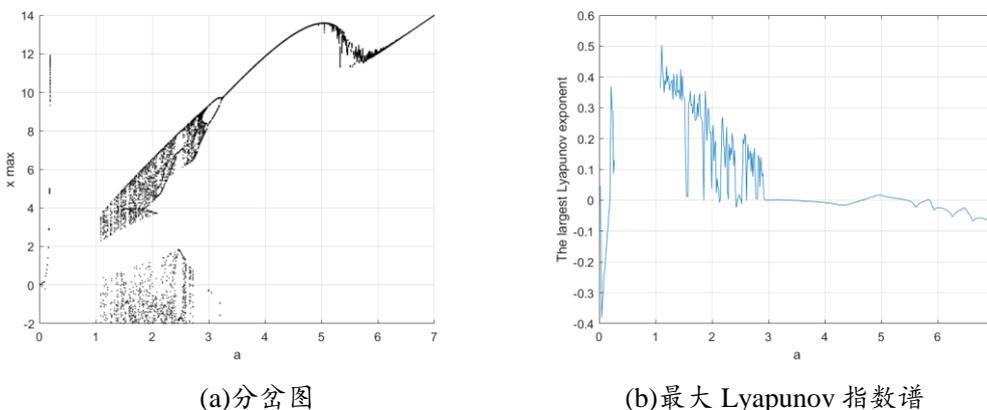
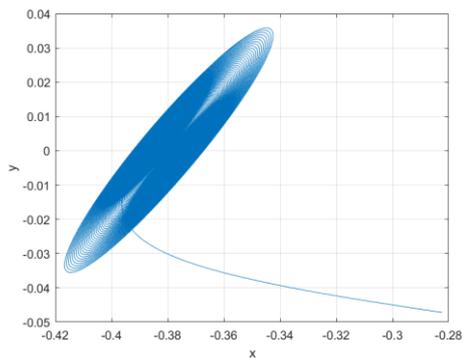


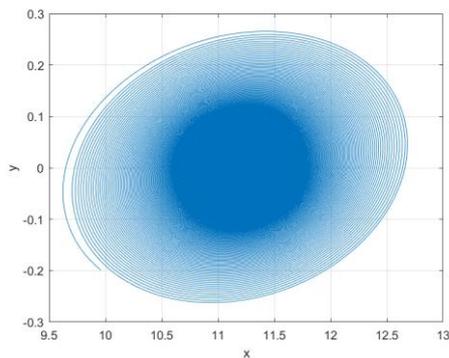
图 3-11 随参数  $a$  变化的分岔图和最大 Lyapunov 指数谱

从图 3-11 随参数  $a$  变化的分岔图和最大 Lyapunov 指数谱可以知道, 当  $a \in (0.1971, 0.24] \cup [1.08, 2.413) \cup (2.539, 2.91]$  时, 系统(3-3)处于混沌状态; 当  $a \in [2.413, 2.539]$  并且在混沌区域  $a = 1.852, 2.131$  及  $2.61$  的邻域内, 均出现了周期窗口, 此时该系统能够产生各种各样复杂的周期性轨道; 当  $a \in (2.91, 5.5586]$  及  $a = 0.1971$  的邻域内时, 系统做周期运动; 当  $a \in (0, 0.1971) \cup (5.5586, 7]$  时, 系统处于稳定状态.

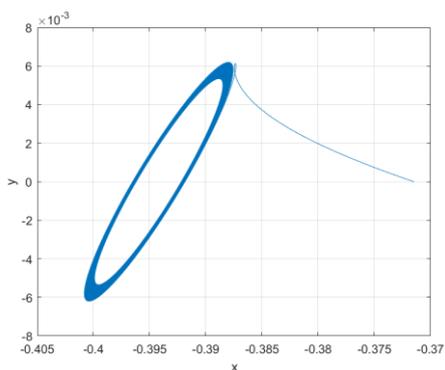
下面通过选取不同区域内的  $a$  值得到系统的一些吸引子, 更直观的观察系统复杂的动力学行为, 其图像如图 3-12 所示.



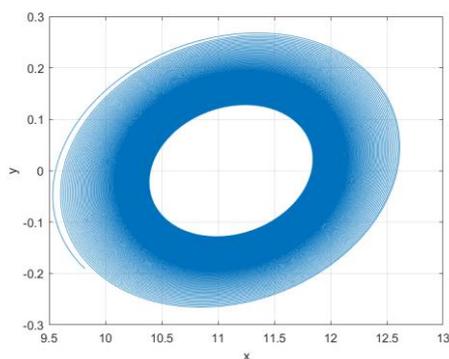
(a)  $a = 0.19$



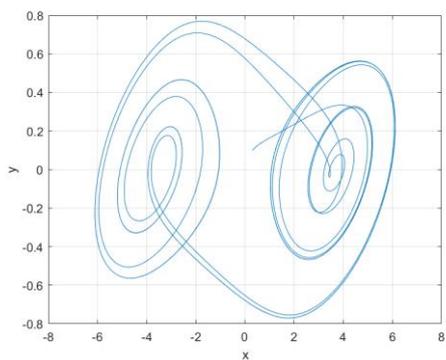
(b)  $a = 5.6$



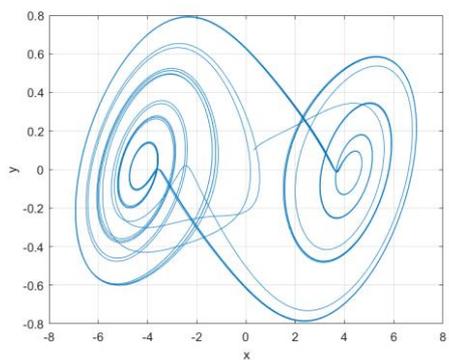
(c)  $a = 0.1971$



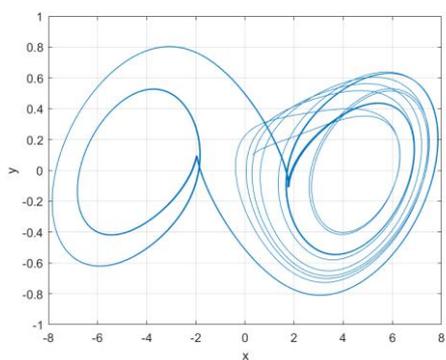
(d)  $a = 5.5586$



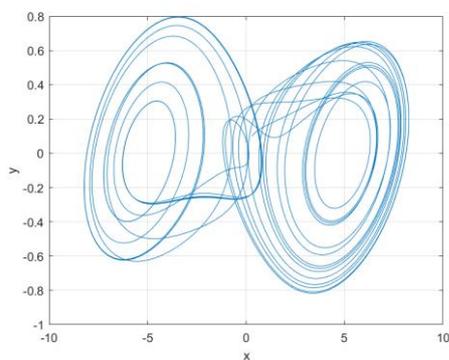
(e)  $a = 1.852$



(f)  $a = 2.131$



(g)  $a = 2.46$



(h)  $a = 2.61$

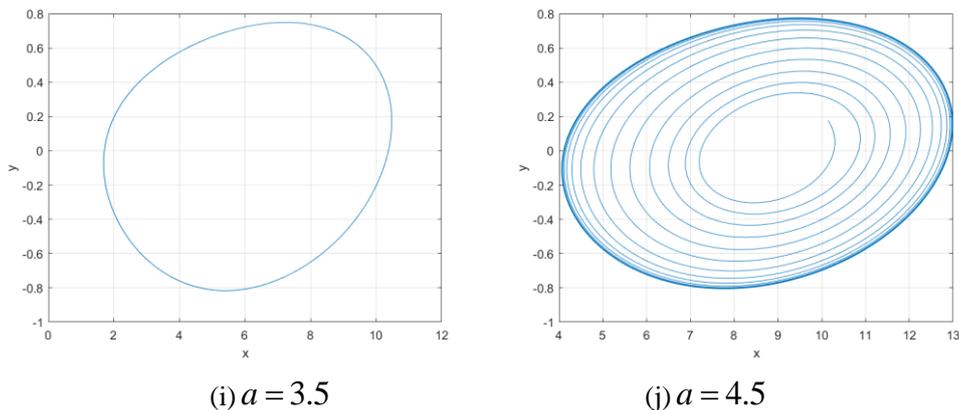


图 3-12 参数  $a$  变化时系统(3-3)的相图

根据上述稳定性分析以及随参数  $a$  变化的分岔图和最大 Lyapunov 指数谱可知, 当  $a \in (0, 0.1971) \cup (5.5586, 7]$  时, 系统处于稳定状态, 如图 3-12(a)、(b)所示, 此时系统的运动轨迹趋于平衡点; 并且当  $a = 0.1971$  和  $a = 5.5586$  时, 系统在平衡点处发生 Hopf 分岔产生了极限环, 如图 3-12(c)、(d)所示. 当  $a \in [2.413, 2.539]$  时, 以及在混沌区域  $a = 1.852, 2.131$  和  $2.61$  的邻域内, 如图 3-12(e)、(f)、(g)、(h)所示, 此时系统产生了各种各样复杂的周期性轨道; 当  $a \in (2.91, 5.5586]$  时, 如图 3-12(e)、(f)所示, 系统做周期运动, 此时系统出现了周期轨道.

### 3.6 本章小结

本章针对改进的 Chua 电路展开研究, 首先讨论了该系统平衡点的稳定性, 该系统的三类平衡点均为不稳定的鞍焦点, 文中分别记为  $P_1, P_2, P_3$ , 其中  $P_1, P_2$  为指标 2 的鞍焦平衡点,  $P_3$  为指标 1 的鞍焦平衡点. 通过分析系统的耗散性可知, 系统的耗散性与变量  $x$  有关, 当  $|x| \geq 2ac, \frac{\alpha b \pi}{2a} + 1 > 0$  时, 系统是耗散的; 当  $|x| < 2ac$  且  $x \in \left[ 2a(2k-1) - \frac{2ad}{\pi}, \frac{2a}{\pi}(2k\pi-d) - \frac{2a}{\pi} \arccos\left(\frac{2a}{\alpha b \pi}\right) \right] \cup \left[ \frac{2a}{\pi}(2k\pi-d) + \frac{2a}{\pi} \arccos\left(\frac{2a}{\alpha b \pi}\right), 2a(2k+1) - \frac{2ad}{\pi} \right]$ , 其中  $(k \in \mathbb{Z} \text{ 且 } k < |c|)$ , 此时系统是耗散的. 然后通过相轨迹图、Lyapunov 指数与维数以及 Poincaré 截面这些数值计算方法对该系统进行数值模拟, 数值模拟结果与理论分析一致. 最后利用分岔图和最大 Lyapunov 指数, 分析了参数变化的影响, 结果表明, 该系统存在丰富的动力学特性, 且具有明显向混沌演化的行为.

## 第四章 网格多涡卷混沌吸引子

本章基于改进的 Chua 电路, 通过引入一个双曲正切函数, 构造出一个新的能产生双向网格多涡卷吸引子的混沌系统. 并对系统进行了平衡点稳定性分析和耗散性分析, 通过数值计算的方法对系统进行了定量分析, 证实系统的混沌特性. 最后讨论了参数变化对系统动力学行为的影响.

### 4.1 网格多涡卷混沌吸引子模型

基于改进的 Chua 电路模型, 在其  $y$  方向上引入一个非线性项, 得到如下的模型:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - g(y) - f(x)), \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -\beta(y - g(y)), \end{cases} \quad (4-1)$$

其中

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b\pi}{2a}(x - 2ac), & x \geq 2ac \\ -b \sin\left(\frac{\pi x}{2a} + d\right), & -2ac < x < 2ac; \\ \frac{b\pi}{2a}(x + 2ac), & x \leq -2ac \end{cases} \quad (4-2)$$

$$g(y) = q[-\tanh(my) + \sum_{j=0}^N \tanh(m(y + 2jq)) + \sum_{j=0}^N \tanh(m(y - 2jq))] \triangleq g_1(y) \quad (4-3)$$

此时, 系统(4-1)在  $y$  方向上可以产生  $(2N + 2)$  个涡卷.

$$g(y) = q\left[\sum_{j=0}^N \tanh(m(y + (2j+1)q)) + \sum_{j=0}^N \tanh(m(y - (2j+1)q))\right] \triangleq g_2(y) \quad (4-4)$$

此时, 系统(4-1)在  $y$  方向上可以产生  $(2N + 3)$  个涡卷.

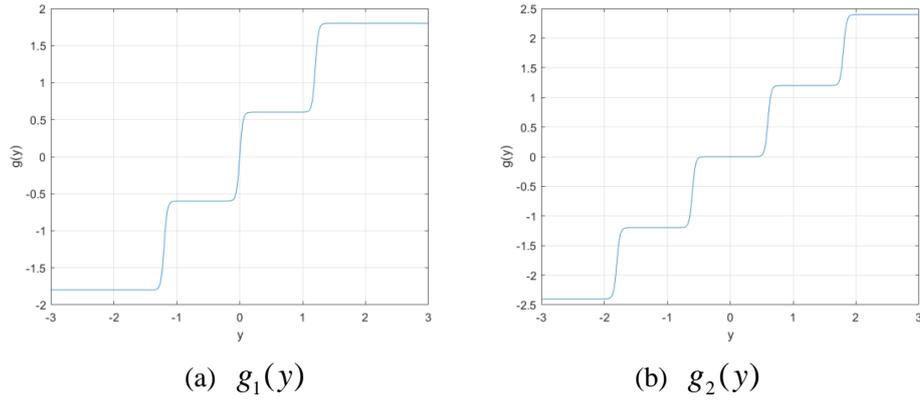


图 4-1  $m = 20, q = 0.6, N = 1$ 时,  $g(y)$  的函数图像

这里,  $f(x)$  控制  $x$  方向的涡卷数目,  $x$  方向上可以产生  $n$  个涡卷;  $g(y)$  控制  $y$  方向的涡卷数目.  $\alpha, \beta, a, b, c, d, m, q$  为系统参数. 当参数取  $\alpha = 10.814, \beta = 14, a = 1.3, b = 0.11, m = 20, q = 0.6, c = n - 1$ , 系统(4-1)可以产生双向网格多涡卷混沌吸引子, 如图 4-2 所示.

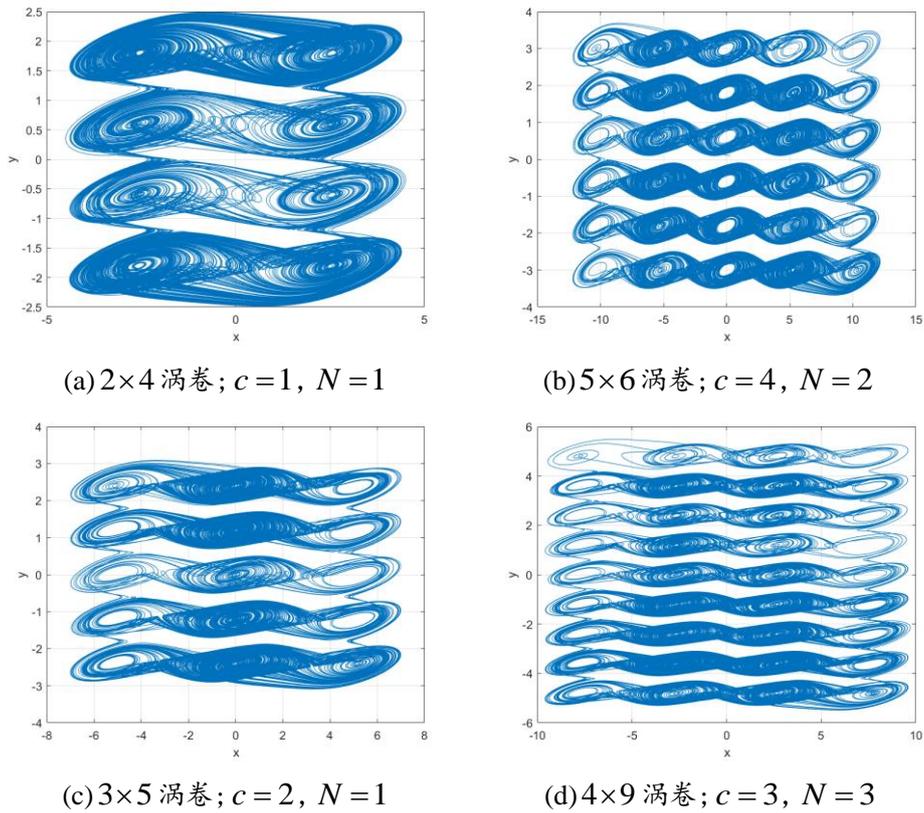


图 4-2 系统(4-1)网格多涡卷吸引子相图

令  $f(x) = x + h(x)$ , (4-1)式可写为如下形式:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - x - g(y) - h(x)), \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -\beta(y - g(y)), \end{cases} \quad (4-5)$$

其中  $h \in G := \{h(x) | -l_1 \leq \frac{h(x)}{x} \leq l_2, h(x) \text{ 是连续的, 且 } h(0) = 0\}$ ,  $l_1, l_2$  都是大于 0 的常数;  $g \in G := \{g(y) | -L_1 \leq \frac{g(y)}{y} \leq L_2, g(y) \text{ 是连续的, 且 } g(0) = 0\}$ ,  $L_1, L_2$  均为大于 0 的常数.

定义(4-1)的解为:

$$X(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

引理 4.1<sup>[64]</sup>: 实三次多项式  $\lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + r$  是 Hurwitz 多项式的充要条件为:  $p > 0, pq > r > 0$ .

定理 4.1: 系统(4-5)的零解呈指数稳定的充要条件是零解相对于局部变量  $x$  和  $y$  呈指数稳定.

证明:

(1) 必要性显然成立. 根据条件可得:

$$x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) \leq Me^{-\alpha(t-t_0)}$$

即

$$x^2(t) + y^2(t) \leq Me^{-\alpha(t-t_0)} \text{ 且 } x^2(t) \leq Me^{-\alpha(t-t_0)}, y^2(t) \leq Me^{-\alpha(t-t_0)}.$$

(2) 充分性: 首先证明系统线性部分的系数矩阵  $A$  是 Hurwitz 矩阵,

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \lambda^3 + (\alpha + 1)\lambda^2 + \beta\lambda + \alpha\beta$$

其中  $pq = (\alpha + 1)\beta > \alpha\beta = r > 0$ , 由引理 4.1 可知,  $A$  是 Hurwitz 矩阵. 因此存在常数  $M \geq 1$  且  $\mu > 0$ , 使得

$$\|e^{A(t-t_0)}\| \leq Me^{-\mu(t-t_0)} \quad (4-6)$$

根据假设条件可知, 存在常数  $H > 0$  且  $\tilde{\mu} > 0$ , 使得

$$|x(t)| \leq He^{-\tilde{\mu}(t-t_0)}, |y(t)| \leq He^{-\tilde{\mu}(t-t_0)} \quad (4-7)$$

不失一般性, 假设  $\mu \neq \tilde{\mu}$ , 否则可能会将上式中的  $\tilde{\mu}$  减小至  $\mu \neq \tilde{\mu}$ . 然后随着常数的变化, 可将系统(4-5)的解写成:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{A(t-t_0)} \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ z(t_0) \end{pmatrix} + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} h(x(\tau)) d\tau + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} g(y(\tau)) d\tau \quad (4-8)$$

因此

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \right\| &\leq M e^{-\mu(t-t_0)} \left\| \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ z(t_0) \end{pmatrix} \right\| + \int_{t_0}^t M e^{-\mu(t-\tau)} \max\{l_1, l_2\} \times \alpha H e^{-\tilde{\mu}(\tau-t_0)} d\tau \\ &\quad + \int_{t_0}^t M e^{-\mu(t-\tau)} \max\{L_1, L_2\} \times \max\{\alpha, \beta\} H e^{-\tilde{\mu}(\tau-t_0)} d\tau \end{aligned} \quad (4-9)$$

显然, (4-9)式中的第一项具有负指数形式, 下面证明第二项和第三项也具有负指数形式. 记

$$M \alpha \max\{l_1, l_2\} H \triangleq C_1$$

$$M \max\{L_1, L_2\} \times \max\{\alpha, \beta\} H \triangleq C_2$$

有

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t C e^{-\mu(t-\tau)} e^{-\tilde{\mu}(\tau-t_0)} d\tau &= C e^{-\mu t} \int_{t_0}^t e^{(\mu-\tilde{\mu})\tau} e^{\tilde{\mu}t_0} d\tau \\ &= C e^{-\mu t + \tilde{\mu}t_0} \frac{e^{(\mu-\tilde{\mu})t} - e^{(\mu-\tilde{\mu})t_0}}{\mu - \tilde{\mu}} \end{aligned}$$

其中  $C \in [C_1, C_2]$ .

当  $\mu > \tilde{\mu}$ ,

$$\int_{t_0}^t C e^{-\mu(t-\tau)} e^{-\tilde{\mu}(\tau-t_0)} d\tau \leq \frac{C}{\mu - \tilde{\mu}} e^{-\tilde{\mu}(t-t_0)}; \quad (4-10)$$

当  $\mu < \tilde{\mu}$ ,

$$\int_{t_0}^t C e^{-\mu(t-\tau)} e^{-\tilde{\mu}(\tau-t_0)} d\tau \leq \frac{C}{\tilde{\mu} - \mu} e^{-\mu(t-t_0)}. \quad (4-11)$$

这表明(4-9)式的第二项和第三项也具有负指数估计. 因此, 系统(4-5)的零解是指数稳定的. 证毕.

## 4.2 平衡点的存在性与稳定性分析

### 4.2.1 平衡点的存在性与稳定性分析

为求解系统(4-1)的平衡点, 令(4-1)式中  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ , 得到以下方程组:

$$\begin{cases} \alpha(y - g(y) - f(x)) = 0, \\ x - y + z = 0, \\ -\beta(y - g(y)) = 0, \end{cases} \quad (4-12)$$

系统的平衡点为:  $(x_{eq}, y_{eq}, y_{eq} - x_{eq})$ , 其中  $x_{eq}$  为非线性函数  $f(x) = 0$  的点,  $y_{eq}$  为  $y - g(y) = 0$  的点. 由于  $f(x)$  为分段函数, 即

(a) 当  $x \geq 2ac$  时,  $x_{eq} = 2ac, P(2ac, y_{eq}, y_{eq} - 2ac)$ ;

(b) 当  $x \leq -2ac$  时,  $x_{eq} = -2ac, S(-2ac, y_{eq}, y_{eq} + 2ac)$ ;

(c) 当  $-2ac < x < 2ac$  时,  $x_{eq} = 2ak - \frac{2ad}{\pi}, T(2ak - \frac{2ad}{\pi}, y_{eq}, y_{eq} - 2ak + \frac{2ad}{\pi})$ ,

其中  $(k = 0, \pm 1, \dots, \text{且 } -c < k < c)$ .

在平衡点处对系统(4-1)进行线性化的 Jacobian 矩阵为:

$$J = \begin{bmatrix} -\alpha f'(x) & \alpha(1 - g'(y)) & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta(1 - g'(y)) & 0 \end{bmatrix} \quad (4-13)$$

其中

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{b\pi}{2a}, & |x| \geq 2ac \\ -\frac{b\pi}{2a} \cos(\frac{\pi x}{2a} + d), & |x| < 2ac \end{cases};$$

$$g'_1(y) = qm \left( -\frac{1}{\cosh^2(my)} + \sum_{j=0}^N \frac{1}{\cosh^2(m(y + 2jq))} + \sum_{j=0}^N \frac{1}{\cosh^2(m(y - 2jq))} \right); \quad (4-14)$$

$$g'_2(y) = qm \left( \sum_{j=0}^N \frac{1}{\cosh^2(m(y + (2j+1)q))} + \sum_{j=0}^N \frac{1}{\cosh^2(m(y - (2j+1)q))} \right). \quad (4-15)$$

**定理 4.2** 令  $a \neq 0$ , 且  $G = 1 - g'(y)$ ,

(1) 当  $2a^2 + \alpha ab\pi > 0$ ,  $\alpha\beta abG > 0$  及  $(2a + \alpha b\pi)(\alpha b\pi - 2a\alpha G) + 4a^2\beta G > 0$ , 则平衡点  $P$  和  $S$  是渐进稳定的; 否则, 平衡点  $P$  和  $S$  是不稳定的.

(2) 当  $\alpha\beta abG \cos k\pi < 0$ ,  $4a^2\beta - (2a - \alpha b\pi \cos k\pi)(\alpha b\pi \cos k\pi + 2a\alpha G) > 0$ , 及  $2a^2 - \alpha ab\pi \cos k\pi > 0$ , 则平衡点  $T$  是渐进稳定的; 否则, 平衡点  $T$  是不稳定的.

证明:(1) 系统(4-1)在平衡点  $P$  和  $S$  处的特征方程为:

$$\lambda^3 + (1 + \frac{\alpha b \pi}{2a})\lambda^2 + (\frac{\alpha b \pi}{2a} - \alpha(1 - g'(y)) + \beta(1 - g'(y)))\lambda + \frac{\alpha \beta b \pi}{2a}(1 - g'(y)) = 0 \quad (4-16)$$

令  $G = 1 - g'(y)$ , 且

$$A_1 = 1 + \frac{\alpha b \pi}{2a}, A_2 = \frac{\alpha b \pi}{2a} - \alpha G + \beta G, A_3 = \frac{\alpha \beta b \pi}{2a} G.$$

根据 Routh-Hurwitz 条件, 方程(4-16)的根均具有负实部的充分必要条件为:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0.$$

即

$$A_1 > 0, A_3 > 0, A_1 A_2 - A_3 > 0.$$

当且仅当

$$2a^2 + \alpha a b \pi > 0, \alpha \beta a b G > 0, (2a + \alpha b \pi)(\alpha b \pi - 2a \alpha G) + 4a^2 \beta G > 0.$$

特征方程(4-16)的根均具有负实部, 此时系统(4-1)的平衡点  $P$  和  $S$  是渐进稳定的; 否则, 平衡点  $P$  和  $S$  是不稳定的.

(2) 系统(4-1)在平衡点  $T$  处的特征方程为:

$$\lambda^3 + B_1 \lambda^2 + B_2 \lambda + B_3 = 0. \quad (4-17)$$

其中

$$B_1 = 1 - \frac{\alpha b \pi}{2a} \cos k\pi, B_2 = -\frac{\alpha b \pi}{2a} \cos k\pi - \alpha G + \beta G, B_3 = -\frac{\alpha \beta b \pi}{2a} G \cos k\pi.$$

根据 Routh-Hurwitz 条件, 当且仅当

$$\alpha \beta a b G \cos k\pi < 0,$$

$$2a^2 - \alpha a b \pi \cos k\pi > 0,$$

$$4a^2 \beta - (2a - \alpha b \pi \cos k\pi)(\alpha b \pi \cos k\pi + 2a \alpha G) > 0.$$

特征方程(4-17)的根均具有负实部, 此时系统(4-1)的平衡点  $T$  是渐进稳定的, 否则, 平衡点  $T$  是不稳定的. 证毕.

#### 4.2.2 指标 2 鞍焦平衡点

当选取参数  $\alpha = 10.814$ ,  $\beta = 14$ ,  $a = 1.3$ ,  $b = 0.11$ ,  $q = 0.6$ ,  $m = 20$ ,  $c = 1$  ( $d = 0$ ),  $N = 1$  时, 并且令  $g(y) = g_1(y)$ , 系统(4-1)的平衡点为:  $P(2.6, y_{eq}, y_{eq} - 2.6)$ ,  $S(-2.6, y_{eq}, y_{eq} + 2.6)$ ,  $T(0, y_{eq}, y_{eq})$ , 其中  $y_{eq} = 0, \pm 0.6, \pm 1.2, \pm 1..$  此时该系统可以生成  $2 \times 4$  网格多涡卷混沌吸引子, 如图 4-2(a)所示.

系统(4-1)  $x - y$  相平面上指标 2 鞍焦点的分布如图 4-3 所示, 其中 “•” 表示

能够生成涡卷的指标为 2 的鞍焦平衡点.

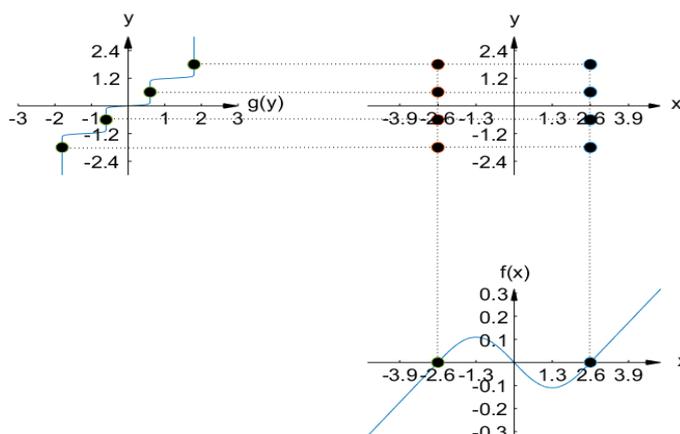


图 4-3 2×4 网格多涡卷混沌吸引子指标 2 鞍焦点分布图

下面分析该系统指标 2 鞍焦平衡点的特性, 系统指标 2 的鞍焦点分别为:  $P_1(2.6, Y, Y - 2.6)$  和  $S_1(-2.6, Y, Y + 2.6)$ , 其中  $Y = \pm 0.6, \pm 1.8$ .

系统在平衡点  $P_1$  和  $S_1$  处线性化的 Jacobian 矩阵为:

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha b \pi}{2a} & \alpha(1 - g'(y)) & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta(1 - g'(y)) & 0 \end{bmatrix}$$

其中  $g'(y) = 0$ , 系统平衡点对应的特征方程为:

$$\lambda^3 + \left(1 + \frac{\alpha b \pi}{2a}\right)\lambda^2 + \left(\frac{\alpha b \pi}{2a} - \alpha + \beta\right)\lambda + \frac{\alpha \beta b \pi}{2a} = 0 \quad (4-18)$$

解得三个特征值分别为:

$$\lambda_1 = -3.0681, \lambda_2 = 0.3154 + 2.5415i, \lambda_3 = 0.3154 - 2.5415i.$$

特征值中有一个负实特征值和一对实部为正的共轭复特征值, 可见这些平衡点均为指标 2 鞍焦点, 对应系统的运动轨迹为涡卷.

### 4.3 耗散性分析

对于系统(4-1), 其相空间体积变化率为:

$$\nabla V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -\alpha f'(x) - 1 \quad (4-19)$$

当  $|x| \geq 2ac$  时,  $\nabla V = -\frac{\alpha b \pi}{2a} - 1$ . 其耗散性与系统(3-3)一致. 当  $\frac{\alpha b \pi}{2a} + 1 > 0$  时, 系统(4-1)是耗散的, 即当  $t \rightarrow \infty$  时, 系统(4-1)的轨线以指数率  $-(\frac{\alpha b \pi}{2a} + 1)$  收缩到 0.

当  $|x| < 2ac$  时,

$$\nabla V = \frac{\alpha b \pi}{2a} \cos(\frac{\pi x}{2a} + d) - 1 \quad (4-20)$$

系统(4-1)的耗散性与  $x$  有关.

(1) 当  $\frac{\pi x}{2a} + d \in [2k\pi, 2k\pi + \pi]$ , 即  $x \in [4ak - \frac{2ad}{\pi}, 2a(2k+1) - \frac{2ad}{\pi}]$ .

$$x > \frac{2a}{\pi}(2k\pi - d) + \frac{2a}{\pi} \arccos(\frac{2a}{ab\pi}) \quad (4-21)$$

有  $\nabla V < 0$ , 系统是耗散的.

(2) 当  $\frac{\pi x}{2a} + d \in [2k\pi - \pi, 2k\pi]$ , 即  $x \in [2a(2k-1) - \frac{2ad}{\pi}, 4ak - \frac{2ad}{\pi}]$ .

$$x < \frac{2a}{\pi}(2k\pi - d) - \frac{2a}{\pi} \arccos(\frac{2a}{ab\pi}) \quad (4-22)$$

有  $\nabla V < 0$ , 系统是耗散的.

### 4.4 Lyapunov 指数与维数

选取参数  $\alpha = 10.814$ ,  $\beta = 14$ ,  $a = 1.3$ ,  $b = 0.11$ ,  $q = 0.6$ ,  $m = 20$ ,  $c = 1$  ( $d = 0$ ),  $N = 1$ , 且非线性函数  $g(y) = g_1(y)$  时, 利用 MATLAB LET 工具箱, 计算出系统(4-1)的三个 Lyapunov 指数为:  $LE_1 = 0.31194$ ,  $LE_2 = -0.0010143$ ,  $LE_3 = -2.2185$ . 并得到系统的 Lyapunov 维数:  $D = 2.1402$ . Lyapunov 指数谱如图 4-4 所示. 系统有一个正的 Lyapunov 指数, 并且具有分数维, 说明该系统是混沌的.

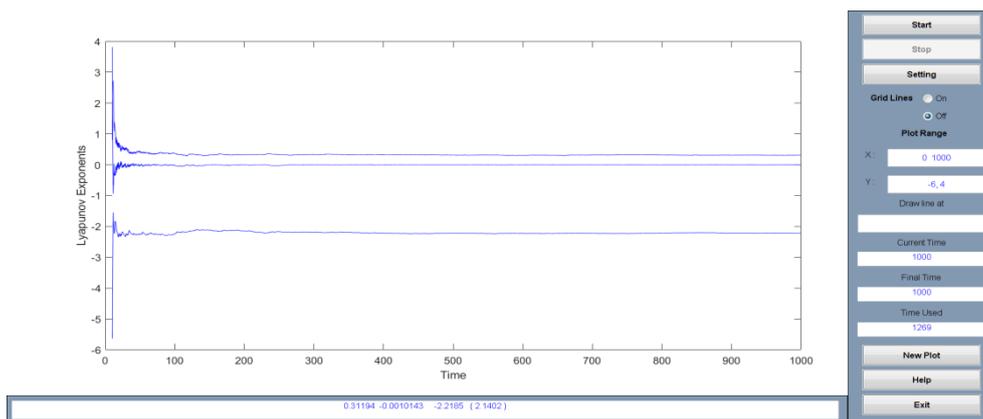
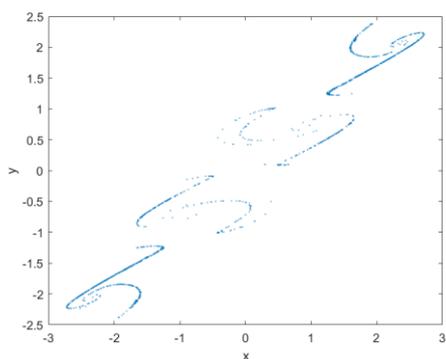


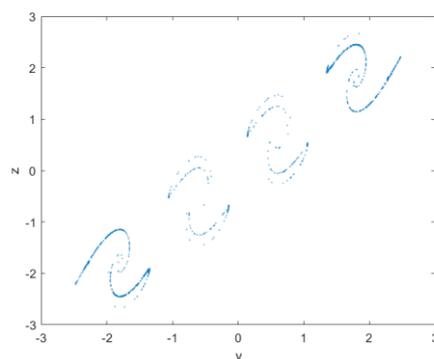
图 4-4 系统(4-1)的李雅普诺夫指数图

### 4.5 Poincaré截面分析

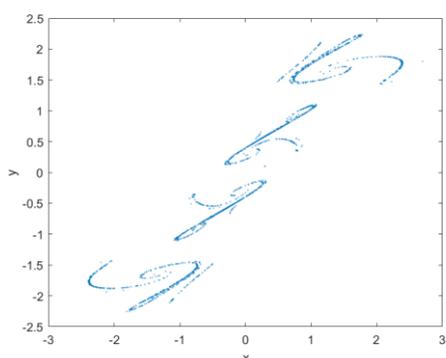
Poincaré 截面是一种用来描述多变量自治系统运动的重要工具, 根据系统运动轨线与 Poincaré 截面交点的分布情况, 可以判断系统的运动特征. 图 4-5(a)-(d) 是系统(4-1)的运动轨迹在不同平面下的投影, 这几个截面图都是由几个分支组成, 表明该系统作非周期的混沌运动.



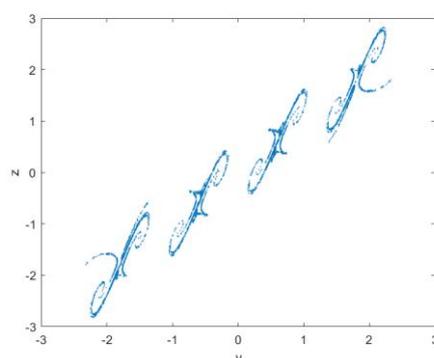
(a)  $c = 1$ ,  $x - y$  截面



(b)  $c = 1$ ,  $y - z$  截面



(c)  $c = 2$ ,  $x - y$  截面



(d)  $c = 2$ ,  $y - z$  截面

图 4-5 系统(4-1)的 Poincaré 截面图

## 4.6 系统参数的影响

### 4.6.1 参数 $\alpha$ 的影响

首先我们讨论参数  $\alpha$  的变化对系统动力学行为的影响. 固定参数  $\beta=14$ ,  $a=1.3$ ,  $b=0.11$ ,  $q=0.6$ ,  $m=20$ ,  $c=1(d=0)$ ,  $N=1$ . 根据 Routh-Hurwitz 条件判定系统(4-1)渐进稳定时, 参数  $\alpha$  的取值范围.

(1) 当  $|x| \geq 2ac$ , 系统(4-1)的特征方程为:

$$\lambda^3 + \left(1 + \frac{\alpha b \pi}{2a}\right) \lambda^2 + \left(\frac{\alpha b \pi}{2a} - \alpha(1 - g'(y)) + \beta(1 - g'(y))\right) \lambda + \frac{\alpha \beta b \pi}{2a} (1 - g'(y)) = 0 \quad (4-23)$$

令

$$A_1 = 1 + \frac{\alpha b \pi}{2a},$$

$$A_2 = \frac{\alpha b \pi}{2a} - \alpha(1 - g'(y)) + \beta(1 - g'(y)),$$

$$A_3 = \frac{\alpha \beta b \pi}{2a} (1 - g'(y)).$$

其中

$$g'(y) = \begin{cases} 0, & y = \pm 0.6, \pm 1.8 \\ 12, & y = 0, \pm 1.2 \end{cases}$$

下面分两种情况进行讨论.

情况一:  $g'(y)=0$  时,  $\alpha \in (0, 7.8841)$ , 有  $\Delta_1 > 0$ ,  $\Delta_2 > 0$ ,  $\Delta_3 > 0$  成立, 满足 Routh-Hurwitz 定理条件, 所以此时系统(4-1)的平衡点是渐进稳定的.

对于三维系统, 系统发生 Hopf 分岔的必要条件为:  $A_1 A_2 - A_3 = 0$ .

当  $A_1 A_2 - A_3 = 0$  时,  $\alpha = \alpha_0 = 7.8841$ , 将其带入特征方程(4-23)式中, 解得三个特征根为:

$$\lambda_1 = -2.0479, \lambda_2 = 2.6765i, \lambda_3 = -2.6765i.$$

特征根中有一对纯虚根和一个负根, 满足 Hopf 分岔定理的条件, 因此, 当固定其他参数不变,  $\alpha = \alpha_0 = 7.8841$  时, 系统(4-1)在平衡点处发生 Hopf 分岔产生极限环.

情况二:  $g'(y)=12$  时, 要使  $\Delta_1 > 0$ ,  $\Delta_2 > 0$ ,  $\Delta_3 > 0$ , 即  $A_1 > 0$ ,  $A_3 > 0$ ,  $A_1 A_2 - A_3 > 0$ .

$$A_1 = 1 + \frac{\alpha b \pi}{2a} > 0 \Rightarrow \alpha > -7.5237;$$

$$A_3 = -\frac{11\alpha\beta b\pi}{2a} > 0 \Rightarrow \alpha < 0;$$

$$A_1 A_2 - A_3 > 0 \Rightarrow \alpha \in (-\infty, 14.635) \cup (7.1113, +\infty).$$

由上述计算结果可知, 没有满足条件的  $\alpha$  值, 即此时无论  $\alpha$  取何值时系统(4-1)的平衡点都是不稳定的.

综上所述, 当  $|x| \geq 2ac$ ,  $\alpha \in (0, 7.8841)$ , 满足 Routh-Hurwitz 定理条件, 此时系统(4-1)  $y = \pm 0.6, \pm 1.8$  的平衡点是渐进稳定的; 并且当  $\alpha = \alpha_0 = 7.8841$ , 满足 Hopf 分岔定理条件, 此时系统(4-1)在这些平衡点处发生 Hopf 分岔产生极限环.

(2) 当  $|x| < 2ac$ , 系统(4-1)的特征方程为:

$$\lambda^3 + (1 - \frac{\alpha b \pi}{2a}) \lambda^2 + (-\frac{\alpha b \pi}{2a} - \alpha(1 - g'(y)) + \beta(1 - g'(y))) \lambda - \frac{\alpha \beta b \pi}{2a} (1 - g'(y)) = 0 \quad (4-24)$$

令

$$B_1 = 1 - \frac{\alpha b \pi}{2a},$$

$$B_2 = -\frac{\alpha b \pi}{2a} - \alpha(1 - g'(y)) + \beta(1 - g'(y)),$$

$$B_3 = -\frac{\alpha \beta b \pi}{2a} (1 - g'(y)).$$

情况一:  $g'(y) = 0$  时.

$$\Delta_1 = B_1 = 1 - \frac{\alpha b \pi}{2a} > 0 \Rightarrow \alpha < 7.5237;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} B_1 & 1 \\ B_3 & B_2 \end{vmatrix} = B_1 B_2 - B_3 > 0, \text{恒成立}, \alpha \in R;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} B_1 & 1 & 0 \\ B_3 & B_2 & B_1 \\ 0 & 0 & B_3 \end{vmatrix} = B_3 \Delta_2 > 0 \Rightarrow B_3 > 0 \Rightarrow \alpha < 0.$$

通过上述计算结果可知, 固定其他参数不变, 当  $\alpha < 0$  时, 满足 Routh-Hurwitz 定理的条件, 即  $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$ . 此时系统(4-1)的平衡点是渐进稳定的.

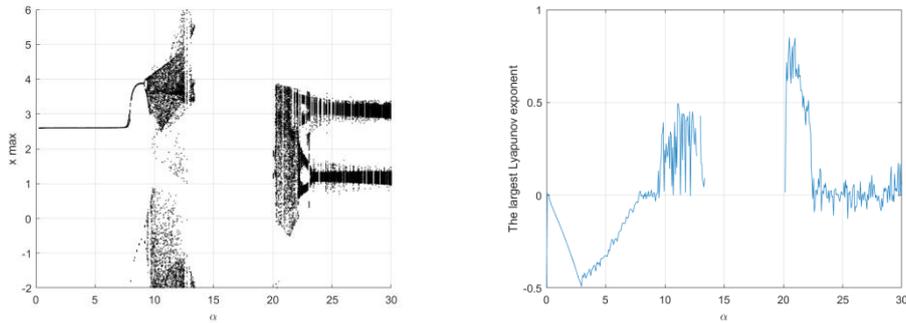
情况二:  $g'(y) = 12$  时, 经计算, 当固定其他参数不变,  $\Delta_2 < 0$  恒成立, 此时没有满足条件的  $\alpha$  值, 即当  $|x| < 2ac$ ,  $g'(y) = 12$  时, 系统(4-1)的平衡点都是不稳定的.

综上所述, 当  $|x| < 2ac$ ,  $\alpha < 0$  时, 系统(4-1)  $y = \pm 0.6, \pm 1.8$  的平衡点是渐进稳定的.

数值仿真:

当系统的参数发生改变, 所研究系统的平衡点的稳定性也会随之变化, 即系统的运动状态发生改变. 接下来讨论随参数  $\alpha$  变化系统(4-1)产生的混沌吸引子和

周期轨道. 首先通过分岔图和最大的 Lyapunov 指数谱, 形象的展示参数  $\alpha$  的变化对系统(4-1)的动力学行为的影响. 固定其他参数不变,  $\alpha$  的变化范围是  $[0, 30]$ .



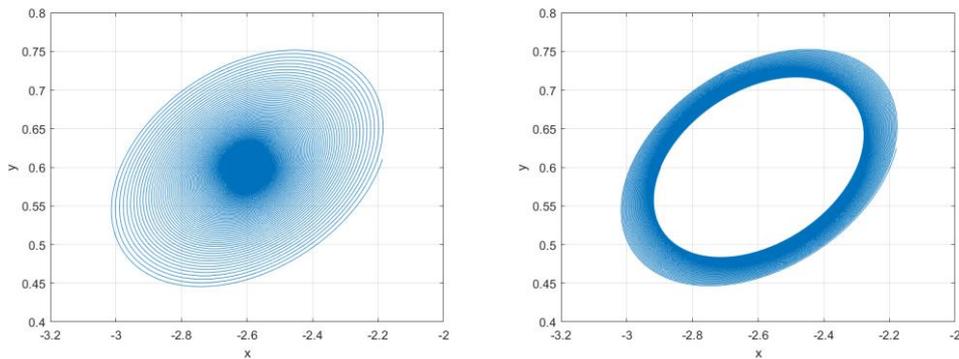
(a)分岔图

(b)最大 Lyapunov 指数谱

图 4-6 随参数  $\alpha$  变化的分岔图和最大 Lyapunov 指数谱

根据上图 4-6(b) 随参数  $\alpha$  变化的最大 Lyapunov 指数谱可以发现, 当  $\alpha \in [9.6, 12.67] \cup [20.1, 22.4]$  时, 系统(4-1)的最大 Lyapunov 指数大于 0, 说明此时该系统处于混沌状态; 当  $\alpha \in [7.8841, 9.6) \cup (22.4, 30]$  时, 系统最大 Lyapunov 指数在  $LLE=0$  附近上下波动, 系统出现了大量的周期窗口, 说明此时系统能够产生各种各样的周期性轨道, 并且该系统在混沌区域  $\alpha = 10.7, 11.3$  和  $12.14$  的邻域内分别出现了单个周期窗口, 此时系统也能够产生各种不同的周期性轨道.

分岔图和最大 Lyapunov 指数谱都表明该系统可以在参数变化范围内产生复杂的动力学行为, 包括不同种类的复杂周期轨道, 分岔和混沌等. 为了更直观的观察系统随参数  $\alpha$  变化时丰富的动力学行为, 我们通过选择不同区域内的  $\alpha$  值得到系统的一些吸引子. 其图像如图 4-7 所示.



(a)  $\alpha = 7.8$

(b)  $\alpha = 7.8841$

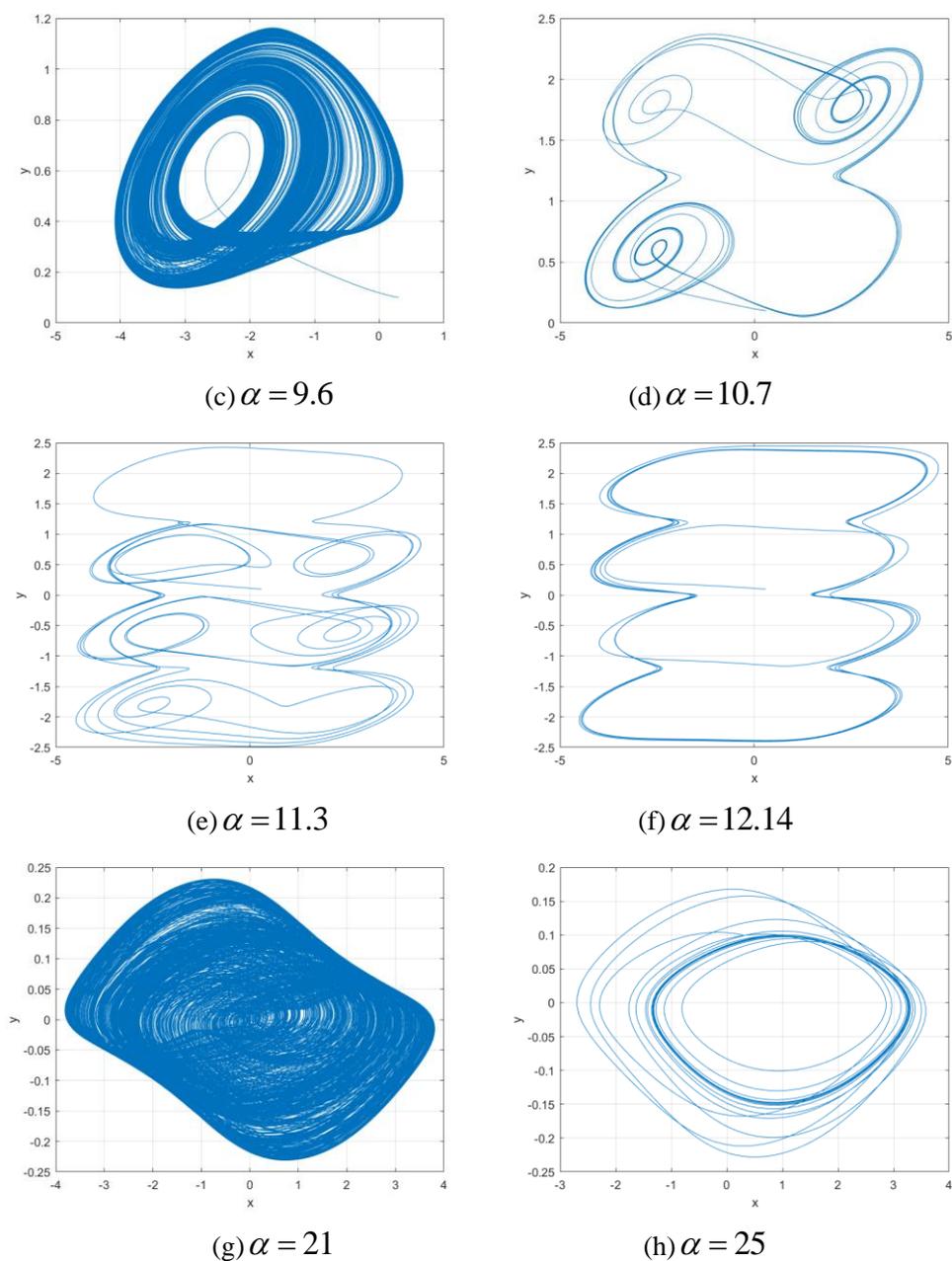


图 4-7 系统(4-1)随参数 $\alpha$ 变化的相轨迹图

根据上述稳定性分析以及图 4-6 系统随参数 $\alpha$ 变化的分岔图和最大 Lyapunov 指数谱可知, 当 $\alpha \in (0, 7.8841)$ 时, 系统处于稳定状态, 即当参数 $\alpha = 7.8$ 时, 如图 4-7(a)所示, 系统的运动轨迹趋于一个平衡点; 当 $\alpha = 7.8841$ , 如图 4-7(b)所示, 此时系统在该处发生 Hopf 分岔产生极限环; 当 $\alpha \in [7.8841, 9.6) \cup (22.4, 30]$ 时, 系统出现了大量的周期窗口, 并且该系统在混沌区域 $\alpha = 10.7, 11.3$ 和 $12.14$ 的邻域内分别出现了单个周期窗口, 如图 4-7(d)、(e)、(f)、(h)所示, 此时系统产生了各种各样复杂的周期性轨道.

同理, 可以讨论其他参数对系统(4-1)动力学行为的影响.

### 4.6.2 参数 $\beta$ 的影响

固定参数  $\alpha = 10.81$ ,  $a = 1.3$ ,  $b = 0.11$ ,  $q = 0.6$ ,  $m = 20$ ,  $c = 1 (d = 0)$ . 根据 Routh-Hurwitz 定理条件判定系统(4-1)渐进稳定时, 参数  $\beta$  的取值范围.

(1) 当  $|x| \geq 2ac$ ,

情况一:  $g'(y) = 0$  时, 当  $\beta \in (22.854, +\infty)$ , 有  $\Delta_1 > 0$ ,  $\Delta_2 > 0$ ,  $\Delta_3 > 0$ , 满足 Routh-Hurwitz 定理条件, 所以此时系统(4-1)  $y = \pm 0.6, \pm 1.8$  的平衡点是渐进稳定的.

当  $A_1 A_2 - A_3 = 0$  时,  $\beta = \beta_0 = 22.854$ , 将其带入特征方程(4-23)式中, 解得三个特征根为:

$$\lambda_1 = -2.4373, \lambda_2 = 3.6712i, \lambda_3 = -3.6712i.$$

特征根中有一对纯虚根和一个负根, 满足 Hopf 分岔定理的条件, 因此, 当固定其他参数不变,  $\beta = \beta_0 = 22.854$  时, 系统(4-1)在  $y = \pm 0.6, \pm 1.8$  的平衡点处发生 Hopf 分岔产生极限环.

情况二:  $g'(y) = 12$  时, 固定其他参数不变, 当  $\beta < 0$ , 满足 Routh-Hurwitz 定理的条件, 即  $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$ . 此时系统(4-1)  $y = 0, \pm 1.2$  的平衡点是渐进稳定的.

综上所述, 当  $|x| \geq 2ac$ ,  $\beta \in (22.854, +\infty)$  时, 系统(4-1)  $y = \pm 0.6, \pm 1.8$  的平衡点是渐进稳定的; 当  $\beta < 0$  时, 系统(4-1)  $y = 0, \pm 1.2$  的平衡点是渐进稳定的, 并且当  $\beta = \beta_0 = 22.854$ , 系统(4-1)在平衡点处发生 Hopf 分岔产生极限环.

(2) 当  $|x| < 2ac$  时,  $\Delta_1 = 1 - \frac{ab\pi}{2a} = -0.4373 < 0$ , 不满足 Routh-Hurwitz 定理的条件, 此时系统(4-1)的平衡点是不稳定的.

数值仿真:

接下来讨论随参数  $\beta$  变化系统(4-1)产生的混沌吸引子和周期轨道. 固定其他参数不变,  $\beta$  的变化范围是  $[10, 30]$ . 首先通过分岔图和最大的 Lyapunov 指数谱, 形象的展示参数  $\beta$  的变化对系统(4-1)的动力学行为的影响.

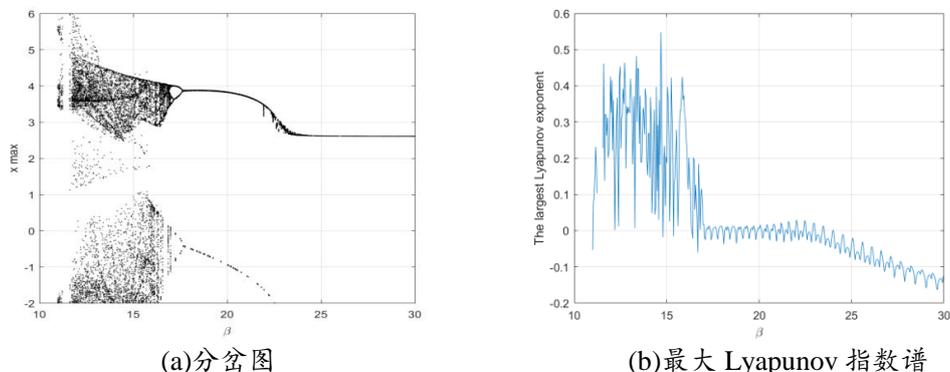


图 4-8 随参数  $\beta$  变化的分岔图和最大 Lyapunov 指数谱

由图 4-8(b) 随参数  $\beta$  变化的最大 Lyapunov 指数谱可以发现, 当

$\beta \in (11.7, 16.8]$ 时, 系统(4-1)的最大 Lyapunov 指数大于 0, 说明此时该系统处于混沌状态; 当  $\beta \in (16.8, 22.854]$ 时, 系统出现了大量的周期窗口, 此时系统能够产生各种各样的周期性轨道, 并且该系统在混沌区域内  $\beta = 14.81, 16.4$  和  $16.69$  的邻域分别产生了单个周期窗口, 表明此时系统也能够产生各种不同的周期性轨道.

为了更直观的观察系统随参数  $\beta$  变化时丰富的动力学行为, 我们通过选择不同区域内的  $\beta$  值得到系统的一些吸引子. 其图像如图 4-9 所示.

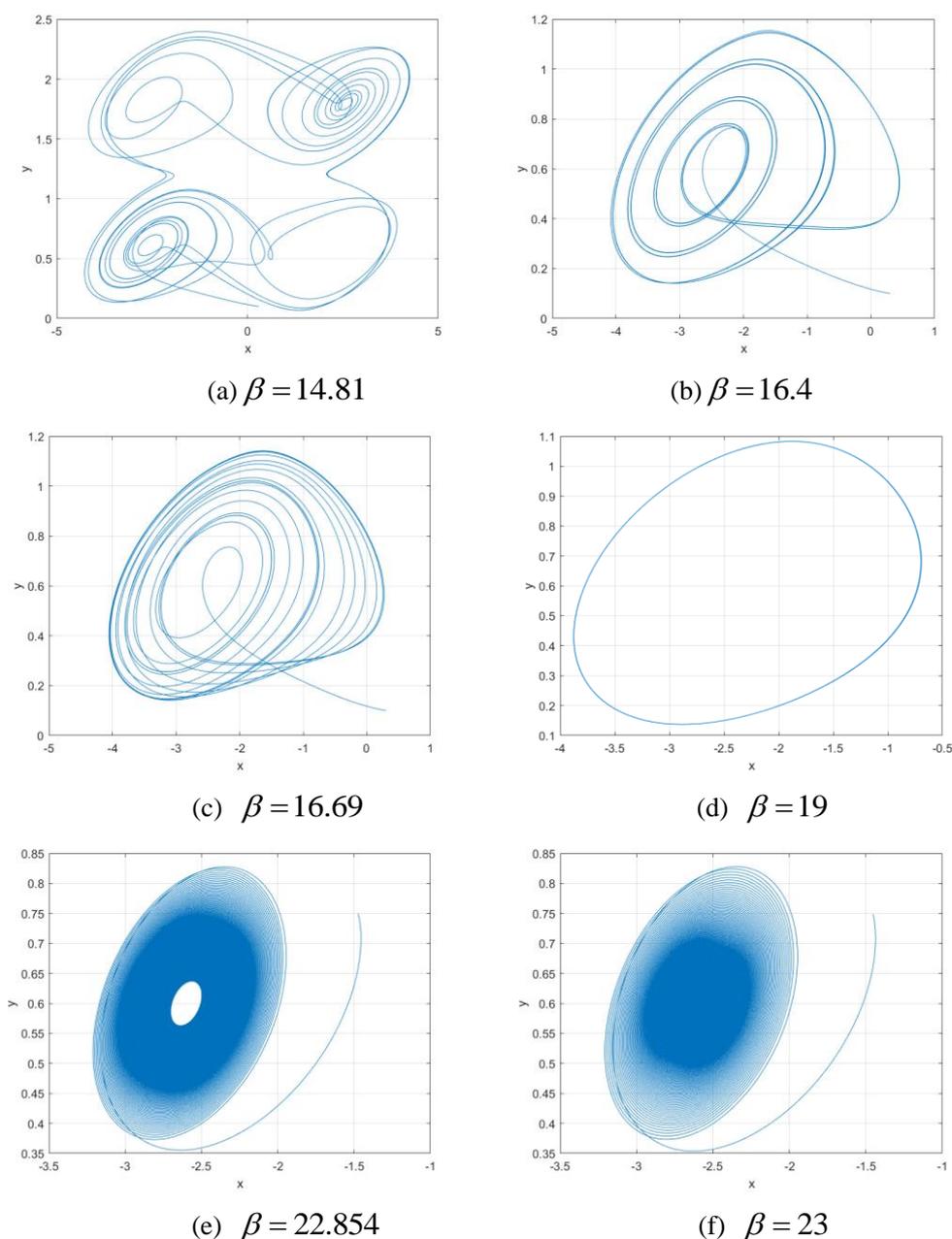


图 4-9 系统(4-1)随参数  $\beta$  变化的相轨迹图

根据上述稳定性分析以及图 4.8 系统随参数  $\beta$  变化的分岔图和最大 Lyapunov 指数谱可知, 当  $\beta \in (22.854, 30]$ 时, 系统处于稳定状态, 此时系统的运动

轨迹趋于一个平衡点,如图 4.9(f)所示;系统在  $\beta = 22.854$  处,发生 Hopf 分岔,产生极限环,如图 4.9(e)所示;当  $\beta \in (16.8, 22.854]$  时,系统出现了大量的周期窗口,并且在混沌区域内的  $\alpha = 10.7, 11.3$  和  $12.14$  的邻域内均出现了单个周期窗口,如图 4.9(a)、(b)、(c)、(d)所示,此时系统产生了各种各样的周期性轨道.当  $\beta = 19$  时,系统做周期为一的周期运动;当  $\beta = 16.4$  和  $\beta = 16.69$ ,系统产生了多倍周期轨道.

### 4.6.3 参数 $b$ 的影响

固定参数  $\alpha = 10.814$ ,  $\beta = 14$ ,  $a = 1.3$ ,  $q = 0.6$ ,  $m = 20$ ,  $c = 1(d = 0)$ .

(1)  $|x| \geq 2ac$  时,当  $b \in (0, 0.0257) \cup (0.7253, +\infty)$ , 满足 Routh-Hurwitz 定理的条件,此时系统(4-1)  $y = \pm 0.6, \pm 1.8$  的平衡点是渐进稳定的;当  $b < 0$  时,也满足 Routh-Hurwitz 定理的条件,此时系统(4-1)  $y = 0, \pm 1.2$  的平衡点也是渐进稳定的.

并且当  $A_1 A_2 - A_3 = 0$  时,有  $b = b_0 = 0.0257$ ,  $b = b_1 = 0.7253$ , 分别带入特征方程(4-23)式,求特征值.

当  $b = b_0 = 0.0257$ , 解得三个特征根为:

$$\lambda_1 = -1.3352, \lambda_2 = 1.8764i, \lambda_3 = -1.8764i.$$

当  $b = b_1 = 0.7253$ , 解得三个特征根为:

$$\lambda_1 = -10.4773, \lambda_2 = 3.5586i, \lambda_3 = -3.5586i.$$

上述求解的特征根中均有一对纯虚根和一个负根,满足 Hopf 分岔定理的条件,因此,固定其他参数不变,当  $b = b_0 = 0.0257$  和  $b = b_1 = 0.7253$ , 系统(4-1)在  $y = \pm 0.6, \pm 1.8$  的平衡点处发生 Hopf 分岔产生极限环.

(2)  $|x| < 2ac$  时,当  $b \in (-\infty, -0.7253) \cup (-0.0257, 0)$  时,满足 Routh-Hurwitz 定理的条件,此时系统(4-1)  $y = \pm 0.6, \pm 1.8$  的平衡点是渐进稳定的.

并且当  $B_1 B_2 - B_3 = 0$  时,有  $b = b_2 = -0.0257$ ,  $b = b_3 = -0.7253$ . 分别带入特征方程(4-24)式,求特征值.

当  $b = b_2 = -0.0257$ , 解得三个特征根为:

$$\lambda_1 = -1.3352, \lambda_2 = 1.8764i, \lambda_3 = -1.8764i.$$

当  $b = b_3 = -0.7253$ , 解得三个特征根为:

$$\lambda_1 = -10.4773, \lambda_2 = 3.5586i, \lambda_3 = -3.5586i.$$

上面求得的特征根中均有一对纯虚根和一个负根,满足 Hopf 分岔定理的条件,因此,固定其他参数不变,当  $b = b_2 = -0.0257$  和  $b = b_3 = -0.7253$ , 系统(4-1)在  $y = \pm 0.6, \pm 1.8$  的平衡点处发生 Hopf 分岔产生极限环.

数值仿真:

下面通过分岔图和最大的 Lyapunov 指数谱讨论随参数  $b$  变化系统(4-1)的动力学行为. 固定其他参数不变,  $b$  的变化范围是  $[0,1]$ .

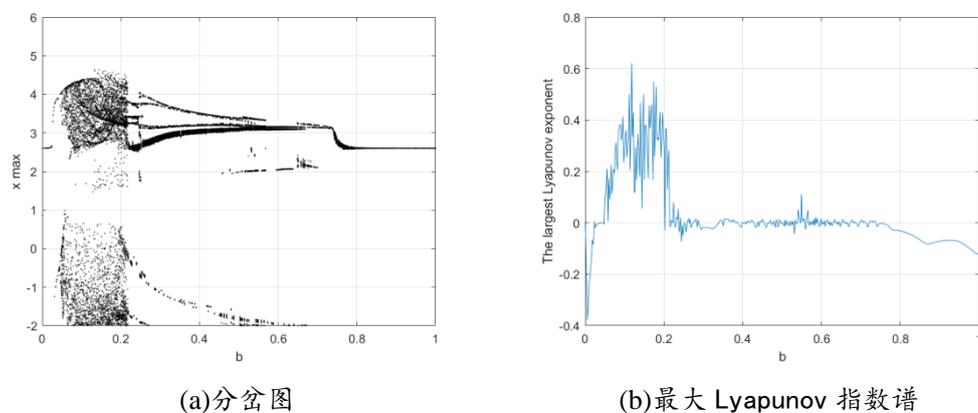
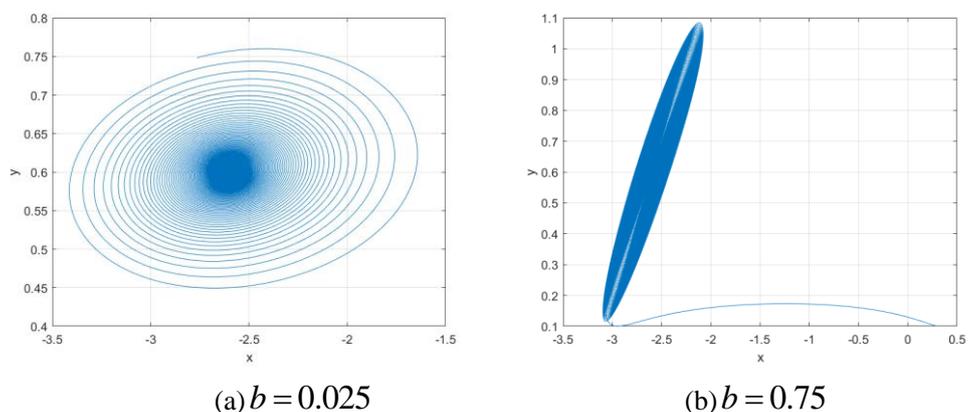


图 4-10 随参数  $b$  变化的分岔图和最大 Lyapunov 指数谱

由图 4-10(b) 随参数  $b$  变化的最大 Lyapunov 指数谱可以发现, 当  $b \in [0.049, 0.213]$  时, 系统(4-1)的最大 Lyapunov 指数大于 0, 说明此时该系统处于混沌状态; 当  $b \in [0.0257, 0.049) \cup (0.213, 0.7253]$  时, 系统出现了大量的周期窗口, 此时系统做周期性运动, 并且该系统在混沌区域  $b = 0.2024$  的邻域内出现了一个周期窗口, 表明此时系统也做周期性运动.

下面通过选择不同区域内的  $b$  值, 更直观的观察系统随参数  $b$  变化的动力学行为, 其图像如图 4-11 所示.



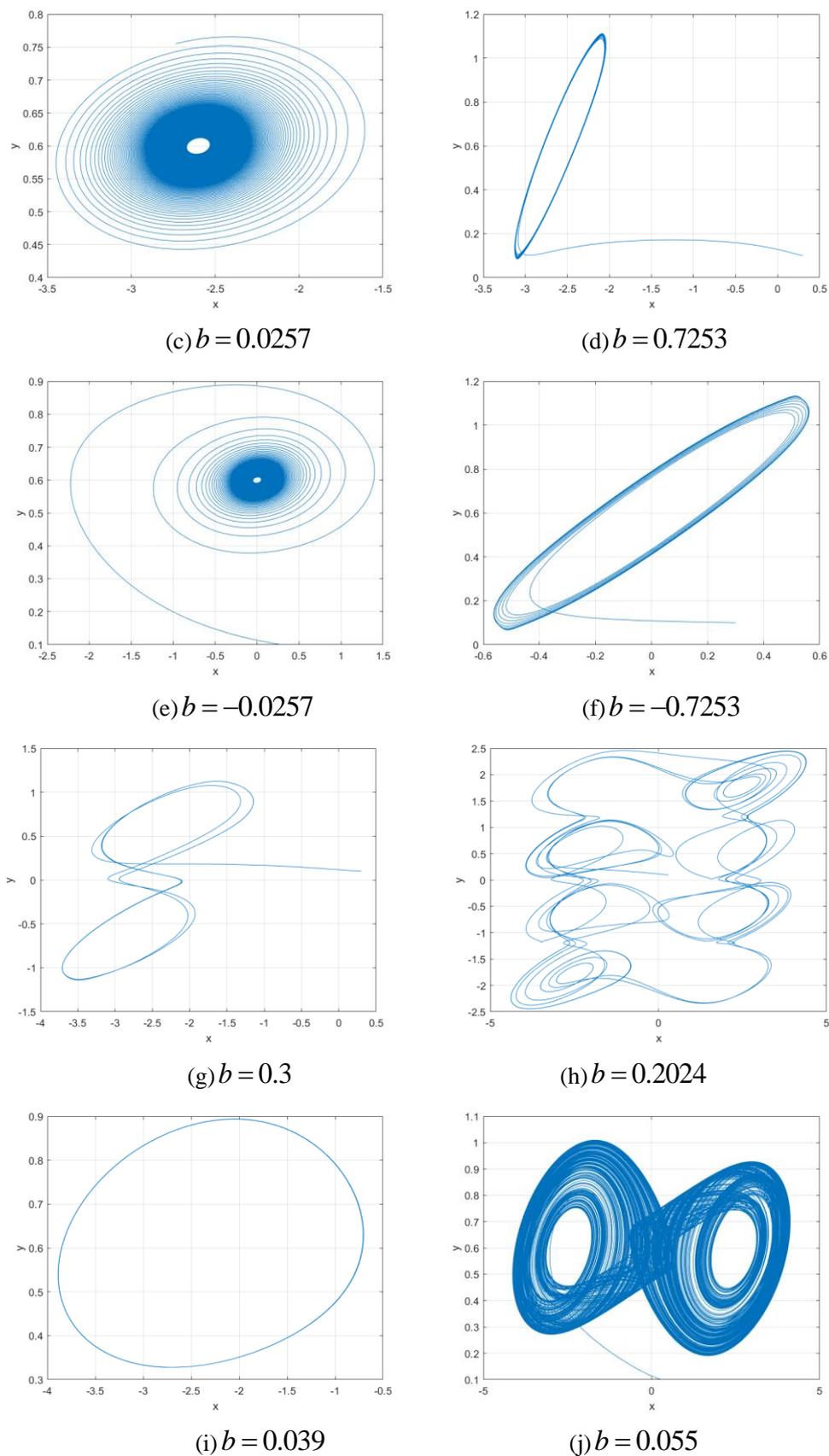


图 4-11 系统(4-1)随参数 $b$ 变化的相轨迹图

根据上述随参数 $b$ 变化的稳定性分析以及图 4-10 中的分岔图和最大

Lyapunov 指数谱可知, 当  $b \in [0, 0.0257) \cup (0.7253, 1]$  时, 系统处于稳定状态, 此时系统的运动轨迹趋于某个平衡点, 如图 4-11(a)、(b)所示; 系统在  $b = \pm 0.0257$  和  $b = \pm 0.7253$  处, 发生 Hopf 分岔, 产生极限环, 如图 4-11(c)、(d)、(e)、(f)所示; 当  $b \in [0.0257, 0.049) \cup (0.213, 0.7253]$  时, 系统出现了大量的周期窗口, 此时系统产生了各种各样的周期性轨道, 如图 4-11(g)、(i)所示; 并且该系统还在混沌区域  $b = 0.2024$  的邻域内出现了一个周期窗口, 此时系统做复杂的周期运动, 如图 4-11(h)所示, 生成了复杂的周期性轨道.

#### 4.6.4 参数 $a$ 的影响

固定参数  $\alpha = 10.814$ ,  $\beta = 14$ ,  $b = 0.11$ ,  $q = 0.6$ ,  $m = 20$ ,  $c = 1(d = 0)$ .

(1)  $|x| \geq 2ac$  时, 当  $a \in (0, 0.1971) \cup (5.5586, +\infty)$ , 满足 Routh-Hurwitz 定理条件, 此时系统(4-1)  $y = \pm 0.6, \pm 1.8$  的平衡点是渐进稳定的.

并且当  $A_1 A_2 - A_3 = 0$  时, 有  $a = a_0 = 0.1971$ ,  $a = a_1 = 5.5586$ , 分别带入特征方程(4-23)式, 求其特征值.

当  $a = a_0 = 0.1971$ , 解得三个特征根为:

$$\lambda_1 = -10.4801, \lambda_2 = 3.5561i, \lambda_3 = -3.5561i;$$

当  $a = a_1 = 5.5586$ , 解得三个特征根为:

$$\lambda_1 = -1.3362, \lambda_2 = 1.8767i, \lambda_3 = -1.8767i.$$

上述求解的特征根中都有一对纯虚根和一个负根, 满足 Hopf 分岔定理的条件, 因此, 固定其他参数不变, 当  $a = a_0 = 0.1971$ ,  $a = a_1 = 5.5586$  时, 系统(4-1)在  $y = \pm 0.6, \pm 1.8$  的平衡点处发生 Hopf 分岔产生极限环.

(2) 当  $|x| < 2ac$  时, 经计算, 没有满足 Routh-Hurwitz 定理条件的  $a$  值, 所以此时系统(4-1)的平衡点是不稳定的.

数值仿真:

固定其他参数不变,  $a$  的变化范围是  $[0, 7]$ .

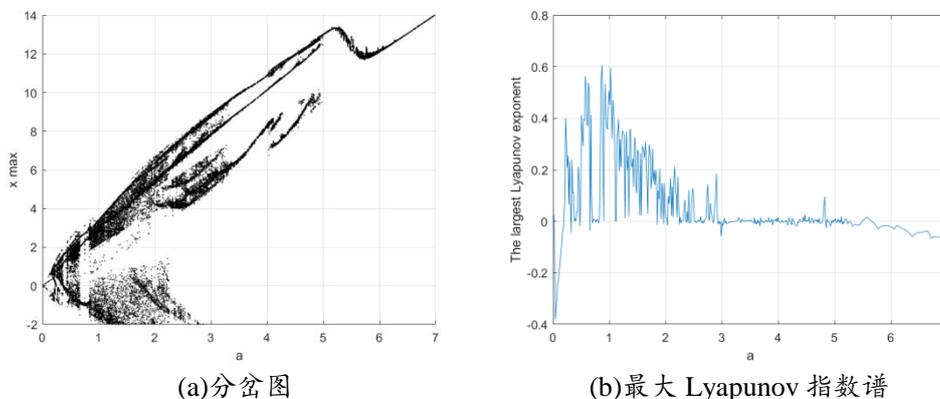
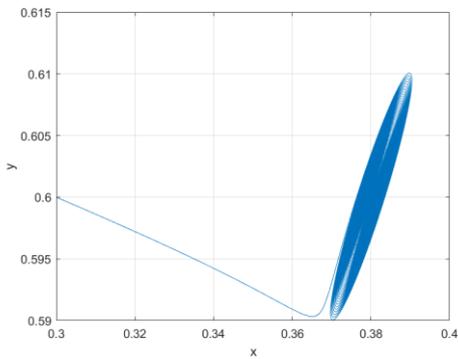


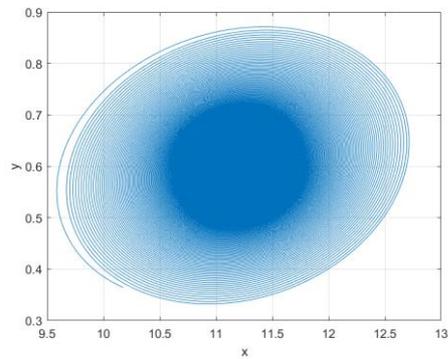
图 4-12 随参数  $a$  变化的分岔图和最大 Lyapunov 指数谱

根据图 4-12(b) 随参数  $a$  变化的最大 Lyapunov 指数谱可以知道, 当  $a \in (0.1971, 0.65] \cup [0.87, 2.23]$  时, 系统(4-1)的最大 Lyapunov 指数大于 0, 说明此时该系统处于混沌状态; 当  $a \in (0.65, 0.87) \cup (2.23, 5.5586]$  时, 系统出现了大量的周期窗口, 此时系统做周期性运动; 并且该系统在混沌区域内  $a = 0.3226, 0.477, 1.852, 1.965$  以及  $2.031$  的邻域内均出现了单个周期窗口, 表明系统在该邻域内也做周期性运动. 其中当  $a \in (2.23, 2.932]$ , 由图像可知, 系统在该区间段内最大 Lyapunov 指数的波动幅度很大, 此时该系统会产生大量复杂的周期性轨道.

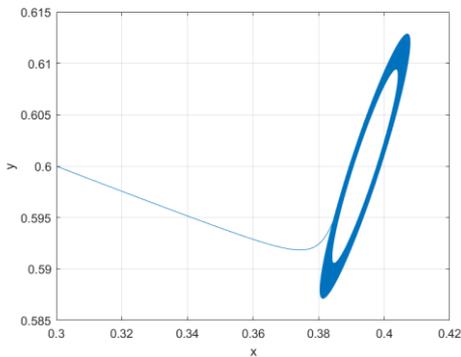
下面通过选择不同区域内的  $a$  值, 更直观的观察系统随参数  $a$  变化的动力学行为, 其图像如图 4-13 所示.



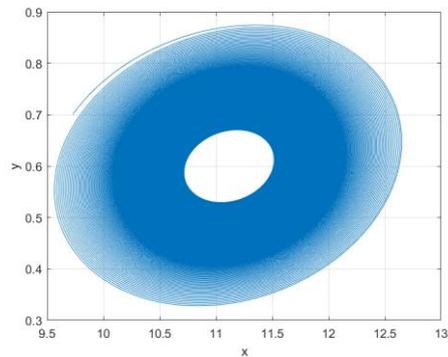
(a)  $a = 0.19$



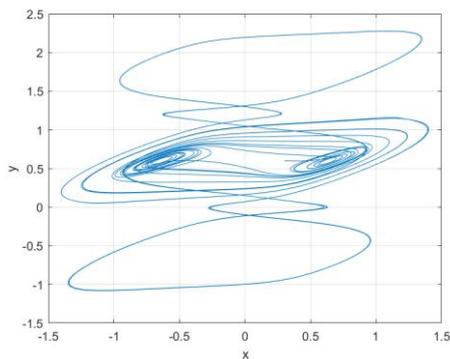
(b)  $a = 5.6$



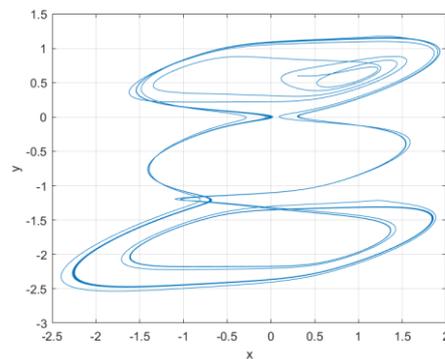
(c)  $a = 0.1971$



(d)  $a = 5.5586$



(e)  $a = 0.3226$



(f)  $a = 0.477$

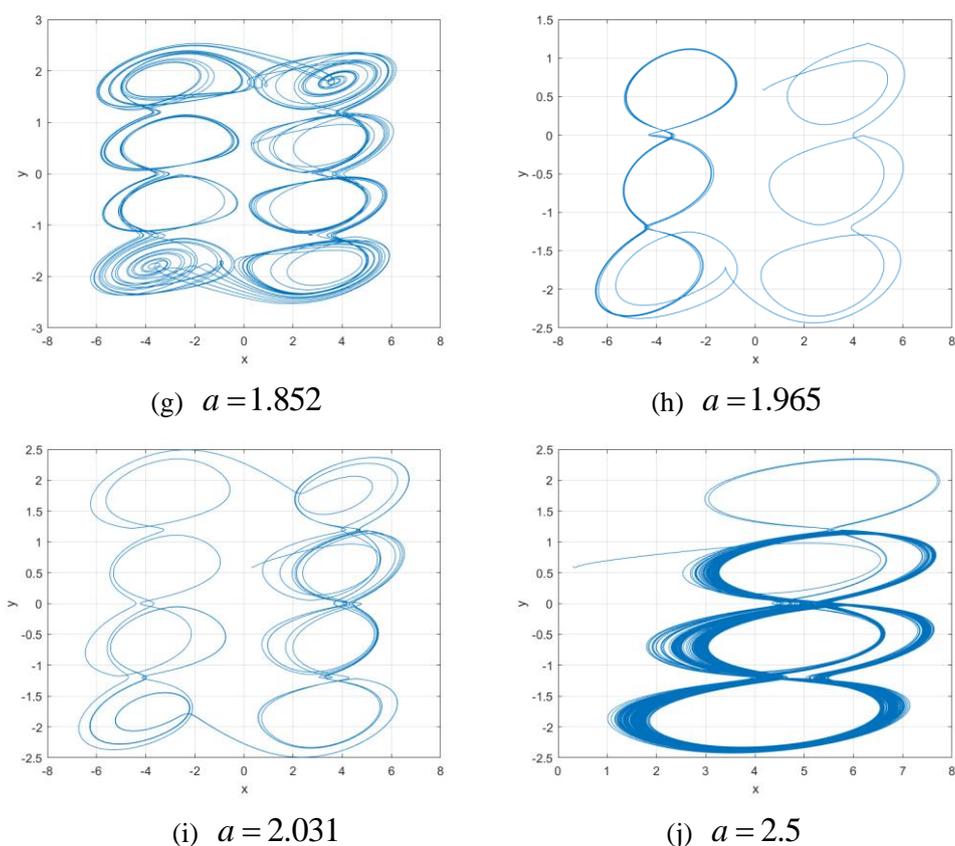


图 4-13 系统(4-1)随参数 $a$ 变化的相轨迹图

根据随参数 $a$ 变化的稳定性分析以及图 4-12 中的分岔图和最大 Lyapunov 指数谱可知, 当  $a \in (0, 0.1971) \cup (5.5586, 7]$  时, 系统处于稳定状态, 此时系统的运动轨迹趋于某个平衡点, 如图 4-13(a)、(b)所示; 系统在  $a = 0.1971$  和  $a = 5.5586$  处, 发生 Hopf 分岔, 产生极限环, 如图 4-13(c)、(d)所示; 当  $a \in (0.65, 0.87) \cup (2.23, 5.5586]$  时, 系统出现了大量的周期窗口, 并且该系统在混沌区域内  $a = 0.3226, 0.477, 1.852, 1.965$  以及  $2.031$  的邻域内均出现了单个周期窗口, 此时系统做复杂的周期运动, 产生了复杂的周期性轨道, 如图 4-13(e)、(f)、(g)、(h)、(i)、(j)所示.

综上所述, 系统通过改变某一参数的值, 都会产生复杂的周期轨道、分岔、混沌等丰富的动力学行为. 在该系统中, 通过选取合适的参数, 系统能够在  $x$  和  $y$  方向上同时产生多涡卷混沌吸引子.

## 4.7 本章小结

本章首先在改进 Chua 电路的  $y$  方向上引入一个双曲正切函数, 构造出双向网络多涡卷吸引子模型. 然后讨论了系统平衡点的稳定性, 该系统的三类平衡点均为不稳定的鞍焦平衡点, 并刻画出了系统指标为 2 的鞍焦平衡点; 利用 Lyapunov 指数与维数以及 Poincaré 截面图对系统进行数值分析, 该系统有一个大于 0 的 Lyapunov 指数, 进一步验证了该系统存在混沌现象; 最后根据 Routh-Hurwitz 定理以及分岔图和最大 Lyapunov 指数重点分析了参数  $\alpha, \beta, a, b$  变化对系统动力学行为的影响, 分析结果表明该系统具有分岔, 周期性轨道, 混沌吸引子等丰富的动力学行为.

## 第五章 四维四翼超混沌 Lü 系统

### 5.1 三维增广 Lü 系统

三维增广 Lü 系统的数学模型如下<sup>[65]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{ab}{a+b}x - yz \\ \dot{y} = ay + xz \\ \dot{z} = bz + xy \end{cases} ; \quad (5-1)$$

其中  $a, b$  为负实数, 当  $a = -10, b = -4$ , 该系统能够产生两种复杂的双翼吸引子, 如图 5-1 所示. 根据吸引子的几何位置, 这两个共存吸引子在这里被称为上吸引子和下吸引子. 当初始值  $(x_0, y_0, z_0)$  中  $z_0 \geq 0$  时, 系统(5-1)产生一个双翼上混沌吸引子;  $z_0 < 0$  时, 系统(5-1)产生一个双翼下混沌吸引子.

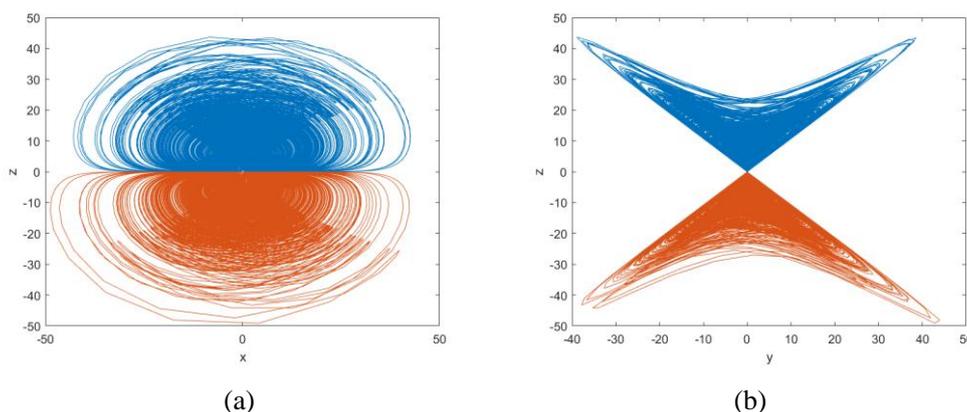


图 5-1 三维增广 Lü 系统共存的上吸引子和下吸引子

### 5.2 四维超混沌 Lü 系统

文章基于三维增广 Lü 系统, 在其第二个方程和第三个方程中同时引入一个简单的线性项和一个非线性项, 构建出一个新的四维四翼超混沌系统. 该系统的数学模型如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{ab}{a+b}x - yz \\ \dot{y} = ay + xz + w \\ \dot{z} = bz + xy + xw \\ \dot{w} = cy \end{cases} ; \quad (5-2)$$

其中  $x, y, z, w$  是状态变量,  $a, b, c$  为系统参数. 当给出适当的参数时, 该系统可以产生一个四翼超混沌吸引子, 并且该系统具有丰富的动力学特性. 当参数取  $a = -35, b = -14, c = -1$ , 系统(5-2)可以产生四翼混沌吸引子, 如图 5.2 所示.

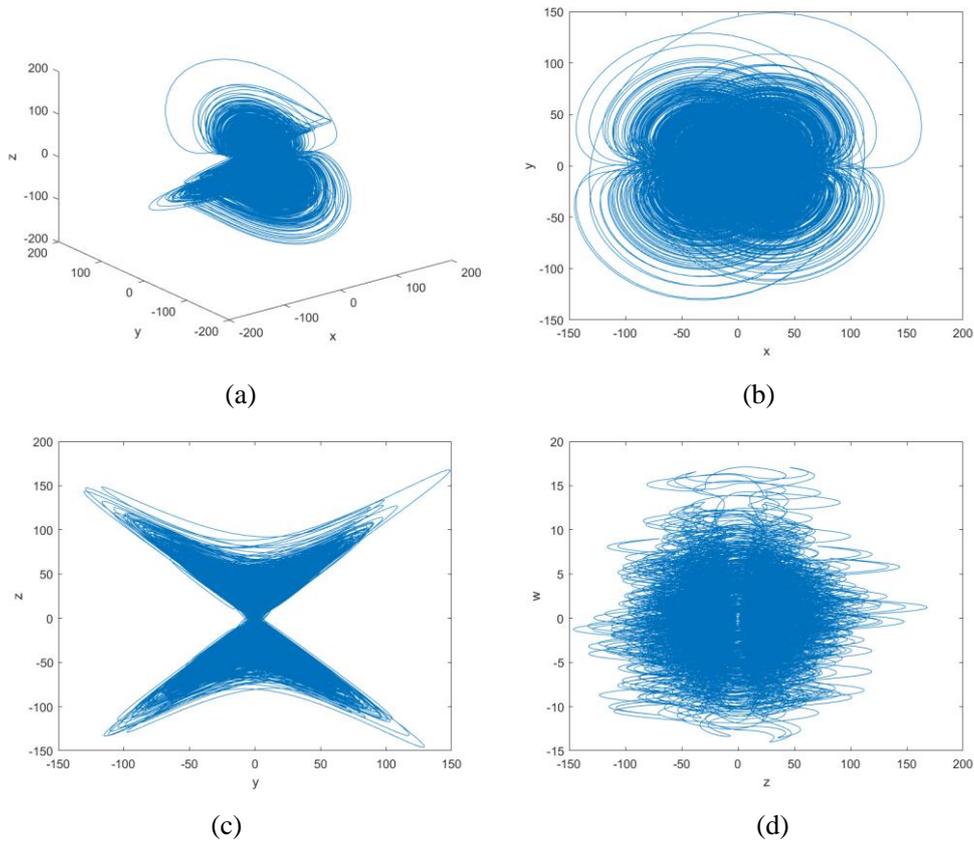


图 5-2 系统(5-2)四翼混沌吸引子相图

### 5.3 平衡点稳定性分析

为求解系统(5-2)的平衡点, 令(5-2)式右边等于零, 得到如下方程组:

$$\begin{cases} -\frac{ab}{a+b}x - yz = 0 \\ ay + xz + w = 0 \\ bz + xy + xw = 0 \\ cy = 0 \end{cases} ; \quad (5-3)$$

解得, 该系统只有一个平衡点为:  $P_0(0,0,0,0)$ .

在平衡点  $P_0$  处对系统(5-2)进行线性化的 Jacobian 矩阵为:

$$J_0 = \begin{bmatrix} -\frac{ab}{a+b} & -z & -y & 0 \\ z & a & x & 1 \\ y+w & x & b & x \\ 0 & c & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{ab}{a+b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-4)$$

令  $\det(\lambda I - J_0) = 0$ , 得到系统(5-2)的特征方程:

$$\left(\lambda + \frac{ab}{a+b}\right)(\lambda - b)(\lambda^2 - a\lambda - c) = 0 \quad (5-5)$$

求解得到相应的特征值为:

$$\lambda_1 = -\frac{ab}{a+b}, \lambda_2 = b, \lambda_3 = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 + 4c}}{2}, \lambda_4 = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + 4c}}{2}.$$

定理 5.1 令  $b < 0$  且  $a + b \neq 0$ ,  $\Omega = \{(a, b, c) \mid A_1 > 0, A_3 > 0, A_1 A_2 - A_3 > 0\}$ , 其中

$$A_1 = \frac{ab}{a+b} - a, A_2 = -\frac{a^2 b}{a+b} - c, A_3 = -\frac{abc}{a+b},$$

则系统(5-2)的平衡点  $P_0$  有以下结论:

(1) 当且仅当  $(a, b, c) \in \Omega$  时, 平衡点  $P_0$  是渐进稳定的.

(2) 当  $(a, b, c) \notin \Omega$  时, 平衡点  $P_0$  是不稳定的.

证明: 系统(5-2)在平衡点  $P_0$  处的特征方程为:

$$P(\lambda) = (\lambda - b)(\lambda^3 + A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda + A_3) = 0 \quad (5-6)$$

因而有:  $\lambda_1 = b$ ,

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3 + A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda + A_3 = 0 \quad (5-7)$$

其中

$$A_1 = \frac{ab}{a+b} - a, A_2 = -\frac{a^2 b}{a+b} - c, A_3 = -\frac{abc}{a+b}.$$

根据 Routh-Hurwitz 定理条件, 要使  $\Delta_1 > 0$ ,  $\Delta_2 > 0$ ,  $\Delta_3 > 0$  同时成立, 当且仅当  $A_1 > 0$ ,  $A_3 > 0$ ,  $A_1 A_2 - A_3 > 0$ . 此时方程 (5-7) 的根均具有负实部, 即当  $(a, b, c) \notin \Omega$  时, 系统(5-2)的平衡点  $P_0$  是渐进稳定的. 否则, 平衡点  $P_0$  是不稳定的. 证毕.

当  $a < 0, b < 0, c < 0$  时, 平衡点  $P_0$  是不稳定的, 在系统(5-2)中可能出现混沌或超混沌现象.

当参数取  $a = -35$ ,  $b = -14$ ,  $c = -1$  时, 系统(5-2)的特征值分别为:  $\lambda_1 = 10$ ,  $\lambda_2 = -14$ ,  $\lambda_3 = -34.9714$ ,  $\lambda_4 = -0.0286$ .  $\lambda_{1,2}$  为异号实根, 此时该系统的平衡点  $P_0$  为鞍点, 且具有一维稳定流形和三维不稳定流形.

## 5.4 对称性和耗散性分析

### 5.4.1 对称性

在坐标变换  $(x, y, z, w) \rightarrow (-x, -y, z, -w)$  下, 系统(5-2)的微分方程保持不变, 即系统(5-2)具有关于  $z$  轴的对称性.

### 5.4.2 耗散性分析

相空间体积随时间的相对变化率, 即系统的散度为:

$$\begin{aligned}\nabla V &= \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial w} \\ &= a + b - \frac{ab}{a+b}\end{aligned}\quad (5-8)$$

当  $a + b < \frac{ab}{a+b}$  时, 系统(5-2)是耗散的, 相空间的体积元以指数形式收敛:

$$\frac{dV}{dt} = \left(a + b - \frac{ab}{a+b}\right)V \quad (5-9)$$

解得

$$V = V_0 e^{\left(a + b - \frac{ab}{a+b}\right)t} \quad (5-10)$$

即当  $t \rightarrow \infty$  时, 系统(5-2)的轨线以指数率  $a + b - \frac{ab}{a+b}$  收缩到 0. 因此, 系统所以轨迹线最终会收敛到一个体积为 0 的集合上, 并逐渐运动固定在一个吸引子上.

当参数取  $a = -35$ ,  $b = -14$ ,  $c = -1$  时,  $\nabla V = a + b - \frac{ab}{a+b} = -39 < 0$ , 即系统(5-2)是耗散的.

## 5.5 数值分析

### 5.5.1 Lyapunov 指数和维数

选取参数  $a = -35$ ,  $b = -14$ ,  $c = -1$ , 利用 MATLAB LET 工具箱计算出了系统

(5-2) 的四个 Lyapunov 指数值分别为： $LE_1 = 3.11154$ ， $LE_2 = 0.66664$ ， $LE_3 = -0.00633186$ ， $LE_4 = -42.7712$ 。并得到 Lyapunov 维数  $D = 3.0882$ 。该系统有两个大于 0 的 Lyapunov 指数值，并且维数是分数维，说明此时系统处于超混沌状态。

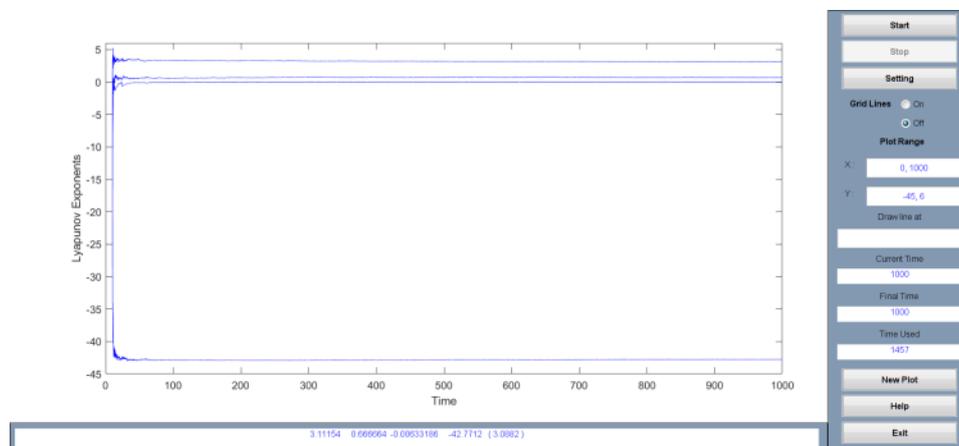


图 5-3 系统(5-2)的 Lyapunov 指数谱图

### 5.5.2 Poincaré 截面分析

选取参数  $a = -35$ ,  $b = -14$ ,  $c = -1$ ，做出系统的 Poincaré 截面图，图 5-4 是该系统在不同截面上的 Poincaré 映射。从图上可知，两个截面上都是一片密密麻麻杂乱分布的点，由此可以判定，该系统处于混沌或是超混沌状态。由上述 Lyapunov 指数可知，系统有两个大于 0 的 Lyapunov 指数，即此时系统处于超混沌状态。图 5-4 是该系统超混沌状态下在不同截面上的 Poincaré 映射，相较于之前两章单方向多涡卷混沌吸引子和网格多涡卷混沌吸引子的 Poincaré 截面图，该系统 Poincaré 截面图上点的分布杂乱无章，占据了大部分区域，说明该系统具有复杂的动力学行为。

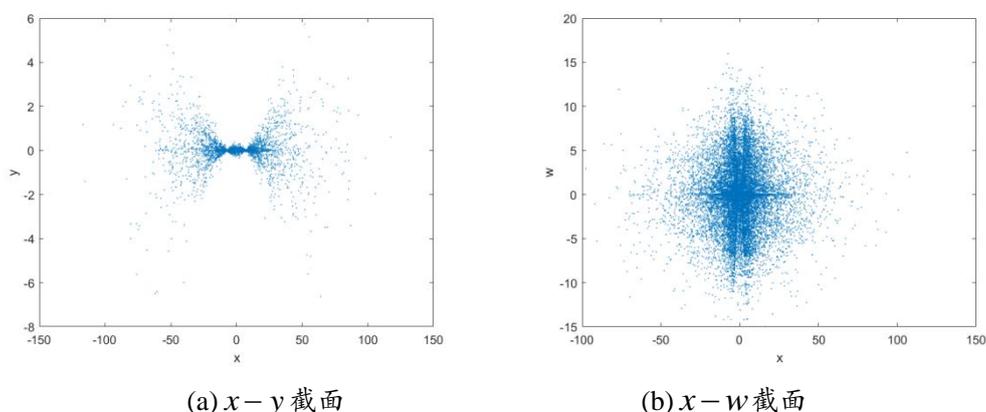


图 5-4 系统(5-2)的 Poincaré 截面图

## 5.6 系统参数的影响

根据上述平衡点稳定性分析和定理 5.1 可知, 无论  $a, b, c$  取何值, 平衡点  $P_0$  均不稳定, 即系统(5-2)是不稳定的. 下面通过分岔图和最大 Lyapunov 指数讨论各参数的改变对系统动力学行为的影响.

### 5.6.1 参数 $a$ 的影响

首先我们讨论参数  $a$  的变化对系统动力学行为的影响. 固定参数  $b = -14$ ,  $c = -1$ . 这里参数  $a$  的变化范围为  $[-10, 0]$  和  $[-100, -20]$ .

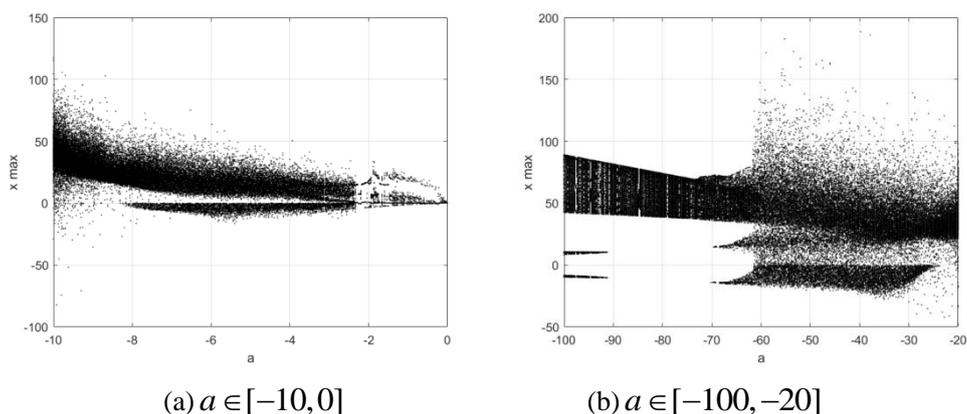


图 5-5 随参数  $a$  变化的分岔图

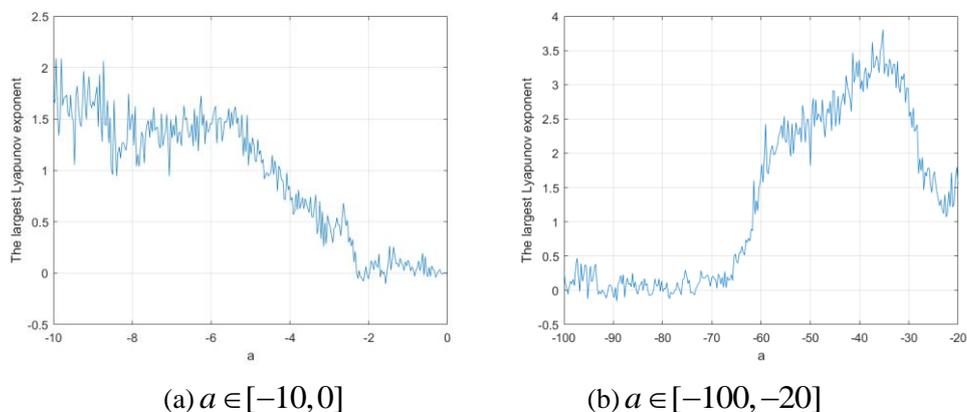
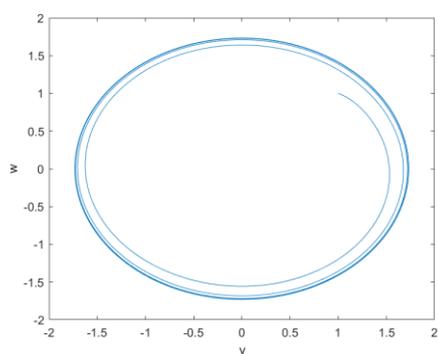


图 5-6 系统(5-2)随参数  $a$  变化的最大 Lyapunov 指数

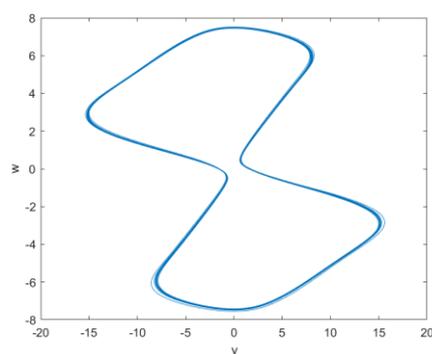
通过上述对平衡点的理论分析可知, 当  $a < 0, b < 0, c < 0$  时, 平衡点是不稳定的, 即系统(5-2)是不稳定的. 根据图 5-5 和图 5-6 随参数  $a$  变化的分岔图和最大 Lyapunov 指数谱可以看出, 该系统在  $a \in (-63, -20] \cup [-10, -2.37]$  的区间上, 系统的分岔图中呈现的都是一片密集且杂乱无章的点, 并且此时系统的最大 Lyapunov 指数都大于 0, 说明此时该系统处于混沌或超混沌状态, 系统做混沌或超混沌运动. 当  $a \in [-100, -63] \cup (-2.37, 0]$  时, 系统分岔图中的点都有序的分布, 同时最大 Lyapunov 指数在原点附近波动, 即在该区间里出现了周期窗口, 此时系

统会产生各种各样的周期性轨道. 从图 5-6(a)可以看到, 该系统在  $a = 0$  附近的最大 Lyapunov 指数为 0, 说明该系统在  $a = 0$  处存在周期解.

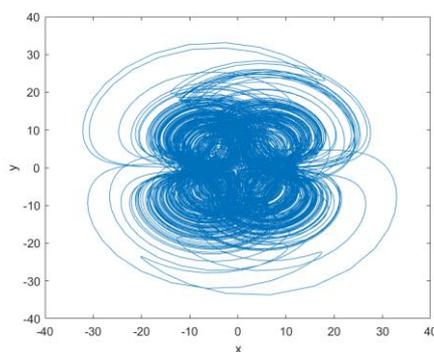
下面通过图 5-7 给出系统(5-2)在不同  $a$  值下的相轨迹图. 如图 5-7(a)、(b)、(d)、(e)、(f)、(g)、(h)所示, 该系统产生了各种各样的周期性轨道. 当  $a = 0$ 、 $a = -2.3$  和  $a = -1.68$  时, 系统产生了周期轨道, 此时该系统做周期运动, 如图 5-7(a)、(b)、(e)所示; 当  $a = -65$  时, 系统出现了拟周期轨道, 此时该系统做拟周期运动, 如图 5-7(g)所示; 当  $a = -1$ 、 $a = -91$  以及  $a = -89$  时, 系统产生了多倍周期轨道, 如图 5-7(d)、(f)、(h)所示. 当  $a \in (-63, -20] \cup [-10, -2.37)$  时, 系统处于混沌或超混沌状态, 即当  $a = -3$ , 系统做混沌或超混沌运动, 如图 5-7(c)所示.



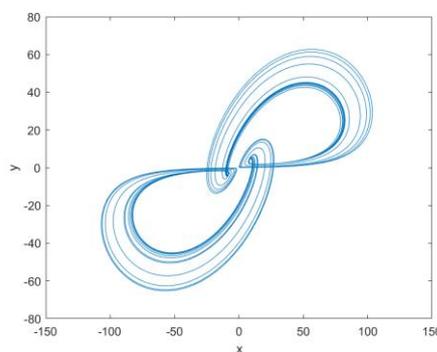
(a)  $a = 0$



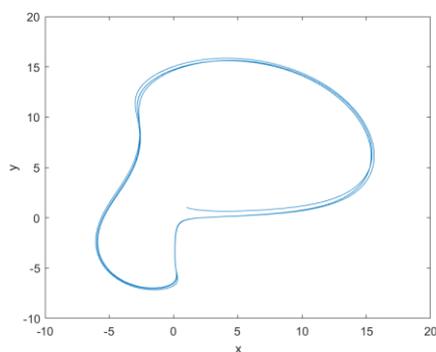
(b)  $a = -2.3$



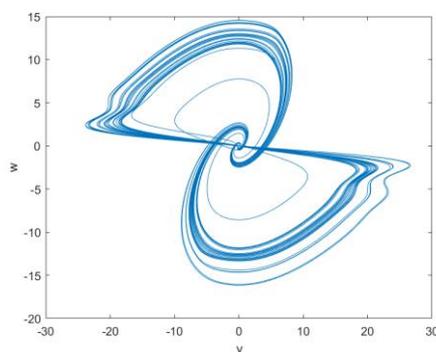
(c)  $a = -3$



(d)  $a = -91$



(e)  $a = -1.68$



(f)  $a = -1$

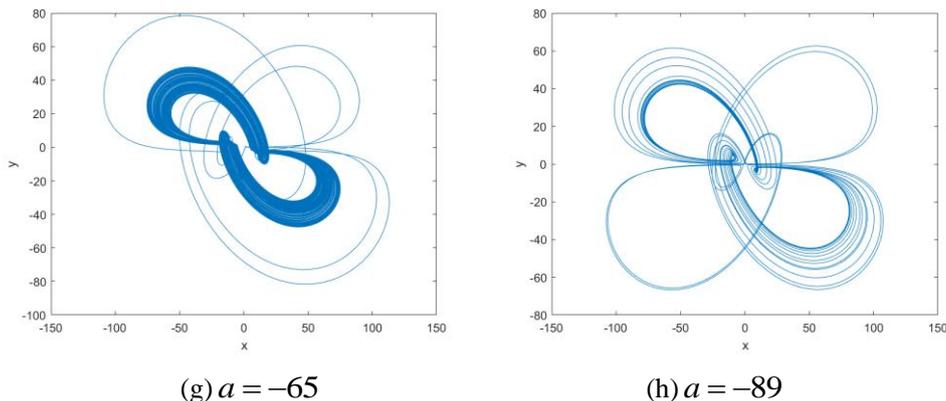


图 5-7 系统(5-2)随参数 $a$ 变化的相轨迹图

### 5.6.2 参数 $b$ 的影响

固定参数  $a = -35, c = -1$ . 这里参数  $b$  的变化范围为  $[-20, 0]$ .

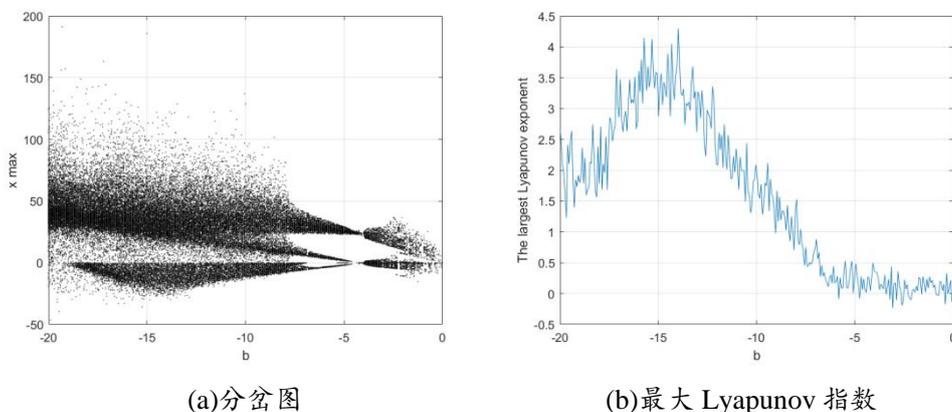


图 5-8 随参数 $b$ 变化的分岔图和最大 Lyapunov 指数

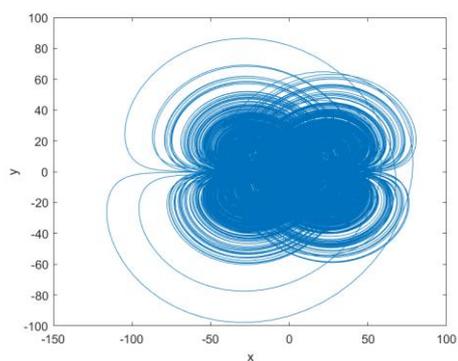
根据图 5-8 系统(5-2)随参数 $b$ 变化的分岔图和最大 Lyapunov 指数可知, 当  $b \in [-20, -7.7)$  时, 分岔图中是一片密集且散布的点, 并且  $b$  在该区间变化时, 系统的最大 Lyapunov 指数均大于 0. 说明系统在  $b \in [-20, -7.7)$  的范围内处于混沌或者超混沌状态. 当  $b > -7.7$  时, 该系统开始从混沌状态过渡到周期性状态.

$b \in [-7, -2.2] \cup (0.5, 0]$  范围内, 系统最大 Lyapunov 指数在 0 附近波动, 出现了周期窗口, 此时系统会产生各种各样的周期性轨道. 而当  $b \in (-2.2, 0.5]$  这一范围时, 根据图 5-8 可知, 此时系统进入了混沌状态, 做混沌运动.

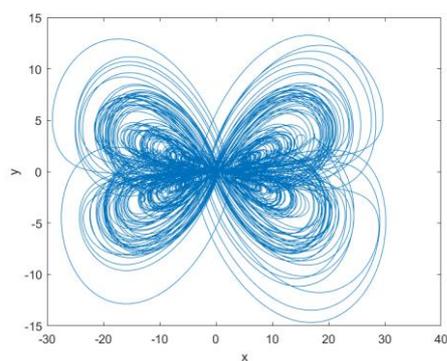
下面结合图 5-8 系统(5-2)随参数 $b$ 变化的分岔图和最大的 Lyapunov 指数图, 通过选取不同的  $b$  值, 做出系统在不同参数  $b$  下的相轨迹图, 如图 5-9 所示.

结合图 5-8 系统随参数 $b$ 变化的分岔图和最大 Lyapunov 指数可知, 当  $b \in [-20, -7.7) \cup (-2.2, -0.5]$  时, 该系统处于混沌状态, 即如图 5-9(a)、(b)所示, 当  $b = -8$  和  $b = -1.6$  时, 系统做非周期的混沌运动. 当  $b > -7.7$  时, 该系统开始从混沌状态过渡到周期性状态, 如图 5-9(c)所示, 系统呈现拟周期状态. 当  $b \in [-7, -2.2] \cup (0.5, 0]$  时, 系统做周期性运动, 在此区间内, 该系统会产生大量复

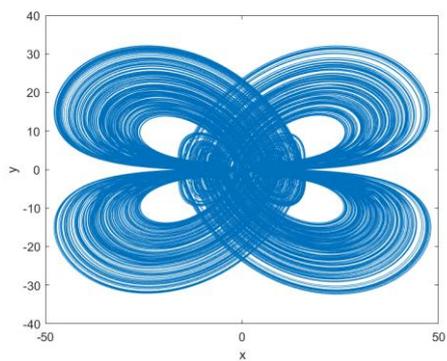
杂的周期性轨道, 如图 5-9(d)-(j)所示.



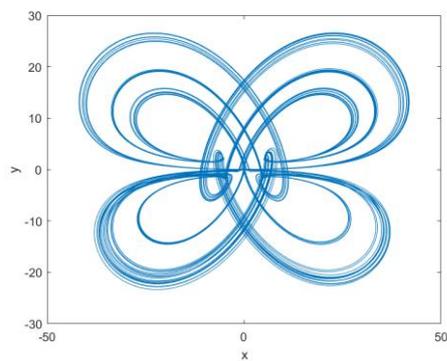
(a)  $b = -8$



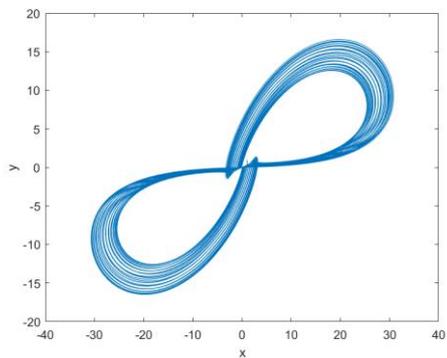
(b)  $b = -1.6$



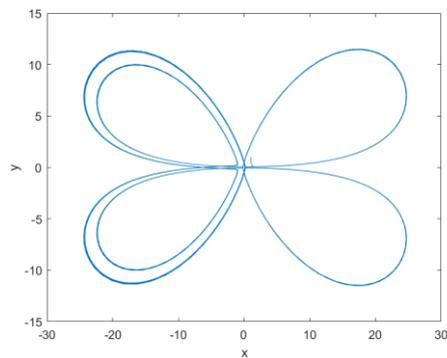
(c)  $b = -7.6$



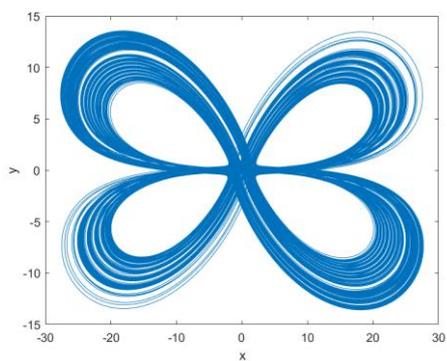
(d)  $b = -7$



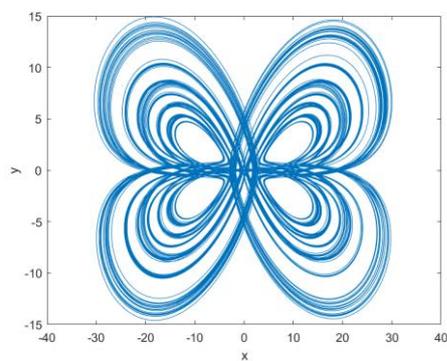
(e)  $b = -5.2$



(f)  $b = -4$



(g)  $b = -3.8$



(h)  $b = -2.7$

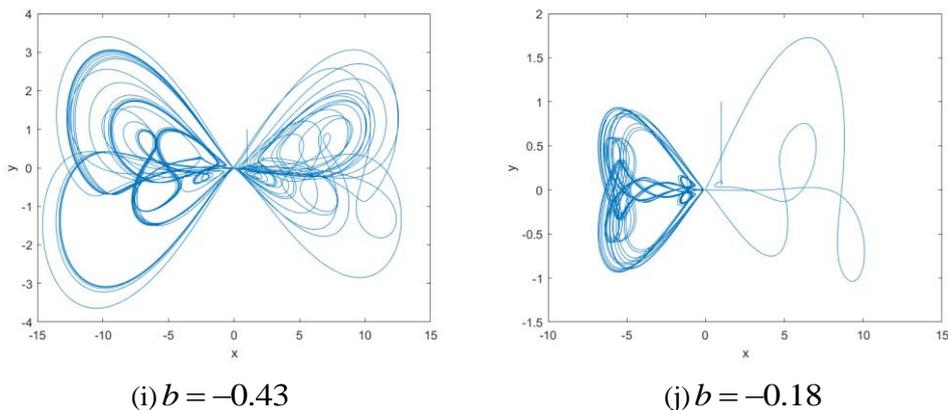


图 5-9 系统(5-2)随参数 $b$ 变化的相轨迹图

### 5.6.3 参数 $c$ 的影响

固定参数  $a = -35$ ,  $b = -14$ . 这里参数  $c$  的变化范围为  $[-100, 0]$ .

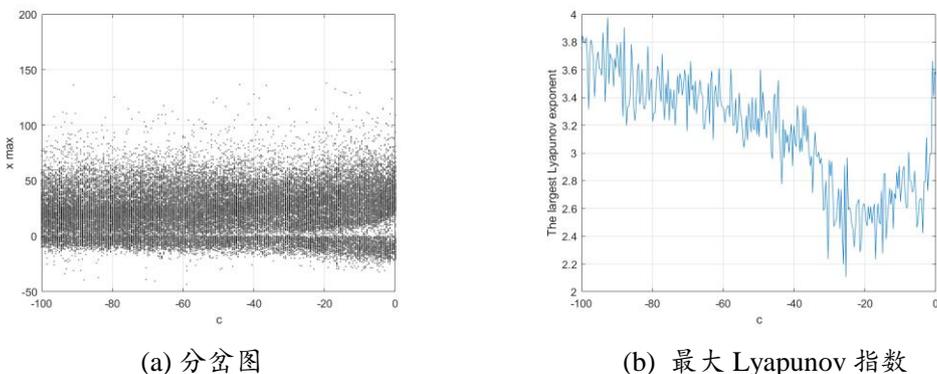


图 5-10 随参数 $c$ 变化的分岔图和最大 Lyapunov 指数

由上图 5.10 可以发现,  $c \in [-100, 0]$  这个区间范围内, 系统的分岔图, 如图 5.10(a)所示, 是一片密密麻麻且没有规律分布的点, 并且图 5.10(b)显示出该系统最大的 Lyapunov 指数都大于 2. 由此可知, 固定参数  $a = -35$ ,  $b = -14$ ,  $c \in [-100, 0]$ 时, 系统(5-2)处于混沌或超混沌状态.

## 5.7 本章小结

本章基于三维增广 Lü 系统构造出了一个新的四维超混沌系统, 讨论了系统平衡点的存在性与稳定性, 该系统仅有一个平衡点, 且为不稳定的鞍点. 结合系统的耗散性、平衡点稳定性及对称性的讨论, 利用 Lyapunov 指数、维数及庞加莱截面对该模型进行了动力学分析. 该系统具有关于  $z$  轴的对称性, 根据参数的选取, 得到该系统具有两个正的 Lyapunov 指数, 在参数的不同变化区间系统的 Poincaré 截面图和分岔图表明, 该系统具有丰富的动力学行为, 出现了超混沌现象.

## 总结与展望

本文通过定性分析和定量分析两个方面对多涡卷混沌吸引子和超混沌系统的动力学进行了研究.

### 1.研究成果总结

本文基于改进的 Chua 电路模型和三维增广 Lü 系统,通过引入非线性项分别构造出了能产生网格状多涡卷混沌吸引子的模型和存在超混沌现象的模型.并利用相轨迹图、Poincaré 截面图、Lyapunov 指数、分数维和分岔图等数值计算方法研究了多涡卷混沌吸引子和超混沌系统的动力学行为,为非线性电路研究提供了好的思路.具体研究成果如下:

首先简述了课题的研究背景及意义,并介绍了混沌的基本理论及分析方法.然后对 Tang 提出的单方向多涡卷 Chua 电路进行了基本动力学分析.利用 Routh-Hurwitz 定理讨论了系统平衡点稳定性,该系统的三类平衡点均为不稳定的鞍焦点,其中有两类平衡点为指标 2 的鞍焦点,对应系统的运动轨迹为涡卷,一类平衡点为指标 1 的鞍焦点,对应系统的运动轨迹为连接两个涡卷之间的键带.并通过数值仿真做出了系统相轨迹图,验证了理论分析的准确性.接下来根据 Routh-Hurwitz 定理和数值模拟重点讨论了参数  $\alpha, \beta, a, b$  变化对系统动力学行为的影响,分岔图和最大 Lyapunov 指数均表明该系统具有丰富的动力学行为.

然后在单方向多涡卷 Chua 电路的  $y$  方向上引入一个双曲正切函数,构造出网格多涡卷吸引子的混沌系统,通过选取合适的参数,该系统能在两个方向上同时产生多涡卷混沌吸引子.通过定性与定量的方法对该系统进行了基本动力学分析,并讨论了各参数变化对系统的影响.根据 Routh-Hurwitz 定理条件判定出了系统的平衡点均为不稳定的鞍焦点,并且刻画了能够形成涡卷的指标 2 的鞍焦平衡点.利用分岔图和最大 Lyapunov 指数验证了参数变化稳定区间的准确性,同时分岔图和最大 Lyapunov 指数也显示出了系统中存在丰富的动力学特性,且具有明显向混沌演化的行为.

并且在三维增广 Lü 系统中引入一个简单的线性项和一个非线性项,构造出了一个具有超混沌现象的四维系统.对系统进行平衡点稳定性分析,该系统仅有一个不稳定的鞍点.通过讨论系统的耗散性,该系统为耗散系统.并根据系统随参数变化的分岔图和最大的 Lyapunov 指数分别讨论了系统中  $a, b, c$  三个参数变化对系统动力学行为的影响,其中  $a$  的变化范围为  $[-10, 0]$  和  $[-100, -20]$ ,在这两个区间内,随着参数  $a$  的变化,系统的动力学行为也随之改变,出现了大量不同的运

动轨迹,包括周期性轨道、拟周期轨道、混沌吸引子等;参数 $b$ 的变化范围为 $[-20,0]$ ,随参数 $b$ 变化的分岔图和最大 Lyapunov 指数均表明此时该系统具有丰富的动力学行为;参数 $c$ 的变化范围为 $[-100,0]$ ,此时系统始终处于混沌或超混沌状态.

最后分别做出了三种系统各参数变化的相轨迹图,通过选取不同的参数值,可以观测到系统存在周期轨道、拟周期轨道、多倍周期轨道、混沌、超混沌现象.

## 2.研究展望

基于本文研究,对之后进一步的研究工作提出以下初步展望:

- (1) 对多涡卷混沌系统和超混沌系统的全局性质进行深刻探讨.
- (2) 通过实现硬件电路验证系统的混沌特性.
- (3) 进一步对高维混沌和超混沌系统的动力学行为进行研究.

## 参考文献

- [1] 高金峰. 非线性电路与混沌[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
- [2] Lorenz E.N. . Deterministic non-periodic flow[J]. Journal of the Atmospheric Sciences, 1963, 20: 130-141.
- [3] Linsay P.S. . Physical Doubling and Chaotic Behavior in a Driven An-harmonic Oscillator[J]. Physical Review Letters, 1981, 47(19): 1349-1352.
- [4] 张晓芳,陈章耀,毕勤胜. 非线性电路系统动力学的研究进展及展望[J]. 电路与系统学报, 2012, 10(17): 124-129.
- [5] 王诗斌,谢胜曙. 混沌及混沌电路的研究[J]. 国外电子测量技术, 2004, 5: 26-28.
- [6] Chua L.O., Komuro M., Matsumoto T. . The double scroll family[J]. IEEE Transaction on Circuits and Systems, 1986, 33(11): 1072-1118.
- [7] 兀旦晖,柯熙政. 基于 Chua 电路混沌同步自保持特性的研究[J]. 量子电子学报, 2004, 21(3): 355-359.
- [8] 常文利,王新新. 蔡氏电路的计算机仿真研究[J]. 兰州铁道学院学报, 2002, 21(6): 17-20.
- [9] 卢元元,薛丽萍. 蔡氏电路实验研究[J]. 电气电子教学学报, 2003, 25(3): 67- 87.
- [10] 丘水生,陈艳峰,吴敏,等. 混沌保密通信的若干问题及混沌加密新方案[J].华南理工大学学报, 2002, 30(6): 75-80.
- [11] Zaher A.A., Abu-Rezq A. . On the design of chaos-based secure communication systems[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2011, 16(9): 3721-3737.
- [12] Tang W.K.S., Zhong G.Q., Chen G., et al. Generation of N-scroll attractors via Sine function[J]. IEEE Trans. Circuits Syst.I, 2001, 48(11): 1369-1372.
- [13] Koliopanos C. L., Kyprianidis I. M., Stouboulos I. N., et al. Chaotic behaviour of a fourth-order autonomous electric circuit[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2003, 16(2): 173-182.
- [14] 禹思敏, 吕金虎. 高阶蔡氏电路及其 FPGA 实现[C]. 北京:北京航空航天大学出版社, 2007: 409-413.
- [15] Chen G., Ueta T. . Yet Another Chaotic Attractor[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 1999, 9(7): 1465-1466.
- [16] Sprott J.C. . Simple chaotic systems and circuits[J]. American Journal of Physics, 2000, 68(8): 758-763.
- [17] Lu J., Chen G. . A New Chaotic Attractor Coined[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2002, 12(3): 659-661.

- [18] 陈旭. 混沌调制与同步技术的研究[D]. 广东:广东工业大学, 2006.
- [19] Zhong G., Man K. F., Chen G. . A systematic approach to generation n-scroll attractors[J]. *Int. J. Of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12(12):2907-2915.
- [20] 王维. 忆阻混沌电路设计及其在保密通信中的应用[D]. 湖南:湘潭大学, 2016.
- [21] Bao B.C., Liu Z., Xu J.P. . Steady periodic memristor oscillator with transient chaotic behaviours[J]. *Electronics letters*, 2010, 46(3): 228-230.
- [22] Bao B.C., Xu J.P., Liu Z. . Initial state dependent dynamical behaviors in a memristor based chaotic circuit[J]. *Chinese Physics Letters*, 2010, 27(7): 070504: 1-3.
- [23] 包伯成, 刘中, 许建平. 忆阻混沌振荡器的动力学分析[J]. *物理学报*, 2010, 59(6): 3785-3793.
- [24] Bao B. C., Liu Z., Xu J. P. . Transient chaos in smooth memristor oscillator[J]. *Chin. Phys. B*, 2010, 19(3): 030510: 1-6.
- [25] 包伯成, 史国栋, 许建平. 含两个忆阻器混沌电路的动力学分析[J]. *中国科学: 技术科学*, 2011, 41(8): 1135-1142.
- [26] 王延江. 基于荷控忆阻器的蔡氏对偶混沌电路分析[J]. *西南大学学报*, 2016, 38(4): 144-149.
- [27] 张琳琳, 张烁, 常文亭, 等. 基于蔡氏对偶电路的四阶忆阻混沌电路[J]. *中国科技论文*, 2017, 12(8): 946-951.
- [28] 闫登卫, 王丽丹, 段书凯. 基于忆阻器的多涡卷混沌系统及其脉冲同步控制[J]. *物理学报*, 2018, 67(11): 110502: 1-14.
- [29] 仇睿煌, 蔡理, 冯朝文, 等. 基于忆阻器超混沌系统的动力学分析及电路实现[J]. *固体电子学研究*与进展, 2018, 038(003): 184-188.
- [30] 林毅, 刘文波, 沈骞. 五阶压控忆阻蔡氏混沌电路的双稳定性[J]. *物理学报*, 2018, 67(23): 230502.
- [31] Silva C.P. . Shil'nikov's theorem-A tutorial[J]. *IEEE Transactions on Circuits & Systems I Fundamental Theory & Applications*, 1993, 40(10): 675-682.
- [32] Zhou T.S., Tang Y., Chen G. . Chen's attractor exists [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2004, 14(09): 3167-3177.
- [33] Zhou T.S., Chen G.R., Celikovskiy S. . Si'lnikov chaos in the generalized Lorenz canonical form of dynamical systems [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2005, 39(4): 319-334.
- [34] Zhou L., Chen F. . Shil'nikov chaos of the Liu system[J]. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2008, 18(1): 013113.
- [35] 周良强, 陈予恕, 陈芳启. 一个新系统的 Hopf 分岔与混沌运动[J]. *电路与系统学报*, 2010, 15(2): 66-69.
- [36] Sandra K., Anibal C., Sicardi-Schifino. Homoclinic bifurcation in Chua's circuit [J]. *Physica A*, 1999, 262(1-2): 144-152.

- [37] Algaba A., Gamero E., Rodriguez-Luis A.J. . A bifurcation analysis of a simple electronic circuit [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2005, 10(2): 169-178.
- [38] Nishiuchi Y., Ueta T., Kawakami H. . Stable torus and its bifurcation phenomena in a simple three-dimensional autonomous circuit[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006, 27(4): 941-951.
- [39] Miliou A.N., Stavrinides S.G., Valaristos A.P., et al. Nonlinear electronic circuit, Part I: Multiple routes to chaos[J]. *Nonlinear Analysis Theory, Methods & Applications*, 2009, 71(12):3-20.
- [40] Miliou A.N., Stavrinides S.G., Valaristos A.P., et al. Nonlinear electronic circuit, Part II: synchronization in a chaotic MODEM scheme[J]. *Nonlinear Analysis Theory, Methods & Applications*, 2009, 71(12):21-31.
- [41] Chen Z.Y., Zhang X.F., Bi Q.S. . Bifurcations and chaos of coupled electrical circuits[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2008, 9(3): 1158-1168.
- [42] 雷腾飞, 刘彦芬, 陈众起, 等. 一类具有吸引子共存新混沌系统的动力学分析、电路仿真及应用[J]. *曲阜师范大学学报:自然科学版*, 2017(43):35-43.
- [43] 闵富红, 王珠林, 曹弋, 等. 基于双曲函数的双忆阻器混沌电路多稳态特性分析 [J]. *电子学报*, 2018, 046(002):486-494.
- [44] Li T.Y., Yorke J.A. . Period three implies chaos[J]. *American Mathematical Monthly*, 1975, 8(10): 985-992.
- [45] Aulbach B., Kieninger B. . On three difinitions of chaos[J]. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 2001, 1(1): 23-37.
- [46] Devaney R.L. . An introduction to Chaotic Dynamical Systems[M]. Mento Park, CA: Addison-Wesley, 1989: 49-53.
- [47] Banks J., Brooks J., Cairns G., et al. On Devaney's definition of chaos[J]. *The American Mathematical Monthly*, 1992, 99: 332-334.
- [48] Wiggins S. . Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos[M]. Second Edit. New York: Springer-Verlag, 1990: 608-615.
- [49] Martelli M., Dang M., Steph T. . Defining chaos[J]. *Math Magazine*, 1998, 71(2): 112-122.
- [50] Huang W., Ye X. . Devaney's chaos or 2-scattering implies Li-Yorke's chaos[J]. *Topology and its Applications*, 2002, 117: 259-272.
- [51] Morotto F.R. . Snap-back repellers imply chaos in  $R^n$ [J]. *Journal of Mathenatical Analysis and Applications*, 1978, 63: 199-223.
- [52] Morotto F.R. . On redefining a snap-back repeller[J]. *Chaos Solitons and Fractals*, 2005, 25:

25-28.

[53] Chen G., Dong X. . From Chaos to Order: Methodologies, Perspectives and Applications[M]. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2002.

[54] 黄润生, 黄浩. 混沌控制及其应用[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2003: 1-50.

[55] 张琪昌, 王洪礼, 等. 分岔与混沌理论及应用[M]. 天津: 天津大学出版社, 2005: 1-188.

[56] 张锦炎, 冯贝叶. 常微分方程几何理论与分支问题[M].北京:北京大学出版社, 1987: 206-237.

[57] 陈予恕,唐云.非线性动力学中的现代分析方法[M].北京:科学出版社, 1992:10-200.

[58] 冯贝叶,李继彬.稳定性、分支与混沌[M].云南:云南科技出版社, 1995: 1-60.

[59] Hassard B., Kazarinoff N., Wan Y. . Theory and Application of Hopf Bifurcation[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1982: 14-70.

[60] Kuznetsov Y.A. . Elements of Applied Bifurcation Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 2004.

[61] 陈予恕.非线性振动系统的分叉和混沌理论[M].北京:高等教育出版社, 1993: 209.

[62] 孙立明.非线性系统 Hopf 分岔控制及应用[D].天津:天津大学, 2012.

[63] 张伟年. 动力系统基础[M].北京:高等教育出版社, 2001: 15-66.

[64] 廖晓昕.稳定性的理论、方法和应用[M].武汉:华中科技大学出版社,2010:14-18.

[65] Lü J., Chen G., Cheng D. . A New Chaotic System and Beyond: the Generalized Lorenz-like System[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2004, 14(5): 1507-1537.

## 攻读硕士学位期间取得的研究成果

### 已发表的学术论文：

- [1] 彭智俊,汤琼,陈硕,宋爽. 基于正弦函数的多涡卷吸引子及其动力学分析[J],湖南工业大学学报,2019,33(3):6-15.
- [2] 陈硕,汤琼,彭智俊,宋爽. 槽口宽度对伺服永磁电机齿槽转矩的影响研究[J].湖南工业大学学报,2019,33(03):22-26+32.
- [3] 陈硕,汤琼,彭智俊,宋爽. 基于正交试验法优化表贴式永磁同步电机永磁体[J],微特电机,2019,47(10):36-38.

### 在投的论文：

- [4] 《Grid Multi-Scroll Chaotic Attractors And Its Dynamics Analysis》已投AIMS Mathematics,待发表.

### 参与科研项目：

项目排名第二. 省级研究生创新项目(CX2018B742)-《永磁电机设计及其控制场计算》.

## 致 谢

时光匆匆,求学三年时间倏然而逝.三年的学习生涯里,无论是思想、学习还是生活,都有所得,满怀感激.

感谢我的导师汤琼教授,将我带入了混沌科学这一前沿领域,在她的悉心指导下完成了这篇论文.从选题到撰写,再到最后的定稿,她都倾注了大量的心血.三年的学习时间,她教会了我很多,从文献筛选、编程仿真,到深入理解理论知识,举一反三,这些都离不开她的细心与耐心的指导.汤老师工作中认真负责、一丝不苟的态度以及生活中平易近人、朴实无华的性情都给予了我莫大的启迪.

感谢所有的任课老师,丰富了我的知识体系,拓展了知识面,为我的课题研究提供了理论支持.通过课程中与老师们的探讨,培养了多角度看待问题的能力.

读研三年期间,还要感谢我的同门师兄妹陈硕和宋爽,在科研求学路上给予我鼓励和帮助.感谢谷飞学长,在我遇到问题的时候会耐心的答疑解惑.感谢我的室友史小燕和赵康婷,以及 306 实验室共同奋斗的小伙伴们,我们一起学习,一起玩耍,相互鼓励,让科研路上萦绕欢笑.时光匆匆,愿未来人生完满幸福,愿后会有期.

最后感谢我的父母,一直在我身后默默的给予我关怀与支持,让我可以不畏惧的向前追逐.