

关于电阻分路约瑟夫森结的解析解*

姚 希 贤
(南京大学物理系)

提 要

超导弱连接在外源作用下,一般能简化为由电流源驱动电阻分路约瑟夫森结模型.如果电流源为一直流电流和一交变电流组成,本文将给出解析解.此外,在无量纲交变电流 $i_1 \ll 1$ 的情况下,应用上述解析解的结果处理了平方律检测以及平均电压 \bar{v} 等于零时阶跃问题.

一、引 言

超导弱连接在微波直至亚毫米波段可用于检测和混频等,人们对之进行了广泛的研究.超导弱连接的电容和电感极小,一般能简化为由电流源驱动电阻分路约瑟夫森结模型^[1],其等效电路由图 1 所示.此时,关于结两侧的量子位相差 φ 所满足的微分方程为

$$\frac{\hbar}{2eR} \frac{d\varphi}{dt} + I_c \sin \varphi = I(t), \quad (1)$$

其中 $\frac{\hbar}{2e} \frac{d\varphi}{dt}$ 为弱连接上依赖于时间的电压, I_c

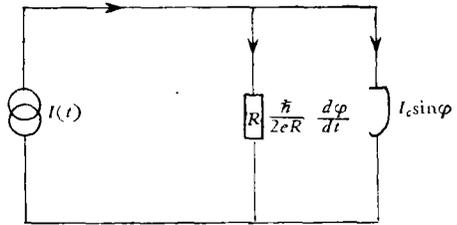


图 1 电阻分路约瑟夫森结的等效电路

为弱连接的临界超电流, R 为其正常电阻, $I(t)$ 为外加电流源.当电流源为一直流电流 I_0 和一频率为 ω 的交变电流 $I_1 \cos \omega t$ 组成时,有

$$I(t) = I_0 + I_1 \cos \omega t. \quad (2)$$

如果引入无量纲的时间 τ , 频率 Ω 和电流 i ,

$$\tau = \frac{2eI_c R}{\hbar} t, \quad (3)$$

$$\Omega = \frac{\hbar}{2eI_c R} \omega, \quad (4)$$

$$i = \frac{I}{I_c}, \quad (5)$$

则(1)式变为

$$\frac{d\varphi}{d\tau} + \sin \varphi = i_0 + i_1 \cos \Omega \tau, \quad (6)$$

* 1977 年 12 月 5 日收到.

其中 $\frac{d\varphi}{d\tau}$ 为弱连接上的无量纲电压,量度电压的单位是 $I_c R$. 需要指出, 交变电流在所考虑的情况下是由外加辐射场引起的.

当 $i_1 = 0$ 时, 方程(6)具有解析解, 可分段表示为^[2]

$$\sin \varphi = i_0 = \text{常数} \quad \text{当 } i_0 \leq 1, \quad (7)$$

$$\sin \varphi = i_0 - \frac{v_0^2}{i_0 + \cos v_0 \tau} \quad \text{当 } i_0 > 1, \quad (8)$$

其中

$$v_0 = \sqrt{i_0^2 - 1}. \quad (9)$$

在任意 i_1 的情形下, 由于(6)式的高度非线性性质, 特别是未能求得解析解, 人们发展了多种求解方法. 例如, 有用欧勒法直接进行数值计算求解的^[3]; 有用电路模拟计算机方法求解的^[4]; 有用力学模拟方法求解的^[5]; 当 $i_1 \ll 1$ 时, 因为 $i_1 = 0$ 时有解析解, 可用微扰法求解^[6], 虽然其结果是解析的, 但是在微扰法失效的奇点附近, 尚不能妥善处理; Kanter 等在 $i_1 \ll 1$ 时还发展了一种试探解, 然后再用微扰论确定引入的参量和小的参量函数, 实际上也可把此方法归入微扰方法^[7]. 关于解析解, Renne 等人^[8]指出, 对(6)式可以获得某种解析解, 他们在对(6)式进行了一系列的变量变换后, 最后归结为求解一个具有周期势的一维 Schrödinger 方程, 但没能给出具体解的形式. 因此, 关于求解(6)式的解析解的问题仍然是有意义的. 本文将给出(6)式的某种解析解的形式.

二、关于(6)式的解析解

如果对(6)式两边乘以 $e^{i\varphi}$, 其中 $j = \sqrt{-1}$, 可得

$$2je^{i\varphi} \frac{d\varphi}{d\tau} + (e^{2i\varphi} - 1) = 2je^{i\varphi}(i_0 + i_1 \cos \Omega\tau). \quad (10)$$

若令

$$y = e^{i\varphi}, \quad (11)$$

则 y 满足如下的方程

$$2 \frac{dy}{d\tau} + y^2 - 1 = 2j(i_0 + i_1 \cos \Omega\tau)y. \quad (12)$$

再作变数变换,

$$y = 2 \frac{dz}{d\tau} / z, \quad (13)$$

得到 z 所满足的方程为

$$4 \frac{d^2 z}{d\tau^2} - 4j(i_0 + i_1 \cos \Omega\tau) \frac{dz}{d\tau} - z = 0. \quad (14)$$

(14)式是关于 z 的二阶齐次线性方程, 求解 z 是可以处理的.

现在讨论解的存在性. 从(14)式可以看到 z 具有复数解, 即

$$z = z_R + jz_I, \quad (15)$$

其中 z_R 和 z_I 为复函数 z 的实部和虚部. 另外由于 φ 是实数, 由(11)式可知 y 的模恒等于 1, 亦即 $2 \frac{dz}{d\tau} / z$ 的模恒等于 1, 这就等价于要求的 z_R 和 z_I 满足条件:

$$4 \left(\frac{dz_R}{d\tau} \right)^2 + 4 \left(\frac{dz_I}{d\tau} \right)^2 - z_R^2 - z_I^2 = 0, \quad \text{对任意 } \tau. \quad (16)$$

如果把 z 的表示式(15)代入(14)式, 分别使其实部和虚部相等, 就得一组关于 z_R 和 z_I 的联立微分方程:

$$4 \frac{d^2 z_R}{d\tau^2} + 4(i_0 + i_1 \cos \Omega\tau) \frac{dz_I}{d\tau} - z_R = 0, \quad (17)$$

$$4 \frac{d^2 z_I}{d\tau^2} - 4(i_0 + i_1 \cos \Omega\tau) \frac{dz_R}{d\tau} - z_I = 0. \quad (18)$$

对(17)式乘以 $\frac{dz_R}{d\tau}$, 对(18)式乘以 $\frac{dz_I}{d\tau}$, 然后把两式相加可得

$$4 \frac{dz_R}{d\tau} \frac{d^2 z_R}{d\tau^2} + 4 \frac{dz_I}{d\tau} \frac{d^2 z_I}{d\tau^2} - z_R \frac{dz_R}{d\tau} - z_I \frac{dz_I}{d\tau} = 0, \quad (19)$$

或者

$$\frac{d}{d\tau} \left[4 \left(\frac{dz_R}{d\tau} \right)^2 + 4 \left(\frac{dz_I}{d\tau} \right)^2 - z_R^2 - z_I^2 \right] = 0. \quad (20)$$

从(20)式可知, 如果在初始时刻选择 z , 使(20)式方括号内的量等于零, 那么在任意 τ 时它将仍然为零. 所以, 条件(16)仅仅归结为在初始时刻满足下式:

$$2 \left| \frac{dz}{d\tau} / z \right| = 1, \quad \text{当 } \tau = 0 \text{ 时}. \quad (21)$$

考虑到(11)和(13)式, 得知, 当 $\tau = 0$ 时有

$$2 \frac{dz}{d\tau} / z \Big|_{\tau=0} = y \Big|_{\tau=0} = e^{i\varphi_0}, \quad (22)$$

其中 φ_0 是 $\tau = 0$ 时的量子位相差 φ 的值. 所以(21)式必然成立, 亦就是说条件(16)必然成立. 所以只需求解(14)式, 在求得 z 后使其满足初始条件(22)即可.

求解(14)式非常类似于求解 Mathieu 方程^[9]. 为书写简单, 对(14)式再作如下自变量变换:

$$x = \Omega\tau, \quad (23)$$

(14)式变为

$$4\Omega^2 \frac{d^2 z}{dx^2} - 4\Omega j(i_0 + i_1 \cos x) \frac{dz}{dx} - z = 0. \quad (24)$$

上述两阶齐次线性常微分方程的系数为周期函数, 周期为 2π . 根据 Floquet 定理, 可以证明其解具有如下形式^[9]:

$$e^{i^s x} F(x), \quad (25)$$

其中 $F(x)$ 为周期函数, 周期等于 2π , 即

$$F(x + 2\pi) = F(x). \quad (26)$$

如果把 $F(x)$ 展开为傅里叶级数, (24) 式具有如下形式的级数解¹⁾:

$$e^{ix} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}. \quad (27)$$

把(27)式代入(24)式, 得到如下的有关 a_n 的循环公式:

$$\begin{aligned} 2\Omega i_1(s+n+1)a_{n+1} - [4\Omega^2(s+n)^2 - 4\Omega i_0(s+n) + 1]a_n \\ + 2\Omega i_1(s+n-1)a_{n-1} = 0, \end{aligned} \quad \text{对任意 } n. \quad (28)$$

为了求得收敛解, 可以采取如下做法. 对正的 n , 把(28)式改写为

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2\Omega i_1(s+n-1)}{4\Omega^2(s+n)^2 - 4\Omega i_0(s+n) + 1 - 2\Omega i_1(s+n+1) \frac{a_{n+1}}{a_n}}, \quad \text{对 } n > 0. \quad (29)$$

对负的 n , 把(28)式改写为

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2\Omega i_1(s+n+1)}{4\Omega^2(s+n)^2 - 4\Omega i_0(s+n) + 1 - 2\Omega i_1(s+n-1) \frac{a_{n-1}}{a_n}}, \quad \text{对 } n < 0. \quad (30)$$

首先考虑(29)式, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, a_n/a_{n-1} 将如 $i_1/2\Omega n$ 地趋向于零, 只要 a_{n+1}/a_n 亦以同样方式趋向于零即可. 这样求得的系数比可以保证(27)式中有关 e^{ix} 的正幂级数部分是收敛的. 公式(29)还告诉我们, 可以从非常大的正 n 值开始, 逐步求出较小 n 的系数比 a_n/a_{n-1} . 例如, 若 n 足够大以致 a_{n+1}/a_n 可以十分接近地用 $i_1/2(n+1)\Omega$ 来表示, 利用(29)式即可求得 a_n/a_{n-1} . 循此以往, 一直可以求得 a_1/a_0 . 同理, 考虑(30)式, 当 $n \rightarrow -\infty$ 时, a_n/a_{n+1} 将如 $i_1/2n\Omega$ 地趋向于零, 只要 a_{n-1}/a_n 亦以同样方式趋向于零即可. 这样求得的系数比可以保证(27)式中有关 e^{ix} 的负幂级数部分是收敛的. (30)式还告诉我们, 从足够大的负 n 值开始, 逐步求出 a_n/a_{n+1} 直至 a_{-1}/a_0 . 这样求得的表示式被称为连续分式表示式. 例如

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{2\Omega i_1 s}{4\Omega^2(s+1)^2 - 4\Omega i_0(s+1) + 1 - \frac{4\Omega^2 i_1^2 (s+1)(s+2)}{4\Omega^2(s+2)^2 - 4\Omega i_0(s+2) + 1 - \frac{4\Omega^2 i_1^2 (s+2)(s+3)}{4\Omega^2(s+3)^2 - 4\Omega i_0(s+3) + 1 - \dots}}. \quad (31)$$

1) 如果对(24)式作如下自变量变换:

$$u = e^{ix},$$

则 z 满足微分方程

$$4\Omega^2 u^2 \frac{d^2 z}{du^2} - [4\Omega(i_0 - \Omega)u + 2\Omega i_1 u^2 + 2\Omega i_1] \frac{dz}{du} + z = 0.$$

上述方程是系数为代数形式的两阶齐次线性方程, 它具有两个非正则奇点: u 等于 0 和 ∞ . 考虑到正文中由 Floquet 定理所导致的结论, 可知其解的形式必为 u^s (即 e^{isx}) 乘上一个变量 u 的罗朗级数, 即

$$z = u^s \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n u^n.$$

如果把 u 仍然变回到 x , 解即具有(27)式的形式.

$$\frac{a_{-1}}{a_0} = \frac{2Qi_1s}{4Q^2(s-1)^2 - 4Qi_0(s-1) + 1} - \frac{4Q^2i_1^2(s-1)(s-2)}{4Q^2(s-2)^2 - 4Qi_0(s-2) + 1} - \frac{4Q^2i_1^2(s-2)(s-3)}{4Q^2(s-3)^2 - 4Qi_0(s-3) + 1}. \quad (32)$$

不失一般性,通常令 $a_0 = 1$. 用这种方法求得的系数比保证了解的收敛性,同时也求得了所有的 a_n .

关于求解 s , 可以求助于自洽方法. 在(28)式中若令 $n=0$, 可得联系 a_1/a_0 和 a_{-1}/a_0 的公式

$$4Q^2s^2 - 4Qi_0s + 1 - 2Qi_1(s+1) \frac{a_1}{a_0} - 2Qi_1(s-1) \frac{a_{-1}}{a_0} = 0. \quad (33)$$

把(33)式与(31),(32)式联立起来就是求解 s 的公式. 先解代数方程(33)求得 s 的两个形式解:

$$s_1 = \frac{1}{2Q} \left\{ i_0 + \frac{i_1(a_1 + a_{-1})}{2a_0} + \left[\left(i_0 + \frac{i_1a_1}{2a_0} + \frac{i_1a_{-1}}{2a_0} \right)^2 - \left(1 - 2Qi_1 \frac{a_1}{a_0} + 2Qi_1 \frac{a_{-1}}{a_0} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad (34)$$

$$s_2 = \frac{1}{2Q} \left\{ i_0 + \frac{i_1(a_1 + a_{-1})}{2a_0} - \left[\left(i_0 + \frac{i_1a_1}{2a_0} + \frac{i_1a_{-1}}{2a_0} \right)^2 - \left(1 - 2Qi_1 \frac{a_1}{a_0} + 2Qi_1 \frac{a_{-1}}{a_0} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (35)$$

把(31),(32)两式中的 s 用 s_1 表示, 然后联立(31),(32)和(34)三式用以求解 s_1 . 所谓自洽方法求解 s_1 就是: 先设定某个 s'_1 代入(31)和(32)式, 算得 a_1/a_0 和 a_{-1}/a_0 , 然后把它们代入(34)式以验证设定的 s'_1 是否与(34)式获得的 s_1 相符, 如果不符, 那么可把新获得的 s_1 重新当作试探值 s'_1 , 重复上述过程, 直至自洽为止. 求解 s_2 的过程完全相同.

如果人们用自洽方法求出 s 的两个解 s_1 和 s_2 后, 即可利用(29)和(30)两式分别求得两组 a_n (n 取各种不同的整数). 把相应于 s_1 的一组仍然记作 a_n , 把相应于 s_2 的一组记作 b_n , 从而求得了两个线性独立解:

$$z_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{j(s_1+n)x}, \quad \text{其中 } a_0 = 1, \quad (36)$$

$$z_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{j(s_2+n)x}, \quad \text{其中 } b_0 = 1. \quad (37)$$

于是(24)式的通解 z 为

$$z = Az_1 + Bz_2, \quad (38)$$

其中 A 和 B 是两个任意复常数. 利用(11)和(13)式, 并考虑到 $x = Q\tau$, 求得

$$e^{j\varphi} = y = 2 \frac{dz}{d\tau} / z = 2Q \frac{dz}{dx} / z. \quad (39)$$

把 z 的具体表式(36)和(37)代入, 求得

$$e^{i\varphi} = y = 2Qj \frac{C \sum_n a_n(s_1 + n)e^{i(s_1+n)x} + \sum_n b_n(s_2 + n)e^{i(s_2+n)x}}{C \sum_n a_n e^{i(s_1+n)x} + \sum_n b_n e^{i(s_2+n)x}}, \quad (40)$$

其中 C 是个复常数, 等于

$$C = A/B. \quad (41)$$

它的值由初始条件确定. 若 $Q\tau = x = 0$ 时, 量子位相差 φ 具有初始值 φ_0 , 则

$$e^{i\varphi_0} = 2Qj \frac{C \sum_n a_n(s_1 + n) + \sum_n b_n(s_2 + n)}{C \sum_n a_n + \sum_n b_n} \quad (42)$$

即是确定 C 的条件.

三、平方律检测和零电压阶跃

从本文第二部分中知道, 求解高度非线性的微分方程(6)的问题已经变为一个可以处理的代数运算的问题. 作为上述方法的一个简单应用, 我们来考虑小信号的检测问题. 如果辐射场很弱, 即 $i_1 \ll 1$ 的情况下, 无论求解 s 和 a_n 诸量, 从代数运算的角度看来将变得简单得多. 先求解 s_1 . 从(34)式可知, 如果忽略包含 a_1 和 a_{-1} 的项(因为 $a_0 = 1$), 则可取试探值 s'_1 为

$$i_0 + (i_0^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = i_0 + v_0. \quad (43)$$

把 s'_1 代入(31)和(32)式求得 a_1 和 a_{-1} . 由于 $i_1 \ll 1$, a_1 或 a_{-1} 都可按 i_1 展开为幂级数, 它们都是收敛很快的. 如果希望准确到 i_1^k 的幂, 那么在连续分式中要保留到 $n = k - 1$ 的项. 不难验证, 把这样的 a_1 和 a_{-1} 代入(34)式, 求得一个新的 s_1 , 这样的 s_1 并不能使(31), (32)和(34)式自洽, 把新得的 s_1 重新作为试探值 s'_1 , 重新再求 a_1 和 a_{-1} , 这样的重复次数到 k 时, 就能使(31), (32)和(34)式求得 a_1 , a_{-1} 和 s_1 成为自洽的了. 由于我们考虑小信号检测, 只须准确到 i_1^2 项即可, 因此在这里计算 s_1 , a_1 和 a_{-1} 都准确到 i_1^2 项. 所以只要重复一次即可. 经过简单的运算求得

$$a_1 = \frac{i_1(i_0 + v_0)}{4Q(Q + v_0)} + o(i_1^2), \quad (44)$$

$$a_{-1} = \frac{i_1(i_0 + v_0)}{4Q(Q - v_0)} + o(i_1^2), \quad (45)$$

$$s_1 = \frac{1}{2Q} \left[i_0 + v_0 + \frac{i_1^2}{4v_0(Q^2 - i_0^2 + 1)} \right] + o(i_1^2), \quad (46)$$

其中 $v_0 = \sqrt{i_0^2 - 1}$. 利用关于 a_2/a_1 和 a_{-2}/a_{-1} 的连续分式表示式, 求得

$$a_2 = \frac{i_1(i_0 + v_0 + 2Q)}{8Q(2Q + v_0)} a_1 + o(i_1^3), \quad (47)$$

$$a_{-2} = \frac{i_1(i_0 + v_0 - 2Q)}{8Q(2Q - v_0)} a_{-1} + o(i_1^3). \quad (48)$$

用完全类似的方法, 求得

$$s_2 = \frac{1}{2Q} \left[i_0 - v_0 - \frac{i_1^2}{4v_0(Q^2 - i_0^2 + 1)} \right] + o(i_1^3), \quad (49)$$

$$b_1 = \frac{i_1(i_0 - v_0)}{4Q(Q - v_0)} + o(i_1^3), \quad (50)$$

$$b_{-1} = \frac{i_1(i_0 - v_0)}{4Q(Q + v_0)} + o(i_1^3), \quad (51)$$

$$b_2 = \frac{i_1(i_0 - v_0 + 2Q)}{8Q(2Q - v_0)} b_1 + o(i_1^3), \quad (52)$$

$$b_{-2} = \frac{i_1(i_0 - v_0 - 2Q)}{8Q(2Q + v_0)} b_{-1} + o(i_1^3). \quad (53)$$

不难看出, $a_n, b_n (|n| > 2)$ 都是高于 i_1^2 的项, 在准确到 i_1^2 幂的近似下是可以忽略的。

必须指出, 在给定 Q 下, 如果 i_0 的值使 Q 处于 $\pm \sqrt{i_0^2 - 1}$, 或者 $2Q$ 处于 $\pm \sqrt{i_0^2 - 1}$ 的附近, 从(44)–(53)式可知, s 和 a, b 中将有一些趋向于无限大, 这种情况需要特别考虑, 此时在直流 I - V 特性曲线上将出现阶跃的情况, 也就是弱连接上的平均电压所相应的约瑟夫森振荡频率将被外加辐射场频率锁定的情况。若 i_0 处于 1 附近也会使 s 趋向无限大, 这也需要特别考虑。这些我们将另文处理。在不属于上述情况时, 求得两个准确到 i_1^2 幂的线性独立解:

$$z_1 = e^{js_1x} + a_1 e^{j(s_1+1)x} + a_{-1} e^{j(s_1-1)x} + a_2 e^{j(s_1+2)x} + a_{-2} e^{j(s_1-2)x}, \quad (54)$$

$$z_2 = e^{js_2x} + b_1 e^{j(s_2+1)x} + b_{-1} e^{j(s_2-1)x} + b_2 e^{j(s_2+2)x} + b_{-2} e^{j(s_2-2)x}. \quad (55)$$

为了求得小信号检测的响应, 需要导出存在小辐射场时和没有辐射场时的直流 I - V 特性曲线^[10]。在无量纲参数的情况下, 即是推求平均电压 $\bar{v} = \left\langle \frac{d\varphi}{d\tau} \right\rangle$ 和平均电流 \bar{i} 的特性曲线。当外加电流源为 $i_0 + i_1 \cos \Omega\tau$ 的情况下, 按时间平均的电流值为

$$\bar{i} = \langle i_0 + i_1 \cos \Omega\tau \rangle = i_0. \quad (56)$$

平均电压 \bar{v} 可根据(6)式推得

$$\bar{v} = \left\langle \frac{d\varphi}{d\tau} \right\rangle = i_0 - \langle \sin \varphi \rangle, \quad (57)$$

其中任意量 y 的时间平均值为

$$\langle y \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} y d\tau. \quad (58)$$

在附录中算得

$$\langle \sin \varphi \rangle = 2Qs_2 = i_0 - v_0 - \frac{i_1^2}{4v_0(Q^2 - i_0^2 + 1)}. \quad (59)$$

把它代入(57)式, 得

$$\bar{v} = v_0 + \frac{i_1^2}{4v_0(Q^2 - i_0^2 + 1)}. \quad (60)$$

如果没有辐射场, 平均电流仍然是 i_0 , 平均电压为

$$\bar{v}_0 = v_0 = \sqrt{i_0^2 - 1}. \quad (61)$$

从而当 $i_0 > 1$ 时, 有辐射场照射下和不存在辐射场时的平均电压变化量为

$$\Delta \bar{v} = \bar{v} - \bar{v}_0 = \frac{i_1^2}{4\nu_0(Q^2 - i_0^2 + 1)}. \quad (62)$$

上述结果说明,小信号检测是平方律的.这个结果正是所引文献[6]和[7]给出的,这里需要着重指出的是上述结果在 Q 趋近于 $\sqrt{i_0^2 - 1}$ 时将失效,并不出现响应随 Q 趋近于 $\sqrt{i_0^2 - 1}$ 而趋向于无限大的现象.

最后讨论零平均电压时的阶跃问题.如果 $i_0 < 1$,与上面的计算完全类似,可以求得 s_1, s_2 以及诸 a_n 和 b_n .在准确到 i_1^2 幂,结果仍然与(44)–(53)式相同,不过此时的 ν_0 是虚数,即

$$\nu_0 = \sqrt{i_0^2 - 1} = j\sqrt{1 - i_0^2}. \quad (63)$$

于是求得的 s_1 和 s_2 分别为

$$s_1 = \frac{1}{2Q} \left[i_0 + j\sqrt{1 - i_0^2} - \frac{j i_1^2}{\sqrt{1 - i_0^2}(Q^2 - i_0^2 + 1)} \right], \quad (64)$$

$$s_2 = \frac{1}{2Q} \left[i_0 - j\sqrt{1 - i_0^2} + \frac{j i_1^2}{\sqrt{1 - i_0^2}(Q^2 - i_0^2 + 1)} \right]. \quad (65)$$

只要 $i_1 \ll 1$,而 i_0 又不在1的邻近, s_1 的虚部将是正值, s_2 的虚部将是负值.考虑到 $\tau \rightarrow \infty$ 时,即 $x \rightarrow \infty$ 时

$$e^{i s_1 x} \propto e^{-\sqrt{1 - i_0^2} x / 2Q} \rightarrow 0, \quad (66)$$

$$e^{i s_2 x} \propto e^{+\sqrt{1 - i_0^2} x / 2Q} \rightarrow \infty. \quad (67)$$

于是在 $x \rightarrow \infty$ 时,

$$e^{i\varphi} = y = 2Qj \frac{s_2 + (s_2 + 1)b_1 e^{i x} + (s_2 - 1)b_{-1} e^{-i x} + (s_2 + 2)e^{i 2x} + (s_2 - 2)e^{-i 2x}}{1 + b_1 e^{i x} + b_{-1} e^{-i x} + b_2 e^{i 2x} + b_{-2} e^{-i 2x}}. \quad (68)$$

根据类似于附录中求 y 平均值的方法,可得

$$\langle y \rangle = \langle \cos \varphi \rangle + j \langle \sin \varphi \rangle = 2Qj s_2. \quad (69)$$

从而求得

$$\langle \sin \varphi \rangle = i_0, \quad (70)$$

亦即

$$\bar{v} = i_0 - \langle \sin \varphi \rangle = 0. \quad (71)$$

这就是零平均电压下出现阶跃的情形.这里要补充指出,当人们在计算 s_1, s_2 以及诸 a_n 和 b_n 时准确到任意 i_1 的幂,上述结果都是正确的.

四、结 论

超导弱连接在一直流电流和一交变电流作用下,如采用电流源驱动电阻分路约瑟夫森结模型,关于量子位相差 φ 的微分方程是高度非线性的.我们获得的解具有如(40)式的形式,其中的系数 a_n 和 b_n 为连续分式表示式, s_1 和 s_2 须与 a_1, a_2 和 b_1, b_{-1} 联立求解,求解时可求助于自洽方法.我们已经把解微分方程问题化为代数运算的问题,虽然这个

代数运算问题仍然是十分繁复的. 在 $i_1 \ll 1$ 的情形下, 如果用微扰法求解(6)式时必然会出现 $i_1\tau$ 的各次幂的项, 由于 $i_1\tau$ 可以很大, 所以还存在一个使 $i_1\tau$ 的各次幂前的系数恒为零的任务^[6]. 由于我们已经是在具有指数函数和的分式这种确定形式下, 用代数方法处理其系数 a_n 和参数 s , 因此上述问题是不存在的. 在 $i_1 \ll 1$ 的情形下, 作为本文方法的一个简单应用, 讨论了平方律检测和零平均电压处电流阶跃的情形.

附 录

在忽略高于 i_1^2 幂项的近似下, (10)式的解 $e^{j\varphi}$ 根据(40)式变为

$$y = e^{j\varphi} = 2Qj \frac{C \sum_{n=-2}^2 (s_1 + n)a_n e^{j(s_1+n)x} + \sum_{n=-2}^2 (s_2 + n)b_n e^{j(s_2+n)x}}{C \sum_{n=-2}^2 a_n e^{j(s_1+n)x} + \sum_{n=-2}^2 b_n e^{j(s_2+n)x}}, \quad (\text{A.1})$$

其中 s_1, s_2 , 诸 a_n 和诸 b_n 由(44)–(53)式给出. 利用初始条件

$$y|_{\tau=0} = e^{j\varphi_0}, \quad \text{当 } x = Q\tau = 0, \quad (\text{A.2})$$

通过简单运算, 求得

$$C = \frac{e^{j\varphi_0} \sum_{n=-2}^2 b_n - 2Qj \sum_{n=-2}^2 (s_2 + n)b_n}{2Qj \sum_{n=-2}^2 (s_1 + n)a_n - e^{j\varphi_0} \sum_{n=-2}^2 a_n}. \quad (\text{A.3})$$

考虑到 $a_0 = b_0 = 1$, 其余的 a_1, b_1 等都是与 i_1 的各次幂有关的小项, 因此, 在 (A.3) 式右边分母中决定其大小的主要项乃是不包含 i_1 幂的项, 即

$$2Qjs_1a_0 - e^{j\varphi_0}a_0 \cong -\cos\varphi_0 + j(i_0 + \sqrt{i_0^2 - 1} - \sin\varphi_0). \quad (\text{A.4})$$

上式是利用(46)式把 s_1 用不含 i_1 幂的项代入后所得的结果. 同理在 (A.3) 式右边分子中决定其大小的主要项为

$$e^{j\varphi_0}b_0 - 2Qjs_2b_0 \cong \cos\varphi_0 - j(i_0 - \sqrt{i_0^2 - 1} - \sin\varphi_0). \quad (\text{A.5})$$

在 $i_0 > 1$ 的情形下, (A.4) 式的模大于 (A.5) 式的模, 所以常数 C 的模小于 1, 即

$$|C| < 1. \quad (\text{A.6})$$

现在来求 $e^{j\varphi}$ 对时间的平均值, 在 (A.1) 式右边的分子和分母上分别乘以 e^{-js_2x} , 可得

$$\begin{aligned} e^{j\varphi} &= 2Qj \frac{C \sum_{n=-2}^2 a_n (s_1 + n) e^{j(s_1-s_2+n)x} + \sum_{n=-2}^2 (s_2 + n) b_n e^{jn x}}{C \sum_{n=-2}^2 a_n e^{j(s_1-s_2+n)x} + \sum_{n=-2}^2 b_n e^{jn x}} \\ &= 2Qj \frac{s_2 + Cs_1 e^{j(s_1-s_2)x} + \sum_{n=-2}^2 (Ca_n (s_1 + n) e^{j(s_1-s_2+n)x} + b_n (s_2 + n) e^{jn x})}{1 + C e^{j(s_1-s_2)x} + \sum_{n=-2}^2 (Ca_n e^{j(s_1-s_2+n)x} + b_n e^{jn x})}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

(A.7) 式中 \sum' 表示求和中不包含 $n = 0$ 的项, 由于 \sum' 中包含的都是比例于 i_1 各次幂的小项, 所以可以把 (A.7) 式右边的分母作泰勒展开, 于是有

$$\begin{aligned} e^{j\varphi} &= 2Qj \left[s_2 + Cs_1 e^{j(s_1-s_2)x} + \sum_{n=-2}^2 (Ca_n (s_1 + n) e^{j(s_1-s_2+n)x} + b_n (s_2 + n) e^{jn x}) \right] \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{1 + C e^{j(s_1-s_2)x}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \left[\sum_{n=-2}^2 (Ca_n e^{j(s_1-s_2+n)x} + b_n e^{jn x}) \right]^m}{[1 + C e^{j(s_1-s_2)x}]^{m+1}} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

在 (A.8) 式中, 由于 $|C| < 1$, 所以在 $\left\{ \right\}$ 中每项的分母均可展开为 $e^{j(s_1-s_2)x}$ 的正幂级数, 例如

$$\frac{1}{1 + C e^{j(s_1-s_2)x}} = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l C^l e^{j(s_1-s_2)lx} \quad (\text{A.9})$$

等等在 $s_1 - s_2$ 不为整数的情况下, 下面函数的时间平均值为零:

$$\langle e^{i(s_1-s_2)lx+imx} \rangle = 0, \quad \text{当 } l \geq 1, m \text{ 为任意整数.} \quad (\text{A.10})$$

此外

$$\langle e^{imx} \rangle = 0, \quad \text{当 } m \neq 0. \quad (\text{A.11})$$

考虑到 (A.9) (A.10) 两式, (A.8) 式的时间平均值为

$$\langle e^{i\varphi} \rangle = j2Qs_2 + j2Qs_2 \cdot 2b_1b_{-1} - j2Q(s_2 + 1)b_1b_{-1} - j2Q(s_2 - 1)b_1b_{-1} + o(i_1^2)$$

或者

$$\langle e^{i\varphi} \rangle = j2Qs_2 + o(i_1^2). \quad (\text{A.12})$$

不难验证, 在准确到任意 i_1 幂的近似下, $\langle e^{i\varphi} \rangle = j2Qs_2$ 都是成立的. 利用 (49) 式把 s_2 的值代入 (A.12) 式, 可得

$$\langle e^{i\varphi} \rangle = j2Qs_2 = j \left[i_0 - \sqrt{i_0^2 - 1} - \frac{i_1^2}{4\sqrt{i_0^2 - 1}(Q^2 - i_0^2 + 1)} \right] + o(i_1^2), \quad (\text{A.13})$$

或者

$$\langle \sin\varphi \rangle = i_0 - \sqrt{i_0^2 - 1} - \frac{i_1^2}{4\sqrt{i_0^2 - 1}(Q^2 - i_0^2 + 1)} + o(i_1^2). \quad (\text{A.14})$$

参 考 文 献

- [1] W. C. Stewart, *Appl. Phys. Lett.*, **12** (1968), 277; D. E. McCumber, *J. Appl. Phys.*, **39** (1968), 2503.
- [2] L. G. Aslamazov and A. I. Larkin, *JETP Lett.*, **9** (1969), 87.
- [3] A. J. Dinardo, AD 866969, (1969).
- [4] P. Russer, *Act. Phys. Austr.*, **52** (1970), 373; P. Russer, *J. Appl. Phys.*, **43** (1972), 2008; C. A. Hamilton, *J. Appl. Phys.*, **44** (1973), 2371.
- [5] D. D. Sullivan and J. E. Zimmerman, *Amer. J. Phys.*, **39** (1971), 1504.
- [6] A. N. Vystaukin *et al.*, *Bevue. Phys. Appl.*, **9** (1974), 79.
- [7] H. Kanter and F. L. Vernon Jr, *J. Appl. Phys.*, **43** (1972), 3174.
- [8] M. J. Renne and D. Polder, *Revue. Phys. Appl.*, **9** (1974), 25.
- [9] P. M. Morse and Feshbach, *Methods of Theoretical Physics* p. 556 (1953).
- [10] P. L. Richards *et al.*, *Proc. IEEE*, **61** (1973), 36.

ANALYTICAL SOLUTION OF RESISTIVELY SHUNTED JOSEPHSON JUNCTIONS

YAO XI-XIAN

(Department of Physics, Nanjing University)

ABSTRACT

In the presence of external sources, a superconducting weak link can be represented by a simplified model, consisting of a resistively shunted Josephson junction driven by a current source. We give in this paper, an analytical solution of the problem, in the case that the source current has both d. c. and a. c. components. As preliminary applications of our solution, we have also discussed square law detection and current steps of zero average voltage on the I-V characteristic, as the dimensionless a. c. component is small.