从奇点范畴到Leavitt路代数

陈小伍，中国科学技术大学

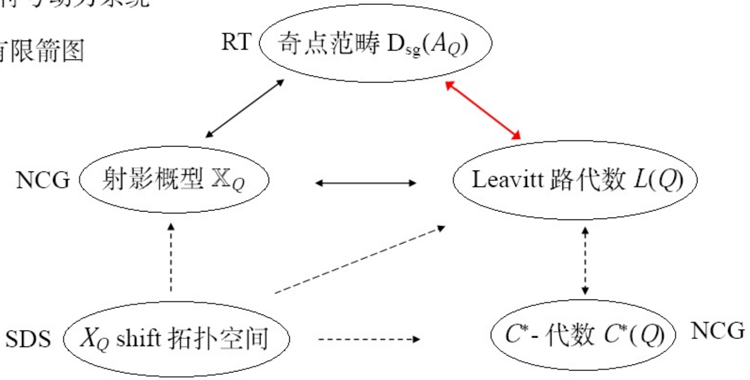
第十三届全国代数学学术会议，长春
2013年8月4-10日

RT = 代数表示论

NCG = 非交换几何

SDS = 符号动力系统

Q: 有限箭图



目录

记号

- A：域k上有限维含幺结合代数

记号

- A：域k上有限维含幺结合代数
- A-mod：有限维左A-模范畴，

记号

- A：域k上有限维含幺结合代数
- A-mod：有限维左A-模范畴，Abel范畴

记号

- A：域k上有限维含幺结合代数
- A-mod：有限维左A-模范畴，Abel范畴
- A-proj：投射A-模范畴

同调性质

- 模M的投射分解: $\cdots \to P^{-2} \to P^{-1} \to P^{0} \to M \to 0$

同调性质

- 模M的投射分解: $\cdots \to P^{-2} \to P^{-1} \to P^0 \to M \to 0$
- 投射维数$\mathrm{proj.dim}\, M$：分解的最短长度，可为无穷大

同调性质

- 模M的投射分解: $\cdots \to P^{-2} \to P^{-1} \to P^0 \to M \to 0$
- 投射维数$\mathrm{proj.dim}\ M$：分解的最短长度，可为无穷大
- A的整体维数：$\mathrm{gl.dim}\ A = \sup\{\mathrm{proj.dim}\ M \mid M \in A\text{-mod}\}$

同调性质（续）

同调性质（续）

Theorem (Serre, 1955)

仿射簇 $V \subseteq \mathbb{C}^n$ 光滑的 $\Longleftrightarrow$

同调性质（续）

Theorem (Serre, 1955)

仿射簇$V \subseteq \mathbb{C}^n$ 光滑的$\Longleftrightarrow$ 其正则函数环$\mathcal{O}(V)$满足$\mathrm{gl.dim}\, \mathcal{O}(V) < \infty$.

同调性质（续）

Theorem (Serre, 1955)

仿射簇$V \subseteq \mathbb{C}^n$ 光滑的$\Longleftrightarrow$ 其正则函数环$\mathcal{O}(V)$满足$\mathrm{gl.dim}\ \mathcal{O}(V) < \infty$. 此时, $\dim V = \mathrm{gl.dim}\ \mathcal{O}(V)$.

同调性质（续）

Theorem (Serre, 1955)

仿射簇$V \subseteq \mathbb{C}^n$ 光滑的$\Longleftrightarrow$ 其正则函数环$\mathcal{O}(V)$满足$\mathrm{gl.dim}\ \mathcal{O}(V) < \infty$. 此时, $\dim V = \mathrm{gl.dim}\ \mathcal{O}(V)$.

- 具有无限整体维数的代数A有某种“同调不光滑性”!

同调性质（续）

Theorem (Serre, 1955)

仿射簇$V \subseteq \mathbb{C}^n$ 光滑的$\Longleftrightarrow$ 其正则函数环$\mathcal{O}(V)$满足$\mathrm{gl.dim}\ \mathcal{O}(V) < \infty$. 此时, $\dim V = \mathrm{gl.dim}\ \mathcal{O}(V)$.

- 具有无限整体维数的代数A有某种"同调不光滑性"！
- 如何描述这种不光滑性？

同调性质（续）

Theorem (Serre, 1955)

仿射簇$V \subseteq \mathbb{C}^n$ 光滑的$\Longleftrightarrow$ 其正则函数环$\mathcal{O}(V)$满足$\mathrm{gl.dim}\ \mathcal{O}(V) < \infty$. 此时, $\dim\ V = \mathrm{gl.dim}\ \mathcal{O}(V)$.

- 具有无限整体维数的代数A有某种"同调不光滑性"!
- 如何描述这种不光滑性? **奇点范畴**!

导出范畴

- A-模复形$\cdots \to X^{n-1} \overset{d^{n-1}}{\to} X^n \overset{d^n}{\to} X^{n+1} \to \cdots$ 满足$d^n \circ d^{n-1} = 0$;

导出范畴

- A-模复形$\cdots \to X^{n-1} \stackrel{d^{n-1}}{\to} X^n \stackrel{d^n}{\to} X^{n+1} \to \cdots$ 满足$d^n \circ d^{n-1} = 0$; 有界：$X^n = 0$若$|n| >> 0$;

导出范畴

- A-模复形$\cdots \to X^{n-1} \overset{d^{n-1}}{\to} X^n \overset{d^n}{\to} X^{n+1} \to \cdots$ 满足$d^n \circ d^{n-1} = 0$; 有界：$X^n = 0$若$|n| >> 0$；上同调群$H^n(X) = \mathrm{Ker}\ d^n / \mathrm{Im}\ d^{n-1}$；

导出范畴

- A-模复形$\cdots \to X^{n-1} \stackrel{d^{n-1}}{\to} X^n \stackrel{d^n}{\to} X^{n+1} \to \cdots$ 满足$d^n \circ d^{n-1} = 0$; 有界：$X^n = 0$若$|n| >> 0$；上同调群$H^n(X) = \mathrm{Ker}\ d^n/\mathrm{Im}\ d^{n-1}$；
- 复形的平移: $(X[1])^n = X^{n+1}$, $d_{X[1]} = -d_X$；

导出范畴

- A-模复形$\cdots \to X^{n-1} \stackrel{d^{n-1}}{\to} X^n \stackrel{d^n}{\to} X^{n+1} \to \cdots$ 满足$d^n \circ d^{n-1} = 0$; 有界：$X^n = 0$若$|n| >> 0$；上同调群$H^n(X) = \mathrm{Ker}\ d^n / \mathrm{Im}\ d^{n-1}$；
- 复形的平移: $(X[1])^n = X^{n+1}$, $d_{X[1]} = -d_X$；
- 链映射$f : X \to Y$：$f^n : X^n \to Y^n$使得图交换；

导出范畴

- A-模复形$\cdots \to X^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \to \cdots$ 满足$d^n \circ d^{n-1} = 0$; 有界：$X^n = 0$若$|n| >> 0$；上同调群$H^n(X) = \mathrm{Ker}\ d^n / \mathrm{Im}\ d^{n-1}$；
- 复形的平移: $(X[1])^n = X^{n+1}$, $d_{X[1]} = -d_X$；
- 链映射$f: X \to Y$：$f^n: X^n \to Y^n$使得图交换；
- 链映射f称为拟同构：若f诱导同调群之间的同构。

导出范畴（续）

- 有界导出范畴$\mathbf{D}^b(A\text{-mod})$:

导出范畴（续）

- 有界导出范畴$\mathbf{D}^b(A\text{-mod})$：对象为有界$A$-模复形；

导出范畴（续）

- 有界导出范畴$\mathbf{D}^b(A\text{-mod})$：对象为有界$A$-模复形；态射为链映射，但，

导出范畴（续）

- 有界导出范畴$\mathbf{D}^b(A\text{-mod})$：对象为有界$A$-模复形；态射为链映射，但，需“添加”拟同构的形式逆！

导出范畴（续）

- 有界导出范畴$\mathbf{D}^b(A\text{-mod})$: 对象为有界$A$-模复形；态射为链映射，但，需“添加”拟同构的形式逆！
- $\mathbf{D}^b(A\text{-mod})$一般不是Abel范畴，

导出范畴（续）

- 有界导出范畴$\mathbf{D}^b(A\text{-mod})$: 对象为有界$A$-模复形；态射为链映射，但，需“添加”拟同构的形式逆！
- $\mathbf{D}^b(A\text{-mod})$一般不是Abel范畴，是Verdier意义下的三角范畴！

导出范畴（续）

- 有界导出范畴$\mathbf{D}^b(A\text{-mod})$: 对象为有界$A$-模复形；态射为链映射，但，需“添加”拟同构的形式逆!
- $\mathbf{D}^b(A\text{-mod})$一般不是Abel范畴，是Verdier意义下的三角范畴!
- 具体来说，复形的短正合列$0 \to X \to Y \to Z \to 0$对应于$\mathbf{D}^b(A\text{-mod})$中的正合三角

$$
\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dr] & \\
X \arrow[ur] & & Z \arrow[ll, rightsquigarrow]
\end{tikzcd}
$$

导出范畴（续）

- 有界导出范畴$\mathbf{D}^b(A\text{-mod})$: 对象为有界$A$-模复形；态射为链映射，但，需“添加”拟同构的形式逆！
- $\mathbf{D}^b(A\text{-mod})$一般不是Abel范畴，是Verdier意义下的三角范畴！
- 具体来说，复形的短正合列$0 \to X \to Y \to Z \to 0$对应于$\mathbf{D}^b(A\text{-mod})$中的正合三角

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr] & \\ X \arrow[ur] & & Z \arrow[ll, rightsquigarrow] \end{tikzcd}$$

即，三角$X \to Y \to Z \to X[1]$。

导出范畴–同调性质

- A-mod $\subseteq \mathbf{D}^b(A\text{-mod})$：模视为集中在零处的复形

导出范畴–同调性质

- A-mod $\subseteq \mathbf{D}^b(A\text{-mod})$：模视为集中在零处的复形
- 导出范畴中的Hom $=$ 模范畴中的Ext!

导出范畴–同调性质

- A-mod $\subseteq \mathbf{D}^b(A\text{-mod})$：模视为集中在零处的复形
- 导出范畴中的Hom $=$ 模范畴中的Ext！具体来说，

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^b(A\text{-mod})}(M, N[n]) = \mathrm{Ext}_A^n(M, N),$$

其中M, N为A-模，$n \geq 0$。

导出范畴–同调性质

- A-mod $\subseteq \mathbf{D}^b(A\text{-mod})$：模视为集中在零处的复形
- 导出范畴中的Hom $=$ 模范畴中的Ext！具体来说，

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^b(A\text{-mod})}(M, N[n]) = \mathrm{Ext}_A^n(M, N),$$

  其中M, N为A-模，$n \geq 0$。
- 故，$\mathrm{proj.dim}\ M \leq n \Longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^b(A\text{-mod})}(M, N[n+1]) = 0$，任意$A$-模$N$；

导出范畴–同调性质

- A-mod $\subseteq \mathbf{D}^b(A\text{-mod})$：模视为集中在零处的复形
- 导出范畴中的Hom $=$ 模范畴中的Ext！具体来说，

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^b(A\text{-mod})}(M, N[n]) = \mathrm{Ext}_A^n(M, N),$$

其中M, N为A-模，$n \geq 0$。

- 故，$\mathrm{proj.dim}\, M \leq n \Longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^b(A\text{-mod})}(M, N[n+1]) = 0$，任意$A$-模$N$；
- 类似可知：$\mathrm{gl.dim}\, A < \infty \Longleftrightarrow$

导出范畴–同调性质

- A-mod $\subseteq \mathbf{D}^b(A\text{-mod})$：模视为集中在零处的复形
- 导出范畴中的Hom ＝ 模范畴中的Ext！具体来说，

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^b(A\text{-mod})}(M, N[n]) = \mathrm{Ext}_A^n(M, N),$$

  其中M, N为A-模，$n \geq 0$。
- 故，$\mathrm{proj.dim}\ M \leq n \iff \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^b(A\text{-mod})}(M, N[n+1]) = 0$，任意$A$-模$N$；
- 类似可知：$\mathrm{gl.dim}\ A < \infty \iff$ 任何有界复形X在$\mathbf{D}^b(A\text{-mod})$中同构于有界的投射模复形

奇点范畴

- $\mathrm{perf}(A) = \{X \in \mathbf{D}^b(A\text{-mod}) \mid X\text{同构于有界投射模复形}\}$

奇点范畴

- $\mathrm{perf}(A) = \{X \in \mathbf{D}^b(A\text{-mod}) \mid X$同构于有界投射模复形$\}$
- $\mathrm{perf}(A) \subseteq \mathbf{D}^b(A\text{-mod})$为三角子范畴；

奇点范畴

- $\mathrm{perf}(A) = \{X \in \mathbf{D}^b(A\text{-mod}) \mid X$同构于有界投射模复形$\}$
- $\mathrm{perf}(A) \subseteq \mathbf{D}^b(A\text{-mod})$为三角子范畴;
- 上述两范畴相等当且仅当$\mathrm{gl.dim}\, A < \infty$.

奇点范畴

- $\mathrm{perf}(A) = \{X \in \mathbf{D}^b(A\text{-mod})\ |X$同构于有界投射模复形$\}$
- $\mathrm{perf}(A) \subseteq \mathbf{D}^b(A\text{-mod})$为三角子范畴；
- 上述两范畴相等当且仅当$\mathrm{gl.dim}\ A < \infty$.

Definition (Buchweitz 1987/Orlov 2004)

代数A的奇点范畴定义为

$$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A) = \mathbf{D}^b(A\text{-mod})/\mathrm{perf}(A).$$

奇点范畴（续）

- 奇点范畴$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)$:

奇点范畴（续）

- 奇点范畴$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)$：对象仍为有界$A$-模复形，

奇点范畴（续）

- 奇点范畴$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)$：对象仍为有界$A$-模复形，需“添加”（更多）态射的形式逆！

奇点范畴（续）

- 奇点范畴$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)$：对象仍为有界$A$-模复形，需“添加”（更多）态射的形式逆!
- 奇点范畴$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)$ 是三角范畴!

奇点范畴（续）

- 奇点范畴$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)$：对象仍为有界$A$-模复形，需"添加"（更多）态射的形式逆！
- 奇点范畴$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)$ 是三角范畴！
- $\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)$ 是平凡的$\Longleftrightarrow$

奇点范畴（续）

- 奇点范畴$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)$：对象仍为有界$A$-模复形，需“添加”（更多）态射的形式逆！
- 奇点范畴$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)$ 是三角范畴！
- $\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)$ 是平凡的$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{gl.dim}\, A < \infty$.

奇点范畴（续）

- 奇点范畴$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)$：对象仍为有界$A$-模复形，需"添加"（更多）态射的形式逆!
- 奇点范畴$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)$ 是三角范畴!
- $\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)$ 是平凡的$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{gl.dim}\ A < \infty$.
  更一般地，复形X在$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)$中同构于零$\Longleftrightarrow$

奇点范畴（续）

- 奇点范畴$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)$：对象仍为有界$A$-模复形，需"添加"（更多）态射的形式逆！
- 奇点范畴$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)$ 是三角范畴！
- $\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)$ 是平凡的$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{gl.dim}\ A < \infty$.
  更一般地，复形X在$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)$中同构于零$\Longleftrightarrow$
  在$\mathbf{D}^b(A\text{-mod})$中，$X$ 同构于有界的投射模复形.

奇点范畴（续）

- 奇点范畴$\mathbf{D}_{\rm sg}(A)$：对象仍为有界A-模复形，需“添加”（更多）态射的形式逆！
- 奇点范畴$\mathbf{D}_{\rm sg}(A)$ 是三角范畴！
- $\mathbf{D}_{\rm sg}(A)$ 是平凡的$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{gl.dim}\ A < \infty$.
  更一般地，复形X在$\mathbf{D}_{\rm sg}(A)$中同构于零$\Longleftrightarrow$
  在$\mathbf{D}^b(A\text{-mod})$中，$X$ 同构于有界的投射模复形.
- 故，奇点范畴$\mathbf{D}_{\rm sg}(A)$反映了A的“同调奇异性”！

奇点范畴与Gorenstein投射模

对于A-模M，$M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$成为右$A$-模，等价地，$A^{\mathrm{op}}$-模

对于A-模M，$M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$成为右$A$-模，等价地，$A^{\mathrm{op}}$-模

Definition (Auslander-Bridger 1969/Enochs-Jenda 1995/...)

A-模M称为是*Gorenstein*投射模，若M是自反模($M \simeq M^{**}$)，$\mathrm{Ext}^i_A(M, A) = 0 = \mathrm{Ext}^i_{A^{\mathrm{op}}}(M^*, A)$，任意$i \geq 1$。

对于A-模M，$M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$成为右$A$-模，等价地，$A^{\mathrm{op}}$-模

Definition (Auslander-Bridger 1969/Enochs-Jenda 1995/...)

A-模M称为是*Gorenstein*投射模，若M是自反模($M \simeq M^{**}$)，$\mathrm{Ext}^i_A(M, A) = 0 = \mathrm{Ext}^i_{A^{\mathrm{op}}}(M^*, A)$，任意$i \geq 1$。

- 投射模是Gorenstein投射模，即，A-proj $\subseteq$ A-Gproj

奇点范畴与Gorenstein投射模

对于A-模M，$M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$成为右$A$-模，等价地，$A^{\mathrm{op}}$-模

Definition (Auslander-Bridger 1969/Enochs-Jenda 1995/...)

A-模M称为是*Gorenstein*投射模，若M是自反模($M \simeq M^{**}$)，$\mathrm{Ext}^i_A(M, A) = 0 = \mathrm{Ext}^i_{A^{\mathrm{op}}}(M^*, A)$，任意$i \geq 1$。

- 投射模是Gorenstein投射模，即，A-proj $\subseteq$ A-Gproj
- A-Gproj $\subseteq$ A-mod：扩张封闭，

对于A-模M，$M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$成为右$A$-模，等价地，$A^{\mathrm{op}}$-模

Definition (Auslander-Bridger 1969/Enochs-Jenda 1995/...)

A-模M称为是*Gorenstein*投射模，若M是自反模($M \simeq M^{**}$)，$\mathrm{Ext}^i_A(M, A) = 0 = \mathrm{Ext}^i_{A^{\mathrm{op}}}(M^*, A)$，任意$i \geq 1$。

- 投射模是Gorenstein投射模，即，A-proj $\subseteq$ A-Gproj
- A-Gproj $\subseteq$ A-mod：扩张封闭，故，成为Quillen意义下的正合范畴

- A-Gproj是Frobenius范畴，其（相对）投射-内射对象恰为投射A-模

奇点范畴与Gorenstein投射模（续）

- A-Gproj是Frobenius范畴，其（相对）投射-内射对象恰为投射A-模
- 稳定范畴A-$\underline{\text{Gproj}}$：将经由投射模分解的态射变为零

奇点范畴与Gorenstein投射模（续）

- A-Gproj是Frobenius范畴，其（相对）投射-内射对象恰为投射A-模
- 稳定范畴A-$\underline{\text{Gproj}}$：将经由投射模分解的态射变为零
- 根据一般结论：

奇点范畴与Gorenstein投射模（续）

- A-Gproj是Frobenius范畴，其（相对）投射-内射对象恰为投射A-模
- 稳定范畴A-$\underline{\text{Gproj}}$：将经由投射模分解的态射变为零
- 根据一般结论：稳定范畴A-$\underline{\text{Gproj}}$成为三角范畴！

奇点范畴与Gorenstein投射模（续）

- A-Gproj是Frobenius范畴，其（相对）投射-内射对象恰为投射A-模
- 稳定范畴$A\text{-}\underline{\text{Gproj}}$：将经由投射模分解的态射变为零
- 根据一般结论：稳定范畴$A\text{-}\underline{\text{Gproj}}$成为三角范畴！

Theorem (Buchweitz 1987/Happel 1991/....)

存在三角范畴的满嵌入$A\text{-}\underline{\mathrm{Gproj}} \longrightarrow \mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)$，将模视为集中在零处的复形；

奇点范畴与Gorenstein投射模（续）

- A-Gproj是Frobenius范畴，其（相对）投射-内射对象恰为投射A-模
- 稳定范畴$A\text{-}\underline{\mathrm{Gproj}}$：将经由投射模分解的态射变为零
- 根据一般结论：稳定范畴$A\text{-}\underline{\mathrm{Gproj}}$成为三角范畴！

Theorem (Buchweitz 1987/Happel 1991/....)

存在三角范畴的满嵌入$A\text{-}\underline{\mathrm{Gproj}} \longrightarrow \mathbf{D}_{\rm sg}(A)$，将模视为集中在零处的复形；该嵌入是范畴等价当且仅当A是*Gorenstein*代数。

奇点范畴与Gorenstein投射模（续）

- A-Gproj是Frobenius范畴，其（相对）投射-内射对象恰为投射A-模
- 稳定范畴A-$\underline{\text{Gproj}}$: 将经由投射模分解的态射变为零
- 根据一般结论：稳定范畴A-$\underline{\text{Gproj}}$成为三角范畴!

Theorem (Buchweitz 1987/Happel 1991/....)

存在三角范畴的满嵌入$A\text{-}\underline{\mathrm{Gproj}} \longrightarrow \mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)$，将模视为集中在零处的复形；该嵌入是范畴等价当且仅当A是*Gorenstein*代数。

- 注：代数A称为*Gorenstein*代数，若其左右自内射维数均有限；例如：自入射代数。

根方零代数

- 箭图 $Q = (Q_0, Q_1; s, t\colon Q_1 \to Q_0)$:

根方零代数

- 箭图$Q=(Q_0,Q_1;s,t\colon Q_1\to Q_0)$：$Q_0$顶点集，$Q_1$箭头集，对箭头$\alpha$，$s(\alpha)$起点，$t(\alpha)$其终点，

根方零代数

- 箭图$Q=(Q_0,Q_1;s,t\colon Q_1\to Q_0)$：$Q_0$顶点集，$Q_1$箭头集，对箭头$\alpha$，$s(\alpha)$起点，$t(\alpha)$其终点，即$s(\alpha)\xrightarrow{\alpha}t(\alpha)$

根方零代数

- 箭图$Q=(Q_0,Q_1;s,t\colon Q_1\to Q_0)$：$Q_0$顶点集，$Q_1$箭头集，对箭头$\alpha$，$s(\alpha)$起点，$t(\alpha)$其终点，即$s(\alpha)\xrightarrow{\alpha}t(\alpha)$
- 代数$A_Q=kQ_0\oplus kQ_1$:基$\{e_i\mid i\in Q_0\}\cup\{\alpha\mid\alpha\in Q_1\}$，

根方零代数

- 箭图$Q=(Q_0, Q_1; s, t\colon Q_1\to Q_0)$：$Q_0$顶点集，$Q_1$箭头集，对箭头$\alpha$，$s(\alpha)$起点，$t(\alpha)$其终点，即$s(\alpha)\xrightarrow{\alpha} t(\alpha)$
- 代数$A_Q=kQ_0\oplus kQ_1$:基$\{e_i\mid i\in Q_0\}\cup\{\alpha\mid\alpha\in Q_1\}$，乘法$e_ie_j=\delta_{ij}e_i, \alpha=\alpha e_{s(\alpha)}=e_{t(\alpha)}\alpha, \alpha\beta=0$

根方零代数

- 箭图$Q=(Q_0,Q_1;s,t\colon Q_1\to Q_0)$：$Q_0$顶点集，$Q_1$箭头集，对箭头$\alpha$，$s(\alpha)$起点，$t(\alpha)$其终点，即$s(\alpha)\xrightarrow{\alpha}t(\alpha)$
- 代数$A_Q=kQ_0\oplus kQ_1$:基$\{e_i\mid i\in Q_0\}\cup\{\alpha\mid\alpha\in Q_1\}$，乘法$e_ie_j=\delta_{ij}e_i,\alpha=\alpha e_{s(\alpha)}=e_{t(\alpha)}\alpha,\alpha\beta=0$
- 幺元$1_{A_Q}=\sum_{i\in Q_0}e_i$;

根方零代数

- 箭图$Q=(Q_0,Q_1;s,t\colon Q_1\to Q_0)$：$Q_0$顶点集，$Q_1$箭头集，对箭头$\alpha$，$s(\alpha)$起点，$t(\alpha)$其终点，即$s(\alpha)\xrightarrow{\alpha}t(\alpha)$
- 代数$A_Q=kQ_0\oplus kQ_1$:基$\{e_i\mid i\in Q_0\}\cup\{\alpha\mid\alpha\in Q_1\}$，乘法$e_ie_j=\delta_{ij}e_i,\alpha=\alpha e_{s(\alpha)}=e_{t(\alpha)}\alpha,\alpha\beta=0$
- 幺元$1_{A_Q}=\sum_{i\in Q_0}e_i$; Jacobson根$J(A_Q)=kQ_1$，满足$J(A_Q)^2=0$

例子

Example

考虑带两片花瓣的“玫瑰”箭图R^2

$$\begin{tikzcd} \bullet_1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

例子

Example

考虑带两片花瓣的“玫瑰”箭图R^2

$$\begin{tikzcd} \cdot_1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

则$(R^2)_0 = \{1\}$, $(R^2)_1 = \{\alpha, \beta\}$；代数$A_{R^2}$维数为3.

例子

Example

考虑带两片花瓣的“玫瑰”箭图R^2

$$\begin{tikzcd} \cdot 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

则$(R^2)_0=\{1\}$, $(R^2)_1=\{\alpha,\beta\}$；代数A_{R^2}维数为3.

Example

考虑长度为3的基本圈Z^3

$$\begin{tikzcd} & \cdot 2 \arrow[dr, "\alpha_2"] & \\ \cdot 1 \arrow[ur, "\alpha_1"] & & \cdot 3 \arrow[ll, "\alpha_3"] \end{tikzcd}$$

例子

Example

考虑带两片花瓣的“玫瑰”箭图R^2

$$\begin{tikzcd} \cdot 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

则$(R^2)_0=\{1\}$, $(R^2)_1=\{\alpha,\beta\}$；代数A_{R^2}维数为3.

Example

考虑长度为3的基本圈Z^3

$$\begin{tikzcd} & \cdot 2 \arrow[dr, "\alpha_2"] & \\ \cdot 1 \arrow[ur, "\alpha_1"] & & \cdot 3 \arrow[ll, "\alpha_3"] \end{tikzcd}$$

则$(Z^3)_0=\{1,2,3\}$, $(Z^3)_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$；代数$A_{Z^3}$维数为6.

根方零代数：自内射情形

设Q为连通的箭图。

根方零代数：自内射情形

设Q为连通的箭图。

- 代数A_Q是自内射的 $\iff$ Q为基本圈Z^n；

根方零代数：自内射情形

设Q为连通的箭图。

- 代数A_Q是自内射的 $\Longleftrightarrow$ Q为基本圈Z^n；
- 此时，任何模均为Gorenstein投射模，

根方零代数：自内射情形

设Q为连通的箭图。

- 代数A_Q是自内射的 $\iff$ Q为基本圈Z^n；
- 此时，任何模均为Gorenstein投射模，则由Buchweitz定理知：

$$A_{Z^n}\text{-}\underline{\mathrm{mod}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A_{Z^n})$$

根方零代数：自内射情形

设Q为连通的箭图。

- 代数A_Q是自内射的 $\iff$ Q为基本圈Z^n；
- 此时，任何模均为Gorenstein投射模，则由Buchweitz定理知：

$$A_{Z^n}\text{-}\underline{\mathrm{mod}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A_{Z^n})$$

- 稳定范畴A_{Z^n}-$\underline{\mathrm{mod}}$是半单的Abel范畴，等价于k^n-mod（k^n为n个k的乘积）；

根方零代数：自内射情形

设Q为连通的箭图。

- 代数A_Q是自内射的 $\Longleftrightarrow$ Q为基本圈Z^n；
- 此时，任何模均为Gorenstein投射模，则由Buchweitz定理知：

$$A_{Z^n}\text{-}\underline{\mathrm{mod}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A_{Z^n})$$

- 稳定范畴A_{Z^n}-$\underline{\mathrm{mod}}$是半单的Abel范畴，等价于k^n-mod（k^n为n个k的乘积）；平移函子对应于自同构$\sigma\colon k^n \to k^n$，$\sigma(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = (\lambda_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1})$

根方零代数：非自内射情形

如上，Q为连通的箭图。

根方零代数：非自内射情形

如上，Q为连通的箭图。

Theorem (陈2010/Ringel-熊保林2012)

设Q不为基本圈。则根方零代数A_Q的任何$Gorenstein$投射模均为投射模，即，

根方零代数：非自内射情形

如上，Q为连通的箭图。

Theorem (陈2010/Ringel-熊保林2012)

设Q不为基本圈。则根方零代数A_Q的任何*Gorenstein*投射模均为投射模，即，$A_Q\text{-proj} = A_Q\text{-Gproj}$。

根方零代数：非自内射情形

如上，Q为连通的箭图。

Theorem (陈2010/Ringel-熊保林2012)

设Q不为基本圈。则根方零代数A_Q的任何*Gorenstein*投射模均为投射模，即，$A_Q\text{-proj} = A_Q\text{-Gproj}$。

- 此时，稳定范畴$A_Q\text{-}\underline{\text{Gproj}}$是平凡的；

根方零代数：非自内射情形

如上，Q为连通的箭图。

Theorem (陈2010/Ringel-熊保林2012)

设Q不为基本圈。则根方零代数A_Q的任何*Gorenstein*投射模均为投射模，即，$A_Q\text{-proj} = A_Q\text{-Gproj}$。

- 此时，稳定范畴$A_Q\text{-}\underline{\text{Gproj}}$是平凡的；
- Buchweitz嵌入

$$0 = A_Q\text{-}\underline{\text{Gproj}} \longrightarrow \mathbf{D}_{\text{sg}}(A_Q)$$

不能提供任何信息！

根方零代数：非自内射情形

如上，Q为连通的箭图。

Theorem (陈2010/Ringel-熊保林2012)

设Q不为基本圈。则根方零代数A_Q的任何*Gorenstein*投射模均为投射模，即，$A_Q\text{-proj} = A_Q\text{-Gproj}$。

- 此时，稳定范畴$A_Q\text{-}\underline{\text{Gproj}}$是平凡的；
- Buchweitz嵌入

$$0 = A_Q\text{-}\underline{\text{Gproj}} \longrightarrow \mathbf{D}_{\text{sg}}(A_Q)$$

不能提供任何信息！**Leavitt 路代数**！

- 奇点范畴
- Leavitt路代数
- 奇点范畴与Leavitt路代数

路代数

设Q为箭图。对$n \geq 0$，记Q_n为图中长度为n的道路的全体。

路代数

设Q为箭图。对$n \geq 0$，记Q_n为图中长度为n的道路的全体。例如，长为2的路形如$\alpha_2\alpha_1$,其中$s(\alpha_2) = t(\alpha_1)$.

路代数

设Q为箭图。对$n \geq 0$，记Q_n为图中长度为n的道路的全体。例如，长为2的路形如$\alpha_2\alpha_1$,其中$s(\alpha_2) = t(\alpha_1)$.

- 箭图Q的路代数kQ定义如下：

路代数

设Q为箭图。对$n \geq 0$，记Q_n为图中长度为n的道路的全体。例如，长为2的路形如$\alpha_2\alpha_1$,其中$s(\alpha_2) = t(\alpha_1)$.

- 箭图Q的路代数kQ定义如下：线性空间$kQ = \oplus_{n \geq 0} kQ_n$;

路代数

设Q为箭图。对$n \geq 0$，记Q_n为图中长度为n的道路的全体。例如，长为2的路形如$\alpha_2\alpha_1$,其中$s(\alpha_2) = t(\alpha_1)$.

- 箭图Q的路代数kQ定义如下：线性空间$kQ = \oplus_{n\geq 0} kQ_n$; 乘法为道路的连接（若两道路不能连，则其乘法为零）

路代数

设Q为箭图。对$n \geq 0$，记Q_n为图中长度为n的道路的全体。例如，长为2的路形如$\alpha_2\alpha_1$,其中$s(\alpha_2) = t(\alpha_1)$.

- 箭图Q的路代数kQ定义如下：线性空间$kQ = \oplus_{n\geq 0} kQ_n$; 乘法为道路的连接（若两道路不能连，则其乘法为零）
- kQ为含幺的结合代数，幺元$1_{kQ} = \sum_{i\in Q_0} e_i$；路代数为分次代数!

路代数

设Q为箭图。对$n \geq 0$，记Q_n为图中长度为n的道路的全体。例如，长为2的路形如$\alpha_2\alpha_1$,其中$s(\alpha_2) = t(\alpha_1)$.

- 箭图Q的路代数kQ定义如下：线性空间$kQ = \oplus_{n\geq 0} kQ_n$; 乘法为道路的连接（若两道路不能连，则其乘法为零）
- kQ为含幺的结合代数，幺元$1_{kQ} = \sum_{i \in Q_0} e_i$；路代数为分次代数!
- 注意到：$A_Q = kQ/kQ_{\geq 2}$

路代数

设Q为箭图。对$n \geq 0$，记Q_n为图中长度为n的道路的全体。例如，长为2的路形如$\alpha_2\alpha_1$,其中$s(\alpha_2) = t(\alpha_1)$.

- 箭图Q的路代数kQ定义如下：线性空间$kQ = \oplus_{n\geq 0} kQ_n$; 乘法为道路的连接（若两道路不能连，则其乘法为零）
- kQ为含幺的结合代数，幺元$1_{kQ} = \sum_{i\in Q_0} e_i$；路代数为分次代数!
- 注意到：$A_Q = kQ/kQ_{\geq 2}$
- 双重箭图$\bar{Q}$: 对于Q中任一箭图α，添加方向相反的箭头α^*

例子

Example

考虑带两片花瓣的“玫瑰”箭图R^2

$$\begin{tikzcd} \cdot_1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

例子

Example

考虑带两片花瓣的“玫瑰”箭图R^2

$$\begin{tikzcd} \cdot_1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

路代数$kR^2 = k\langle \alpha, \beta \rangle$为自由代数。

例子

Example

考虑带两片花瓣的“玫瑰”箭图R^2

$$\begin{tikzcd} \cdot_1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

路代数$kR^2 = k\langle \alpha, \beta \rangle$为自由代数。
相应的双重箭图$\bar{R}^2$如下：

$$\begin{tikzcd} \cdot_1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"] \arrow[loop left, dotted, "\alpha^*"'] \arrow[loop right, dotted, "\beta^*"'] \end{tikzcd}$$

箭图Q中顶点i称为sink，若不存在从i出发的箭头。

Leavitt 路代数:定义

箭图Q中顶点i称为sink，若不存在从i出发的箭头。

Definition (Abrams-Aranda Pino 2005/Ara-Moreno-Pardo 2007)

箭图Q的*Leavitt 路代数* $L(Q)$定义为路代数$k\bar{Q}$关于由下面元素生成的双边理想的商代数

箭图Q中顶点i称为sink，若不存在从i出发的箭头。

Definition (Abrams-Aranda Pino 2005/Ara-Moreno-Pardo 2007)

箭图Q的*Leavitt 路代数* $L(Q)$定义为路代数$k\bar{Q}$关于由下面元素生成的双边理想的商代数

- (CK1) $\alpha\beta^* - \delta_{\alpha,\beta} e_{t(\alpha)}$, 任意箭头$\alpha, \beta \in Q_1$;

Leavitt 路代数:定义

箭图Q中顶点i称为sink，若不存在从i出发的箭头。

Definition (Abrams-Aranda Pino 2005/Ara-Moreno-Pardo 2007)

箭图Q的*Leavitt 路代数* $L(Q)$定义为路代数$k\bar{Q}$关于由下面元素生成的双边理想的商代数

- (CK1) $\alpha\beta^* - \delta_{\alpha,\beta} e_{t(\alpha)}$, 任意箭头$\alpha, \beta \in Q_1$;
- (CK2) $\sum_{\{\alpha\in Q_1 \mid s(\alpha)=i\}} \alpha^*\alpha - e_i$, 任意非sink的顶点$i \in Q_0$.

Leavitt 路代数:定义

箭图Q中顶点i称为sink，若不存在从i出发的箭头。

Definition (Abrams-Aranda Pino 2005/Ara-Moreno-Pardo 2007)

箭图Q的*Leavitt 路代数* $L(Q)$定义为路代数$k\bar{Q}$关于由下面元素生成的双边理想的商代数

- (CK1) $\alpha\beta^* - \delta_{\alpha,\beta} e_{t(\alpha)}$, 任意箭头$\alpha, \beta \in Q_1$;
- (CK2) $\sum_{\{\alpha\in Q_1 \mid s(\alpha)=i\}} \alpha^*\alpha - e_i$, 任意非sink的顶点$i \in Q_0$.

这里，CK 指Cuntz-Krieger.

例子：Leavitt代数

Example

考虑带两片花瓣的“玫瑰”箭图R^2

$$\begin{tikzcd} \bullet_1 \arrow[loop left, "x_1"] \arrow[loop right, "x_2"] \end{tikzcd}$$

例子：Leavitt代数

Example

考虑带两片花瓣的“玫瑰”箭图R^2

$$\begin{tikzcd} \cdot_1 \arrow[loop left, "x_1"] \arrow[loop right, "x_2"] \end{tikzcd}$$

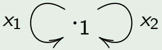
则有同构

$$L(R^2) \simeq \frac{k\langle x_1, x_2, y_1, y_2\rangle}{\langle x_i y_j - \delta_{i,j}, y_1x_1 + y_2x_2 - 1\rangle}.$$

例子：Leavitt代数

Example

考虑带两片花瓣的“玫瑰”箭图R^2



则有同构

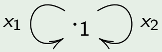
$$L(R^2) \simeq \frac{k\langle x_1, x_2, y_1, y_2\rangle}{\langle x_i y_j - \delta_{i,j}, y_1 x_1 + y_2 x_2 - 1\rangle}.$$

后者被称为（阶为2的）*Leavitt* 代数 L_2; [W.G. Leavitt, 1962].

例子：Leavitt代数

Example

考虑带两片花瓣的“玫瑰”箭图R^2



则有同构

$$L(R^2) \simeq \frac{k\langle x_1, x_2, y_1, y_2\rangle}{\langle x_i y_j - \delta_{i,j}, y_1 x_1 + y_2 x_2 - 1\rangle}.$$

后者被称为（阶为2的）*Leavitt* 代数 L_2; [W.G. Leavitt, 1962].

- 作为L_2-模，$L_2 \oplus L_2 \simeq L_2$;

例子：Leavitt代数

Example

考虑带两片花瓣的“玫瑰”箭图R^2

$$\begin{tikzcd} \cdot_1 \arrow[loop left, "x_1"] \arrow[loop right, "x_2"] \end{tikzcd}$$

则有同构

$$L(R^2) \simeq \frac{k\langle x_1, x_2, y_1, y_2\rangle}{\langle x_i y_j - \delta_{i,j}, y_1 x_1 + y_2 x_2 - 1\rangle}.$$

后者被称为（阶为2的）*Leavitt* 代数 L_2; [W.G. Leavitt, 1962].

- 作为L_2-模，$L_2 \oplus L_2 \simeq L_2$;
- Leavitt代数L_2非诺特，单代数

例子：矩阵代数

Example

考虑线性箭图Q

$$\cdot 1 \longrightarrow \cdot 2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \cdot n$$

例子：矩阵代数

Example

考虑线性箭图Q

$$\cdot 1 \longrightarrow \cdot 2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \cdot n$$

则有代数同构: $\quad L(Q) \simeq M_n(k)$

例子：矩阵代数

Example

考虑线性箭图Q

$$\cdot 1 \longrightarrow \cdot 2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \cdot n$$

则有代数同构: $\quad L(Q) \simeq M_n(k)$

Example

考虑箭图Q' (两顶点，n个箭头)

$$\cdot 1 \Longrightarrow \cdot 2$$

例子：矩阵代数

Example

考虑线性箭图Q

$$\cdot 1 \longrightarrow \cdot 2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \cdot n$$

则有代数同构:　$L(Q) \simeq M_n(k)$

Example

考虑箭图Q' (两顶点，n个箭头)

$$\cdot 1 \Longrightarrow \cdot 2$$

则有代数同构:　$L(Q') \simeq M_n(k)$

Leavitt 路代数：起源

- Leavitt 路代数$L(Q)$具有反自同构$(-)^*: L(Q) \to L(Q)$，

Leavitt 路代数：起源

- Leavitt 路代数$L(Q)$具有反自同构$(-)^*$: $L(Q) \to L(Q)$，满足$(e_i)^* = e_i$, $(\alpha)^* = \alpha^*$，$(\alpha^*)^* = \alpha$

Leavitt 路代数：起源

- Leavitt 路代数$L(Q)$具有反自同构$(-)^*: L(Q) \to L(Q)$，满足$(e_i)^* = e_i$, $(\alpha)^* = \alpha^*$，$(\alpha^*)^* = \alpha$
- 若域$k = \mathbb{C}$, $L(Q) \subseteq C^*(Q)$作为稠密子代数, 其中$C^*(Q)$为*Cuntz-Krieger* C^*-代数 [1977]

Leavitt 路代数：起源

- Leavitt 路代数$L(Q)$具有反自同构$(-)^*: L(Q) \to L(Q)$，满足$(e_i)^* = e_i$, $(\alpha)^* = \alpha^*$，$(\alpha^*)^* = \alpha$
- 若域$k = \mathbb{C}$, $L(Q) \subseteq C^*(Q)$作为稠密子代数, 其中$C^*(Q)$为*Cuntz-Krieger* C^*-代数 [1977]
- 期望: （任意域k上的）Leavitt路代数$L(Q)$的代数性质与$C^*(Q)$的C^*-代数性质相似,

Leavitt 路代数：起源

- Leavitt 路代数$L(Q)$具有反自同构$(-)^*: L(Q) \to L(Q)$，满足$(e_i)^* = e_i$, $(\alpha)^* = \alpha^*$，$(\alpha^*)^* = \alpha$
- 若域$k = \mathbb{C}$, $L(Q) \subseteq C^*(Q)$作为稠密子代数, 其中$C^*(Q)$为*Cuntz-Krieger* C^*-代数 [1977]
- 期望:（任意域k上的）Leavitt路代数$L(Q)$的代数性质与$C^*(Q)$的C^*-代数性质相似, 而后者通常与箭图Q的组合性质相关。

Leavitt 路代数：起源

- Leavitt 路代数$L(Q)$具有反自同构$(-)^*: L(Q) \to L(Q)$，满足$(e_i)^* = e_i$, $(\alpha)^* = \alpha^*$，$(\alpha^*)^* = \alpha$
- 若域$k = \mathbb{C}$, $L(Q) \subseteq C^*(Q)$作为稠密子代数, 其中$C^*(Q)$为*Cuntz-Krieger* C^*-代数 [1977]
- 期望:（任意域k上的）Leavitt路代数$L(Q)$的代数性质与$C^*(Q)$的C^*-代数性质相似, 而后者通常与箭图Q的组合性质相关。

  该期望有时对，但不总是!

设箭图Q不包含sink。

Leavitt 路代数：性质

设箭图Q不包含sink。

- Leavitt 路代数$L(Q)$是分次代数：$L(Q)=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}L(Q)_n$使得$e_i\in L(Q)_0$，$\alpha\in L(Q)_1$，$\alpha^*\in L(Q)_{-1}$

Leavitt 路代数：性质

设箭图Q不包含sink。

- Leavitt 路代数$L(Q)$是分次代数：$L(Q) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} L(Q)_n$使得$e_i \in L(Q)_0$, $\alpha \in L(Q)_1$, $\alpha^* \in L(Q)_{-1}$
- Leavitt 路代数$L(Q)$是强分次的，
  即，$L(Q)_n L(Q)_m = L(Q)_{n+m}$, 任何$n, m \in \mathbb{Z}$;

Leavitt 路代数：性质

设箭图Q不包含sink。

- Leavitt 路代数$L(Q)$是分次代数：$L(Q)=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}L(Q)_n$使得$e_i\in L(Q)_0$, $\alpha\in L(Q)_1$, $\alpha^*\in L(Q)_{-1}$
- Leavitt 路代数$L(Q)$是强分次的，即，$L(Q)_nL(Q)_m=L(Q)_{n+m}$, 任何$n,m\in\mathbb{Z}$;
- 零次分支子代数$L(Q)_0$为超矩阵型代数；

Leavitt 路代数：性质

设箭图Q不包含sink。

- Leavitt 路代数$L(Q)$是分次代数：$L(Q)=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}L(Q)_n$使得$e_i\in L(Q)_0$，$\alpha\in L(Q)_1$，$\alpha^*\in L(Q)_{-1}$
- Leavitt 路代数$L(Q)$是强分次的，即，$L(Q)_nL(Q)_m=L(Q)_{n+m}$，任何$n,m\in\mathbb{Z}$;
- 零次分支子代数$L(Q)_0$为超矩阵型代数；具体来说，矩阵型代数为有限个全矩阵代数的乘积，而这类代数的可数并称为超矩阵型代数。

Leavitt 路代数：性质

设箭图Q不包含sink。

- Leavitt 路代数$L(Q)$是分次代数：$L(Q) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} L(Q)_n$使得$e_i \in L(Q)_0$，$\alpha \in L(Q)_1$，$\alpha^* \in L(Q)_{-1}$
- Leavitt 路代数$L(Q)$是强分次的，即，$L(Q)_n L(Q)_m = L(Q)_{n+m}$，任何$n, m \in \mathbb{Z}$;
- 零次分支子代数$L(Q)_0$为超矩阵型代数；具体来说，矩阵型代数为有限个全矩阵代数的乘积，而这类代数的可数并称为超矩阵型代数。特别地，$L(Q)_0$为冯诺依曼正则代数（即，所有模均平坦）。

- 奇点范畴
- Leavitt路代数
- 奇点范畴与Leavitt路代数

- 考虑$L(Q)$-grproj：有限生成分次投射$L(Q)$-模范畴;

奇点范畴与Leavitt 路代数

- 考虑$L(Q)$-grproj：有限生成分次投射$L(Q)$-模范畴; 其上有次数平移函子(d), $d \in \mathbb{Z}$;

奇点范畴与Leavitt 路代数

- 考虑$L(Q)$-grproj：有限生成分次投射$L(Q)$-模范畴; 其上有次数平移函子(d), $d \in \mathbb{Z}$;
- 强分次+冯诺依曼正则 得出：
  $L(Q)\text{-grproj} \xrightarrow{\sim} L(Q)_0\text{-proj}$，是半单Abel范畴

奇点范畴与Leavitt 路代数

- 考虑$L(Q)$-grproj：有限生成分次投射$L(Q)$-模范畴; 其上有次数平移函子(d), $d \in \mathbb{Z}$;
- 强分次+冯诺依曼正则 得出：
  $L(Q)\text{-grproj} \xrightarrow{\sim} L(Q)_0\text{-proj}$，是半单Abel范畴
- 回顾：给定自等价函子，半单Abel范畴自然成为三角范畴！

奇点范畴与Leavitt 路代数

- 考虑$L(Q)$-grproj：有限生成分次投射$L(Q)$-模范畴; 其上有次数平移函子(d), $d \in \mathbb{Z}$;
- 强分次+冯诺依曼正则 得出：
  $L(Q)\text{-grproj} \xrightarrow{\sim} L(Q)_0\text{-proj}$，是半单Abel范畴
- 回顾：给定自等价函子，半单Abel范畴自然成为三角范畴!

Theorem (陈2011/Smith 2012)

存在三角范畴的等价

$$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A_Q) \xrightarrow{\sim} L(Q)\text{-grproj},$$

奇点范畴与Leavitt 路代数

- 考虑$L(Q)$-grproj：有限生成分次投射$L(Q)$-模范畴; 其上有次数平移函子(d), $d \in \mathbb{Z}$;
- 强分次+冯诺依曼正则 得出：
  $L(Q)\text{-grproj} \stackrel{\sim}{\longrightarrow} L(Q)_0\text{-proj}$，是半单Abel范畴
- 回顾：给定自等价函子，半单Abel范畴自然成为三角范畴！

Theorem (陈2011/Smith 2012)

存在三角范畴的等价

$$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A_Q) \stackrel{\sim}{\longrightarrow} L(Q)\text{-grproj},$$

使得平移函子[1]对应于次数平移函子(-1).

例子：自内射情形

- 回顾：根方零代数A_Q是自内射的 $\Longleftrightarrow$ $Q = Z^n$为基本圈。

例子：自内射情形

- 回顾：根方零代数A_Q是自内射的 $\Longleftrightarrow$ $Q = Z^n$为基本圈。
- Leavitt路代数$L(Z^n) \simeq M_n(k[x, x^{-1}])$，分次代数同构，其中$\deg e_{ij} = i - j$, $\deg x = n$。

例子：自内射情形

- 回顾：根方零代数A_Q是自内射的 $\iff$ $Q = Z^n$为基本圈。
- Leavitt路代数$L(Z^n) \simeq M_n(k[x, x^{-1}])$，分次代数同构，其中$\deg e_{ij} = i - j$, $\deg x = n$。
- 则，$L(Z^n)_0 = k^n$；作为$L(Z^n)_0$-$L(Z^n)_0$-双模，

例子：自内射情形

- 回顾：根方零代数A_Q是自内射的 $\iff$ $Q = Z^n$为基本圈。
- Leavitt路代数$L(Z^n) \simeq M_n(k[x, x^{-1}])$，分次代数同构，其中$\deg e_{ij} = i - j$, $\deg x = n$。
- 则，$L(Z^n)_0 = k^n$；作为$L(Z^n)_0$-$L(Z^n)_0$-双模，$L(Z^n)_{-1} =_\sigma k^n$，其中$\sigma \colon k^n \to k^n$使得$\sigma(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = (\lambda_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1})$.

例子：自内射情形

- 回顾：根方零代数A_Q是自内射的 $\Longleftrightarrow$ $Q = Z^n$为基本圈。
- Leavitt路代数$L(Z^n) \simeq M_n(k[x, x^{-1}])$，分次代数同构，其中$\deg e_{ij} = i - j$, $\deg x = n$。
- 则，$L(Z^n)_0 = k^n$；作为$L(Z^n)_0$-$L(Z^n)_0$-双模，$L(Z^n)_{-1} =_\sigma k^n$，其中$\sigma\colon k^n \to k^n$使得$\sigma(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = (\lambda_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1})$.
- 故，A_{Z^n}-$\underline{\mathrm{mod}} \simeq \mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A_{Z^n}) \simeq L(Z^n)$-grproj $\simeq k^n$-mod，使得平移函子[1]对应于(-1)，于是对应于σ。

Example

考虑$n = 3$。

$$
\begin{tikzcd}
 & \cdot 2 \arrow[dr, "\alpha_2"] & \\
\cdot 1 \arrow[ur, "\alpha_1"] & & \cdot 3 \arrow[ll, "\alpha_3"]
\end{tikzcd}
$$

例子：自内射情形（续）

Example

考虑$n = 3$。

$$\begin{tikzcd}
& \cdot 2 \arrow[dr, "\alpha_2"] & \\
\cdot 1 \arrow[ur, "\alpha_1"] & & \cdot 3 \arrow[ll, "\alpha_3"]
\end{tikzcd}$$

考虑同构$\theta \colon L(Z^3) \to M_3(k[x, x^{-1}])$。则

例子：自内射情形（续）

Example

考虑$n = 3$。

$$\begin{tikzcd} & \cdot 2 \arrow[dr, "\alpha_2"] & \\ \cdot 1 \arrow[ur, "\alpha_1"] & & \cdot 3 \arrow[ll, "\alpha_3"] \end{tikzcd}$$

考虑同构$\theta\colon L(Z^3) \to M_3(k[x, x^{-1}])$。则$\theta(\alpha_1) = e_{21}, \theta(\alpha_2) = e_{32}, \theta(\alpha_3) = e_{13}x, \theta(\alpha_1^*) = e_{12}, \theta(\alpha_2^*) = e_{32}, \theta(\alpha_3^*) = e_{31}x^{-1}$。

例子：自内射情形（续）

Example

考虑$n = 3$。

$$\begin{tikzcd}
& \cdot 2 \arrow[dr, "\alpha_2"] & \\
\cdot 1 \arrow[ur, "\alpha_1"] & & \cdot 3 \arrow[ll, "\alpha_3"]
\end{tikzcd}$$

考虑同构$\theta\colon L(Z^3) \to M_3(k[x, x^{-1}])$。则$\theta(\alpha_1) = e_{21}, \theta(\alpha_2) = e_{32}, \theta(\alpha_3) = e_{13}x, \theta(\alpha_1^*) = e_{12}, \theta(\alpha_2^*) = e_{32}, \theta(\alpha_3^*) = e_{31}x^{-1}$。

于是，$A_{Z^3}\text{-}\underline{\mathrm{mod}} \simeq k^3\text{-mod}$。

例子：非自内射情形

设连通箭图Q不包含sink和source，且$Q \neq Z_n$。

例子：非自内射情形

设连通箭图Q不包含sink和source，且$Q \neq Z_n$。

- Leavitt 路代数$L(Q)$非诺特，局部维数无限，即$\dim L(Q)_n = \infty$，任何$n \in \mathbb{Z}$。

例子：非自内射情形

设连通箭图Q不包含sink和source，且$Q \neq Z_n$。

- Leavitt 路代数$L(Q)$非诺特，局部维数无限，即$\dim L(Q)_n = \infty$，任何$n \in \mathbb{Z}$。
- $\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A_Q)$：Hom-无限，且任何非零对象均可分解，特别地，非Krull-Schmidt范畴。

例子：非自内射情形

设连通箭图Q不包含sink和source，且$Q \neq Z_n$。

- Leavitt 路代数$L(Q)$非诺特，局部维数无限，即$\dim L(Q)_n = \infty$，任何$n \in \mathbb{Z}$。
- $\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A_Q)$：Hom-无限，且任何非零对象均可分解，特别地，非Krull-Schmidt范畴。

Example

考虑带两片花瓣的“玫瑰”箭图R^2

$$\begin{tikzcd} \cdot_1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

例子：非自内射情形

设连通箭图Q不包含sink和source，且$Q \neq Z_n$。

- Leavitt 路代数$L(Q)$非诺特，局部维数无限，即$\dim L(Q)_n = \infty$，任何$n \in \mathbb{Z}$。
- $\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A_Q)$：Hom-无限，且任何非零对象均可分解，特别地，非Krull-Schmidt范畴。

Example

考虑带两片花瓣的“玫瑰”箭图R^2

$$\begin{tikzcd} \cdot_1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

则，$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A_{R^2})$中$S = S[1]^{\oplus 2}$，其中$S$为（唯一的）单$A_{R^2}$-模；

例子：非自内射情形

设连通箭图Q不包含sink和source，且$Q \neq Z_n$。

- Leavitt 路代数$L(Q)$非诺特，局部维数无限，即$\dim L(Q)_n = \infty$，任何$n \in \mathbb{Z}$。
- $\mathbf{D}_{\rm sg}(A_Q)$：Hom-无限，且任何非零对象均可分解，特别地，非Krull-Schmidt范畴。

Example

考虑带两片花瓣的“玫瑰”箭图R^2

$$\begin{tikzcd} \cdot 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

则，$\mathbf{D}_{\rm sg}(A_{R^2})$中$S = S[1]^{\oplus 2}$，其中$S$为（唯一的）单$A_{R^2}$-模；任何对象均形如$S[n]^{\oplus m}$，$n \gg 0$。

三角范畴“完备”化

三角范畴$\mathcal{T}$的完备化是指:

三角范畴“完备”化

三角范畴$\mathcal{T}$的完备化是指: 某个具有任意直和的紧生成三角范畴$\mathcal{T}$使得其进对象的全体$\mathcal{T}^c$三角等价于$\mathcal{T}$;

三角范畴“完备”化

三角范畴$\mathcal{T}$的完备化是指: 某个具有任意直和的紧生成三角范畴$\mathcal{T}$使得其进对象的全体$\mathcal{T}^c$三角等价于$\mathcal{T}$；未知：完备化的存在性和唯一性？

三角范畴“完备”化

三角范畴$\mathcal{T}$的完备化是指: 某个具有任意直和的紧生成三角范畴$\mathcal{T}$使得其进对象的全体$\mathcal{T}^c$三角等价于$\mathcal{T}$；未知：完备化的存在性和唯一性？

- 奇点范畴$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)$的完备化：

三角范畴“完备”化

三角范畴$\mathcal{T}$的完备化是指: 某个具有任意直和的紧生成三角范畴T使得其进对象的全体T^c三角等价于$\mathcal{T}$；未知：完备化的存在性和唯一性？

- 奇点范畴$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)$的完备化：$\mathbf{K}_{\mathrm{ac}}(A\text{-}\mathrm{Inj})$ 无界、正合（无限生成的）内射模复形的同伦范畴[Krause 2005]

三角范畴“完备”化

三角范畴$\mathcal{T}$的完备化是指: 某个具有任意直和的紧生成三角范畴$\mathcal{T}$使得其进对象的全体$\mathcal{T}^c$三角等价于$\mathcal{T}$；未知：完备化的存在性和唯一性？

- 奇点范畴$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)$的完备化：$\mathbf{K}_{\mathrm{ac}}(A\text{-Inj})$ 无界、正合（无限生成的）内射模复形的同伦范畴[Krause 2005]
- 三角范畴$L(Q)$-grproj的完备化：

三角范畴“完备”化

三角范畴$\mathcal{T}$的完备化是指：某个具有任意直和的紧生成三角范畴$\mathcal{T}$使得其进对象的全体$\mathcal{T}^c$三角等价于$\mathcal{T}$；未知：完备化的存在性和唯一性？

- 奇点范畴$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A)$的完备化：$\mathbf{K}_{\mathrm{ac}}(A\text{-Inj})$ 无界、正合（无限生成的）内射模复形的同伦范畴[Krause 2005]
- 三角范畴$L(Q)$-grproj的完备化：微分分次右模的导出范畴$\mathbf{D}(L(Q))$，其中$L(Q)$视为微分为零的微分分次代数

奇点范畴与Leavitt路代数（续）

奇点范畴与Leavitt路代数（续）

Theorem (陈-杨东2013)

设箭图Q不含sink。则存在三角范畴等价

$$\mathbf{K}_{\mathrm{ac}}(A_Q\text{-}\mathrm{Inj}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}(L(Q)).$$

奇点范畴与Leavitt路代数（续）

Theorem (陈-杨东2013)

设箭图Q不含*sink*。则存在三角范畴等价

$$\mathbf{K}_{\mathrm{ac}}(A_Q\text{-Inj}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}(L(Q)).$$

限制到紧对象上，我们得到$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A_Q) \simeq L(Q)\text{-grproj}$。

奇点范畴与Leavitt路代数（续）

Theorem (陈-杨东2013)

设箭图Q不含sink。则存在三角范畴等价

$$\mathbf{K}_{\mathrm{ac}}(A_Q\text{-Inj}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}(L(Q)).$$

限制到紧对象上，我们得到$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A_Q) \simeq L(Q)\text{-grproj}$。

Corollary

设箭图Q与Q'均不含sink。则$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A_Q) \simeq \mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A_{Q'})$当且仅当$L(Q)$ 与$L(Q')$导出等价，当且仅当$L(Q)$与$L(Q')$分次Morita等价。

Leavitt路代数：交叉口

- Leavitt路代数与符号动力系统：

Leavitt路代数：交叉口

- Leavitt路代数与符号动力系统：利用shift拓扑空间，构造Leavitt路代数之间的Morita等价[Abrams/Hazrat...]；

Leavitt路代数：交叉口

- Leavitt路代数与符号动力系统：利用shift拓扑空间，构造Leavitt路代数之间的Morita等价[Abrams/Hazrat...]；构造Leavitt路代数的(不可约)表示[Goncalves-Royer 2011/Smith 2012/陈2012...]

Leavitt路代数：交叉口

- Leavitt路代数与符号动力系统：利用shift拓扑空间，构造Leavitt路代数之间的Morita等价[Abrams/Hazrat...]；构造Leavitt路代数的(不可约)表示[Goncalves-Royer 2011/Smith 2012/陈2012...]
- Leavitt路代数与非交换代数几何:

Leavitt路代数：交叉口

- Leavitt路代数与符号动力系统：利用shift拓扑空间，构造Leavitt路代数之间的Morita等价[Abrams/Hazrat...]；构造Leavitt路代数的(不可约)表示[Goncalves-Royer 2011/Smith 2012/陈2012...]
- Leavitt路代数与非交换代数几何: 考虑非交换射影概型kQ-Gr/kQ-Fin以及其上的点模[Smith 2012]

设$K_0^{\mathrm{gr}}(L(Q))$为$L(Q)$的分次K_0群：

设$K_0^{\mathrm{gr}}(L(Q))$为$L(Q)$的分次K_0群：预偏序的且有自然的$\mathbb{Z}[x,x^{-1}]$-作用。

Leavitt路代数：分次K_0-群

设$K_0^{\mathrm{gr}}(L(Q))$为$L(Q)$的分次K_0群：预偏序的且有自然的$\mathbb{Z}[x,x^{-1}]$-作用。

Conjecture (Hazrat 2012)

设箭图Q与Q'均不含sink。则$L(Q)$与$L(Q')$是分次Morita等价的当且仅当$K_0^{\mathrm{gr}}(L(Q)) \simeq K_0^{\mathrm{gr}}(L(Q'))$。

谢谢大家!

http://home.ustc.edu.cn/~xwchen