相对奇点范畴与广义 Serre 对偶

陈小伍

中国科学技术大学数学系

合肥 230026

导师姓名: 章璞 教授

学科专业: 基础数学

完成时间: 2007 年 4 月

Relative Singularity Categories and Generalized Serre Duality

Chen Xiao-Wu

Department of Mathematics
University of Science and Technology of China
Hefei, 230026, P. R. China

Supervisor: Prof. Dr. Zhang Pu

Date: April, 2007

目 录

摘　要

这是一篇关于三角范畴及其应用的博士论文，主要包含以下三个方面的内容。

1. 对于任意 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 及其任一自正交加法满子范畴 ω，本文第二章引入了相对奇点范畴 $D_\omega(\mathcal{A})$ 的概念。这推广了 Orlov 关于 Noether 环的奇点范畴的概念 [93]。同时也引入了 Frobenius 正合范畴 $\alpha(\omega)$，它是 $\mathcal{A}$ 的满子范畴且其相对投射 - 内射对象的全体恰为 ω 的加法闭包。第二章的主要结果证明了自然函子 $\underline{\alpha(\omega)} \longrightarrow D_\omega(\mathcal{A})$ 是三角范畴间的嵌入 (fully-faithful) 函子；并在一定条件下，证明了该函子为范畴等价。利用该三角等价，我们可将相对奇点范畴刻画为 ω 上的无界正合复形的同伦范畴。

将上述一般结论应用到具体的奇点范畴上，我们得到：

1). 对于 (非交换)Gorenstein 环，其奇点范畴等价于其极大 Cohen-Macaulay 模形成的满子范畴的稳定范畴。这是 Buchweitz 未发表的定理 [28]。

2). 对于具有有限 Gorenstein 维数的 Gorenstein 范畴，其奇点范畴等价于稳定范畴 $\underline{\alpha(\omega)}$，其中 ω 为任一函子有限 (functorially-finite) 的广义倾斜子范畴。这推广了 Happel 的一个定理 [51]。

2. 对于任意具有有限维态射空间的加法范畴 $\mathcal{C}$，我们引入了广义 Serre 结构 (对偶) 的概念：它是这样的六元组 $(S,\ \mathcal{C}_r,\ \mathcal{C}_l,\ \phi_{-,-},\ (-,-),\ \mathrm{Tr}_-)$，其中 $\mathcal{C}_r,\mathcal{C}_l$ 为 $\mathcal{C}$ 的两个满子范畴，$S: \mathcal{C}_r \longrightarrow \mathcal{C}_l$ 是范畴等价，称为广义 Serre 函子，$\phi_{-,-}$，$(-,-)$ 和 Tr_- 的定义参见第三章。这个六元组中的后三项是互相唯一确定的。对于 Krull-Schmidt 预三角范畴 $\mathcal{C}$，第三章的主要结果证明了:

1). $\mathcal{C}_r$ 和 $\mathcal{C}_l$ 均为有厚度的三角子范畴；

2). 广义 Serre 函子 S 是预三角范畴间的正合函子；

3). 设 $X \in \mathcal{C}$ 为不可分解对象。则 $X \in \mathcal{C}_r$（$X \in \mathcal{C}_l$）当且仅当以 X 为右端（左端）的 Auslander-Reiten 三角存在。

注意到根据 Reiten 和 Van den Bergh 的著名结果 [98]，Serre 函子的存在性与 $\mathcal{C}$ 中 Auslander-Reiten 三角的存在性是等价的。而由上述结论，广义 Serre 函子总是存在的，因此，特别地，上述结论推广了 Reiten 和 Van den Bergh 的定理。

对于有限维代数和某些非交换射影概型的有界导出范畴，第三章还显式地计算出了

它们的广义 Serre 结构。作为两个应用，给出了有限维 Gorenstein 代数一个新刻画；加强了 Rickard 的一个定理 [101]。

3. 注意到对于域上具有有限维态射空间的加法范畴 $\mathcal{C}$ 来说, $\mathcal{C}$ 具有幂等可裂性当且仅当 $\mathcal{C}$ 是 Krull-Schmidt 范畴。本文第四章研究了三角范畴的幂等可裂性，证明了如下两条基本且重要的定理：

1). 若加法范畴 $\mathcal{C}$ 是幂等可裂的，则其有界同伦范畴 $K^b(\mathcal{C})$ 也是幂等可裂的。

2). 对于任意 Abel 范畴 $\mathcal{A}$，其有界导出范畴 $D^b(\mathcal{A})$ 总是幂等可裂的。

关键词： 三角范畴，导出范畴，相对奇点范畴，广义 Serre 对偶，幂等可裂。

Abstract

This thesis for Ph.D degree is on triangulated categories and their applications. It mainly consists of the following three parts.

1. For any abelian category $\mathcal{A}$ and a self-orthogonal full additive subcategory ω, we introduce in Chapter 2 the notion of relative singularity category $D_\omega(\mathcal{A})$. This generalizes Orlov's notion of singularity category for Noetherian rings [93]. We introduce a Frobenius exact category $\alpha(\omega)$: it is an additive full subcategory of $\mathcal{A}$, whose subcategory of projective-injective objects are exactly the additive closure of ω. The main result of Chapter 2 asserts that the natural functor from the stable category $\underline{\alpha(\omega)}$ to $D_\omega(\mathcal{A})$ is a fully-faithful exact functor of triangulated categories; moreover, under some reasonable conditions, it is even an equivalence. Using this equivalence, we describe the relative singularity category $D_\omega(\mathcal{A})$ via the homotopy category of unbounded acyclic complexes over ω.

Applying the results above to some concrete singularity categories, we obtain:

1). For a noncommutative Gorenstein ring, its singularity category is triangle-equivalent to the stable category of the full subcategory consisting of maximal Cohen-Macaulay modules. This is an unpublished result of Buchweitz [28];

2). For a Gorenstein category with finite Gorenstein dimension, its singularity category is triangle-equivalent to the stable category $\underline{\alpha(\omega)}$, where ω is any functorially-finite tilting subcategory. This generalizes a corresponding result of Happel [51].

2. For any Hom-finite additive category $\mathcal{C}$, we introduce the notion of generalized Serre structure (duality) on $\mathcal{C}$. It is a six-tuple $(S,\ \mathcal{C}_r,\ \mathcal{C}_l,\ \phi_{-,-},\ (-,-),\ \mathrm{Tr}_-)$, where $\mathcal{C}_r$ and $\mathcal{C}_l$ are certain full subcategories of $\mathcal{C}$, $S : \mathcal{C}_r \longrightarrow \mathcal{C}_r$ is an equivalence, which is called the generalized Serre functor, and for the definitions of $\phi_{-,-}$, $(-,-)$ and Tr_- see Chapter 3. Note that any one of the last three terms in the six-tuple is uniquely determined by any other. For a Krull-Schmidt pre-triangulated category $\mathcal{C}$, the main result of Chapter 3 asserts that:

1). Both $\mathcal{C}_r$ and $\mathcal{C}_l$ are thick triangulated subcategories of $\mathcal{C}$;

2). The generalized Serre functor S is an exact functor of (pre-)triangulated categories;

3). Let $X \in \mathcal{C}$ be indecomposable. Then $X \in \mathcal{C}_r$ (resp. $X \in \mathcal{C}_l$) if and only if there exists an Auslander-Reiten triangle with X being its right term (resp. left term).

Note that by the well-known result of Reiten and Van den Bergh [98], the existence of a Serre functor is equivalent to the existence of Auslander-Reiten triangles in $\mathcal{C}$. By the result above, the generalized Serre functor always exists. Thus, in particular, our result generalizes Reiten-Van den Bergh's theorem.

For the bounded derived categories of finite-dimensional algebras and some noncommutative projective schemes, we explicitly compute their generalized Serre structures. As two applications, we give a new characterization for finite-dimensional Gorenstein algebras; and we strengthen a remarkable theorem of Rickard [101] via a short proof.

3. Note that for Hom-finite additive categories, the idempotent-split property is equivalent to the property of being Krull-Schmidt. In Chapter 4, we study the idempotent-split property of triangulated categories. We prove the following two fundamental results, which seem to be known but have no exact references:

1). For any idempotent-split category $\mathcal{C}$, the bounded homotopy category $K^b(\mathcal{C})$ is also idempotent-split;

2). For any abelian category $\mathcal{A}$, its bounded derived category $D^b(\mathcal{A})$ is always idempotent-split.

Keywords: triangulated categories, derived categories, relative singularity categories, generalized Serre duality, idempotent-split.

前 言

0.1 1958 年在国际数学家大会的报告中，为了陈述代数几何中推广的 Serre 对偶定理 [47]，A. Grothendieck 首次使用了导出范畴的概念。1963 年他的学生 J. L. Verdier 提出了三角范畴的概念并发展了其局部化理论，实现了导出范畴的具体构造 [110]。几乎与此同时，拓扑学家 D. Puppe 也发现了三角范畴的公理 (TR1)-(TR3) [96]。如今，导出范畴和三角范畴已经深入到数学和物理的许多领域，与许多深刻的结果相联系。

在 A. Grothendieck 1963 年手稿的基础上，1966 年 R. Hartshorne 发表了他在哈佛大学讨论班上的讲稿 [54]，给出了推广的 Serre 对偶定理的完整证明。这可以说是导出范畴和三角范畴的第一次应用，此后，导出范畴在代数几何中成为基本的工具和研究对象。1970 年左右，M. Sato [105] 和 M. Kashiwara [61] 将导出范畴应用到偏微分方程组以及代数 D- 模的研究中。现在导出范畴已是微局部分析的标准语言。1981 年，通过 Riemann-Hilbert 对应，导出范畴和三角范畴在 J. L. Brylinski-M. Kashiwara [25]（或独立地，A. A. Beilinson-J. Berstein [15]）对 Kazhdan-Lusztig 猜想的证明中扮演了重要角色。受该工作的影响，现在导出范畴与三角范畴在李群以及有限 Chevalley 群的表示论中是十分重要的工具。

1978 年左右，A. A. Beilinson [13, 14] 和 I. N. Bernstein-I. M. Gelfand-S. I. Gelfand [17] 证明了射影空间上凝聚层的导出范畴与某些由有限维代数决定的三角范畴是三角等价的。1982 年，A. A. Beilinson-J. Bernstein-P. Deligne [16] 引入了三角范畴的 t- 结构以及三角范畴的 recollement 的概念，并将它们应用到代数几何的研究中去，特别地，他们引入了 perverse 层的概念。这些工作在不同程度上启发了 D. Happel 系统地研究有限维代数模范畴的导出范畴 [48, 49]: 他证明了代数表示论中的倾斜理论可以诠释为代数间的导出等价；提出了三角范畴的 Auslander-Reiten 理论；证明了有限维代数模范畴的有界导出范畴可嵌入到其平凡扩张代数的分次模范畴的稳定范畴中。关于导出等价，E. Cline-B. Parshall-L. L. Scott [34] 推广了 D. Happel 的工作，随后 J. Rickard 提出了倾斜复形的概念并得到了模范畴的导出范畴的 Morita 理论 [99]，随后他将该理论应用到自内射代数的研究中并得到了一些令人称奇的结果 [100, 101]。另一方面，导出范畴的 Morita 理论扩大了其在有限群模表示中的应用，一个例子就是著名的 Broué 猜想 [23, 70]。

进入上世纪九十年代后，受到拓扑学家一系列工作的启发，A. Neeman 和他的合作者们研究了具有无限上积的三角范畴，将同伦上极限、Bousfield 局部化以及 Brown 表示定理等工具应用到无界复形的分解以及代数几何中的对偶定理等问题上去，得出了一批十分深刻的结论，参见 [20, 88, 89]; B. Keller 研究了微分分次范畴以及其上的同伦范畴、导出范畴，这些概念大大推广了经典的同伦范畴和导出范畴，更重要的是，这些工作使得 D. Happel 和 J. Rickard 的一些结果变得更自然和易懂 [66, 70]。受倾斜理论和导出等价间的关系的启发，D. Happel-I. Reiten-S. O. Smalø [52] 将经典倾斜模的理论推广到任意 Abel 范畴中并引入拟倾斜代数的概念，这类代数包含了倾斜代数 [49] 以及典范代数 [102]。与此同时，M. Kontsevich [71] 提出了著名的 "同调镜像猜想"：若 Calabi-Yau 代数簇 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 互为镜像，则 $\mathbb{X}$ 上凝聚层范畴和 $\mathbb{Y}$ 的 Fukaya 范畴是导出等价的。该猜想使得导出范畴以及三角范畴成为数学物理中最基本的研究对象之一。

在新世纪里，虽只短短几年，导出范畴与三角范畴的领域却涌现出了许多新的研究方向：A. Neeman 引入了优生成（well-generated）三角范畴的概念并证明它们也满足 Brown 表示定理，该结果推广了经典的紧生成三角范畴上的 Brown 表示定理 [90]；彭联刚和肖杰 [95] 利用根范畴的三角范畴结构实现了整个 Kac-Moody 代数；受 M. Douglas 关于 D- 膜的 Π- 稳定性研究的启发，T. Bridgeland [22] 引入了三角范畴的 slicing 以及稳定性条件的概念，并得到了较好的模空间；R. Rouquier 引入了三角范畴维数的概念并将之应用于对 Auslander 表示维数的研究 [104]；B. Toën [107] 对于微分分次范畴定义了导出 Hall 代数，受其启发，肖杰和徐帆 [113] 给出了某些三角范畴上 Hall 代数的定义；代数几何学家 D. Orlov 引入了奇点范畴 (singularity category) 的概念并将之与 Landau-Ginzburg 模型上的 D- 膜范畴联系起来 [91, 92, 93]；I. Reiten 和她的合作者们引入了簇范畴 (cluster category)、簇倾斜对象以及簇倾斜代数的理论，参见 [26, 27] 等。近来，由 M. Kontsevich 提出的 Calabi-Yau 范畴的概念在代数表示论以及数学物理领域中十分活跃，参见 [68, 39, 69, 58, 75, 84, 35] 等; 受其启发，V. Ginzburg 提出了 Calabi-Yau 代数的概念，参考 [46]（并比较文 [19]）; C. Cibils 和章璞对任意 Krull-Schimdt 三角范畴引入了 Calabi-Yau 对象的概念 [33]。

0.2 下面，我们将分三部分，较详细地陈述本文的研究背景和主要结果。

0.2.1 镜像对称是数学物理中十分重要的猜想。文 [71] 给出了镜像对称猜想的数学描述：设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是互为镜像的 Calabi-Yau 簇，则 $\mathbb{X}$ 上凝聚层的导出范

畴 $D^b(\mathrm{coh}(\mathbb{X}))$ 与 $\mathbb{Y}$ 的 Fukaya 范畴 $\mathcal{F}$ 的导出范畴 $D^b(\mathcal{F})$ 是三角等价的（比较 [91] 第 1-2 页）。镜像对称有如下的另一个形式：设 $\mathbb{X}$ 为 Fano 簇，$(\mathbb{Y}, W)$ 为它的镜像（此时，称 $(\mathbb{Y}, W)$ 为 Landau-Ginzburg 模型，W 为 超势能)，则有 $\mathbb{X}$ 上的 A- 膜范畴（为某种 Fukaya 范畴）与 $(\mathbb{Y}, W)$ 上的 B- 膜范畴是等价的。由于物理中某些对称性（例如，BRST- 不变性）的需要，此时的 B- 膜范畴不再是凝聚层的导出范畴。M. Konstevich 提出了它的数学定义（参见 [59, 91]）：设基域为复数域 $\mathbb{C}$，$\mathbb{Y}$ 为仿射簇，$W : \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{C}$ 为正则函数，则 $(\mathbb{Y}, W)$ 上的 B- 膜范畴定义为如下扭复形所组成的同伦范畴，其中扭复形是指

$$P^0 \underset{d^1}{\overset{d^0}{\rightleftarrows}} P^1$$

其中 P^i 为 $\mathbb{Y}$ 上的向量丛，态射 d^i 满足 $d^0 \circ d^1 = W$，$d^1 \circ d^0 = W$(比较 D. Eisenbud 矩阵分解的概念，参见 [37]，第五节)。

为了研究 Landau-Ginzburg 模型上的 B- 膜范畴，D. Orlov [91] 引入了代数簇的奇点范畴的概念：设 $\mathbb{X}$ 为代数簇，定义奇点范畴为 Verdier 商三角范畴

$$D_{\mathrm{sg}}(\mathbb{X}) := D^b(\mathrm{coh}(\mathbb{X}))/\mathrm{per}(\mathbb{X})$$

其中 $\mathrm{per}(\mathbb{X})$ 为 $\mathbb{X}$ 上完备复形组成的三角子范畴 [106]。不难证明，$D_{\mathrm{sg}}(\mathbb{X}) = 0$ 当且仅当 $\mathbb{X}$ 正则，于是三角范畴 $D_{\mathrm{sg}}(\mathbb{X})$ 反应了代数簇 $\mathbb{X}$ 的奇异性。文 [91] 的主要定理（定理 3.9 和推论 3.10）断言以上定义的 B- 膜范畴三角等价于某些奇点范畴的直积；特别地，B- 膜范畴仅取决于超势能 W 的 critical 点的局部性质（比较 [60]，第 738 页第 4 段）。不难发现，如上定义的奇点范畴有它的分次形式以及非交换形式，参见 [93, 108]。特别地，对于任意左 Noether 环 R，定义其奇点范畴为 Verdier 商三角范畴

$$D_{\mathrm{sg}}(R) := D^b(R\text{-mod})/K^b(R\text{-proj})$$

其中 R-mod, R-proj 分别为有限生成左 R- 模范畴和有限生成投射左 R- 模范畴。

我们注意到，上述构造在代数几何和代数表示论中都有类似物存在，参见 Buchweitz [28, 29], Rickard [100], Happel [51], Beligiannis [18] 等。R. O. Buchweitz 证明了，当 R 为 Gorenstein 环时，奇点范畴 $D_{\mathrm{sg}}(R)$ 等价于其极大 Cohen-Macaulay 模范畴的稳定范畴 [28]；D. Happel 也独立地发现了类似结论（比较 [51]）。最近，H. Krause [74] 利用 Brown 表示定理以及 recollement 来研究奇点

范畴，并将之与无界零伦复形的同伦范畴联系起来，他的结果推广了文 [91] 的部分结果。

受以上工作的启发，本文引入了 相对奇点范畴的概念，从而统一并推广了 R. O. Buchweitz 和 D. Happel 等人的工作。设 $\mathcal{A}$ 为任意 Abel 范畴，ω 为其中的自正交加法满子范畴，定义相对奇点范畴为如下的 Verdier 商三角范畴

$$D_\omega(\mathcal{A}) := D^b(\mathcal{A})/K^b(\omega).$$

如 [7] 和 [4]，我们考虑 $\mathcal{A}$ 的满子范畴 $\omega^\perp$，$\widehat{\omega}$，${}_\omega\mathcal{X}$，${}_\omega\overset{\vee}{\mathcal{X}}$，及其对偶 ${}^\perp\omega$，$\breve{\omega}$，$\mathcal{X}_\omega$，和 $\widehat{\mathcal{X}_\omega}$ 等。注意到，$\alpha(\omega) = \mathcal{X}_\omega \cap {}_\omega\mathcal{X}$ 是 Frobenius 正合范畴，其相对投射 - 内射对象的全体恰为 ω 的加法闭包 addω。由 Heller-Happel 定理，稳定范畴 $\underline{\alpha(\omega)}$ 是三角范畴。记 $K^{\mathrm{ex}}(\omega)$ 为 $K(\omega)$ 中正合复形组成的满子范畴。显然，它是三角子范畴。

结合定理 2.2.7 和定理 2.3.1，我们得到本文的第一个主要结果。

定理 I *设 ω 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的自正交子范畴。假设 $\widehat{\mathcal{X}_\omega} = \mathcal{A} = {}_\omega\overset{\vee}{\mathcal{X}}$ 且 $\widehat{\omega}\subseteq \omega^\perp$，$\breve{\omega}\subseteq {}^\perp\omega$。则有自然的三角等价*

$$D_\omega(\mathcal{A}) \simeq \underline{\mathfrak{a}(\omega)} \simeq K^{\mathrm{ex}}(\omega).$$

这个定理的证明需用到分式的性质、导出范畴中标准三角的知识以及许多很细致的验证。该结果的意义在于将相对奇点范畴与 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 自身的某个正合子范畴的稳定范畴联系起来，这个想法最早可由 [100]，定理 2.1 看出。

将定理 I 应用于对具体的奇点范畴的研究：取 $\mathcal{A}$ 为 Gorenstein 环的有限生成模范畴或为具有有限 Gorenstein 维数的 Gorenstein 范畴。由定理 2.4.3 和定理 2.4.8，我们得到本文的第二个主要结果。

定理 II

(1) *设 R 为 Gorenstein 环。则有三角范畴间的等价*

$$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(R) \simeq \underline{\mathrm{MCM}(R)} \simeq K^{\mathrm{ex}}(R\text{-proj}).$$

(2) *设 $\mathcal{A}$ 为具有有限 Gorenstein 维数的 Gorenstein 范畴，$\omega \subseteq \mathcal{A}$ 为函子有限*

的广义倾斜子范畴。则有三角范畴间的等价

$$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\mathcal{A}) \simeq \underline{\mathfrak{a}(\omega)} \simeq K^{\mathrm{ex}}(\omega).$$

定理 II(1) 推广了 Happel ([51]，定理 4.6) 和 Buchweitz [28]，而定理 II(2) 推广了 Rickard ([100]，定理 2.1) 和 Happel ([51]，定理 4.6) 以及我们先前的工作 [32]；注意到我们这里所引的 Rickard 定理和 Happel 定理在文献中的证明均有非平凡的不完全之处。

0.2.2 模范畴的 Auslander-Reiten 理论是现代代数表示论中的基石之一，它主要由 Auslander-Reiten 序列的存在性以及 Auslander-Reiten 箭图的结构理论构成 [8, 102]。D. Happel [48] 对于 Krull-Schmidt 三角范畴 $\mathcal{C}$ 提出了如下的 Auslander-Reiten 三角的概念：Auslander-Reiten 三角是正合三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

满足：X 和 Z 均不可分解, $w \neq 0$ 且态射 v 右几乎可裂。我们分别称 X 和 Z 为该 Auslander-Reiten 三角的左端和右端。文 [48] 研究了有限维代数 A 模范畴的有界导出范畴 $D^b(A\text{-mod})$ 中的 Auslander-Reiten 三角。与模范畴上的 Auslander-Reiten 理论不同的是，导出范畴 $D^b(A\text{-mod})$ 并不是总有 Auslander-Reiten 三角的。事实上，文 [48] 证明了若 A 有有限的整体维数，则 $D^b(A\text{-mod})$ 有 Auslander-Reiten 三角；随后，文 [50] 证明了 $D^b(A\text{-mod})$ 有 Auslander-Reiten 三角当且仅当 A 的整体维数有限。

另一方面，1989 年 A. I. Bondal 和 M. M. Kapranov [21] 对具有有限维态射空间的三角范畴引入了 Serre 对偶以及 Serre 函子的概念，从而将代数几何里经典的 Serre 对偶描述成凝聚层的有界导出范畴上的 Serre 对偶。同时，文 [21] 也指出了 Serre 函子的存在性与某些函子的可表示性有关，并证明了 Serre 函子总是正合函子。2002 年 I. Reiten- M. Van den Bergh 证明了三角范畴有 Serre 对偶当且仅当它有 Auslander-Reiten 三角，参见 [98]，定理 I.2.4；并且，利用迹函数的技巧，M. Van den Bergh 重新证明了 Serre 函子的正合性，参见 [19]，附录定理 A.4.4。另外，文 [81] 研究了具有有限维态射空间的加法范畴上的 Serre 对偶。最近，Serre 对偶的计算在 D- 膜的研究中也是一个备受关注的问题，参见 [60, 76] 等。

由上知，对于一般的具有有限维态射空间的 Krull-Schmidt 三角范畴 $\mathcal{C}$，我

们不能期望它有 Auslander-Reiten 三角，或等价地，它有 Serre 对偶。但是，**我们可以研究哪些不可分解对象可成为 Auslander-Reiten 三角的左端或右端，或考虑范畴 $\mathcal{C}$ 在多大程度上具有 Serre 对偶**。这就是本文第三章的主要研究内容。为此，**我们引入了广义 Serre 结构（包括广义 Serre 函子，及其定义域、值域，非退化双线性型等）**。

设 $\mathbb{K}$ 为基域，$\mathcal{C}$ 为 $\mathbb{K}$ 上具有有限维态射空间的加法范畴。我们引进了如下两个满子范畴

$$\mathcal{C}_r := \{X \in \mathcal{C} \mid \text{ 函子 } D\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) \text{ 可表示}\},$$

$$\mathcal{C}_l := \{X \in \mathcal{C} \mid \text{ 函子 } D\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) \text{ 可表示}\},$$

其中 D 为通常的 $\mathbb{K}$ 对偶。不难得到，存在唯一的加法函子 $S : \mathcal{C}_r \longrightarrow \mathcal{C}_l$ 使得有双自然同构

$$\phi_{X,Y}: \ D\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, S(X)),$$

其中 $X \in \mathcal{C}_r$，$Y \in \mathcal{C}$。由 $\phi_{X,Y}$，我们可自然定义非退化双线性型 $(-,-)_{X,Y}$ 以及迹函数 $\mathrm{Tr}_X : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, S(X)) \longrightarrow \mathbb{K}$。称以上的六元组 $(S,\ \mathcal{C}_r,\ \mathcal{C}_l,\ \phi_{-,-},\ (-,-),\ \mathrm{Tr}_-)$ 为范畴 $\mathcal{C}$ 的 广义 Serre 结构(或为广义 Serre 对偶)。特别地，我们称函子 S 为 $\mathcal{C}$ 的广义 Serre 函子，子范畴 $\mathcal{C}_r$ 和 $\mathcal{C}_l$ 分别称为 S 的定义域和值域。

下述定理是本文的第三个主要结果（定理 3.2.1）。特别地，它将预三角范畴 $\mathcal{C}$ 的广义 Serre 结构与 $\mathcal{C}$ 在多大程度上有 Auslander-Reiten 三角的问题联系起来。

定理 III *设 $\mathcal{C}$ 是域 $\mathbb{K}$ 上具有有限维态射空间的 Krull-Schmidt 预三角子范畴。记 $S : \mathcal{C}_r \longrightarrow \mathcal{C}_l$ 为其上的广义 Serre 函子。则有*

(1) 子范畴 $\mathcal{C}_r$ 和 $\mathcal{C}_l$ 均为有厚度的三角子范畴。

(2) 存在对 $X \in \mathcal{C}_r$ 自然的同构 $\eta_X : S(X[1]) \longrightarrow S(X)[1]$，使得 (S, η) 成为 $\mathcal{C}_r$ 和 $\mathcal{C}_l$ 之间的三角等价。

(3) 设 $X \in \mathcal{C}$ 不可分解。则 $X \in \mathcal{C}_r (X \in \mathcal{C}_l)$ 当且仅当以 X 为右端（左端）的 Auslander-Reiten 三角存在。

定理 III 的证明占据了第三章的一半篇幅：第一个断言需用到 Freyd-Verdier 定理；第二个断言推广了 [21]，命题 3.3，其证明深受 [19]，定理 A.4.4 的证明的启发；第三个断言推广了 [98]，命题 I.2.3，更重要的是，由该断言可知：预三角范畴 $\mathcal{C}$ 在多大程度上有 Auslander-Reiten 三角的问题归结到子范畴 $\mathcal{C}_r$（或 $\mathcal{C}_l$）

与 $\mathcal{C}$ 有多大差距的问题。于是，对于某些重要的三角范畴，计算其广义 Serre 结构变得十分重要。我们有本文的第四个主要结果 (定理 3.3.5 和定理 3.3.9)

定理 IV
(1) 设 $\mathcal{A}$ 为域 $\mathbb{K}$ 上具有有限维态射空间的 *Abel* 范畴。设 $\mathcal{A}$ 有足够多的投射对象和内射对象。假设 $\mathcal{A}_r = \mathcal{P}$，$\mathcal{A}_l = \mathcal{I}$ 并记 $S_{\mathcal{A}} = \nu$。则有 $D^b(\mathcal{A})_r = K^b(\mathcal{P})$，$D^b(\mathcal{A})_l = K^b(\mathcal{I})$ 且其广义 *Serre* 函子 $S = \nu$（逐项地作用在复形上）。
(2) 设 R 为连通的双边 *Noether* 分次代数，$\mathbb{X} = \mathrm{Proj}(R)$ 为其相应的非交换射影概型。设 R 以及它的反代数 R^{op} 均满足条件 "χ" 且相应的函子 τ 均具有有限的上同调维数。设 $R^\bullet$ 为 R 的平衡对偶复形，并记 $\mathcal{R}^\bullet = \pi(R^\bullet)$。则有界导出范畴 $D^b(\mathrm{coh}(\mathbb{X}))$ 的广义 *Serre* 结构由以下给出：

$$D^b(\mathrm{coh}(\mathbb{X}))_r = D^b(\mathrm{coh}(\mathbb{X}))_{\mathrm{fpd}}, \quad D^b(\mathrm{coh}(\mathbb{X}))_l = D^b(\mathrm{coh}(\mathbb{X}))_{\mathrm{fid}},$$

且其广义 *Serre* 函子为 $S = - \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{R}^\bullet[-1]$.

定理 IV (1) 受 D. Happel 的定理 ([50]，定理 1.4) 的启发，而定理 IV(2) 得益于 K. De Naeghel 和 M. Van den Bergh 最近的一个结论（[85]，定理 A.4），也可将之与 [104]，命题 7.48 做比较。将定理 IV (1) 应用到 $\mathcal{A} = A$-mod 上，其中 A 为有限维代数，我们得到了有限维 Gorenstein 代数的新刻画（推论 3.4.3）并且加强了 J. Rickard 关于对称代数的一个定理（定理 3.4.5）。

0.2.3 加法范畴中的幂等态射是否可分裂的问题往往是十分非平凡且深刻的（参考 [2], 第 207 页或 [41]）。设 $\mathfrak{a}$ 为加法范畴。幂等态射 $e: X \longrightarrow X$ 称为可裂的，若存在态射 $u: X \longrightarrow Y$ 和 $v: Y \longrightarrow X$ 使得 $e = v \circ u$ 且 $\mathrm{Id}_Y = u \circ v$。若 $\mathfrak{a}$ 中每个幂等态射均可裂，则称范畴 $\mathfrak{a}$ 幂等可裂（或 Karoubian）。注意到，对于具有有限维态射空间的加法范畴 $\mathfrak{a}$，$\mathfrak{a}$ 幂等可裂当且仅当它是 Krull-Schmidt 范畴（参见 [31]，附录 A）。最近，P. Balmer 和 M. Schlichting [11] 专门研究了三角范畴的幂等可裂性以及相关问题，特别地，他们利用较深刻的 K- 理论证明了幂等可裂正合范畴的有界导出范畴也是幂等可裂的。我们注意到如下（简单但重要）的事实：设 $\mathcal{C}$ 为某个三角范畴的三角子范畴。若 $\mathcal{C}$ 幂等可裂，则 $\mathcal{C}$ 一定是有厚度的。

本文的第四章证明了如下定理 (定理 A 和定理 B)：其第一部分受到 J. Rickard 文 [99] 和 M. Bökstedt-A. Neeman 文 [20] 的启发；第二部分的证明完全是初等的，我们仅用到导出范畴的 t- 结构以及好截断函子 τ 的性质。这里必须指出的是：该定理对于专家来说可能是已知的。

定理 V

(1) 设 $\mathcal{C}$ 为幂等可裂的加法范畴。则其有界同伦范畴 $K^b(\mathcal{C})$ 也为幂等可裂的。

(2) 设 $\mathcal{A}$ 为 *Abel* 范畴。则其有界导出范畴 $D^b(\mathcal{A})$ 是幂等可裂的。

0.3 下面简单介绍本文的组织结构：第一章较系统地介绍了三角范畴的基本理论以及同伦范畴与导出范畴的构造和性质；第二章研究了相对奇点范畴以及稳定范畴 $\underline{\alpha(\omega)}$，并将所得结果应用到具体的奇点范畴上；第三章研究了预三角范畴的广义 Serre 结构并计算出某些有界导出范畴的广义 Serre 结构；第四章研究了三角范畴的幂等可裂性。其中，第一章仅个别命题是新的，第二、三章的结果是新的，第四章部分结果是新的。

第一章　基础知识

本章主要介绍三角范畴的基本理论以及相关的一些结论。我们介绍了三角范畴及其局部化的理论，正合范畴以及 Heller-Happel 定理，并较详细地研究了三角范畴中最重要的两个例子：同伦范畴与导出范畴。我们这里的处理方式融合了经典的文献（如，[110, 54, 57] 等）以及一些较新的讲义 (如，[67, 73] 等)。

§1.1　三角范畴

§1.1.1　（预）三角范畴

回顾三角范畴的定义。设 $\mathcal{C}$ 是加法范畴。给定 T 为 $\mathcal{C}$ 上的自同构，并称其为**平移函子**。记 T^{-1} 为 T 的逆，T^n 为相应的合成，$n \in \mathbb{Z}$。

范畴 $\mathcal{C}$ 中的**三角**是指六元组 $(X,\ Y,\ Z,\ u,\ v,\ w)$，其中 X,Y,Z 是 $\mathcal{C}$ 中的对象，$u: X \longrightarrow Y$，$v: Y \longrightarrow Z$ 和 $w: Z \longrightarrow T(X)$ 是 $\mathcal{C}$ 中的态射。有时也记该三角为序列 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X)$。另外，文献 [57]（比较 [49]，第一页）将三角形象地记为

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "u"] & & Y \arrow[dl, "v"] \\ & Z \arrow[ul, squiggly, "w"] & \end{tikzcd}$$

范畴 $\mathcal{C}$ 中的三角 $(X,\ Y,\ Z,\ u,\ v,\ w)$ 到三角 $(X',\ Y',\ Z',\ u',\ v',\ w')$ 的**三角态射**是指满足下图交换的态射组 $(f,\ g,\ h)$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & T(X) \arrow[d, "T(f)"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & T(X') \end{tikzcd}$$

若态射 f，g 和 h 均为 $\mathcal{C}$ 中的同构，则称三角态射 $(f,\ g,\ h)$ 为**同构**。

设 $\mathcal{T}$ 是由范畴 $\mathcal{C}$ 中的一些三角构成的类（class）。称三元组 $(\mathcal{C},\ T,\ \mathcal{T})$ 为**三角范畴** [110]，或简称 $\mathcal{C}$ 为三角范畴，如果以下公理得到满足：

(TR1) 与 $\mathcal{T}$ 中三角同构的三角均在 $\mathcal{T}$ 中；对每个态射 $u: X \longrightarrow Y$，存在 $\mathcal{T}$ 的三角 (X, Y, Z, u, v, w)；$(X, X, 0, \mathrm{Id}_X, 0, 0) \in \mathcal{T}$。

(TR2) (三角的旋转) 若 $(X, Y, Z, u, v, w) \in \mathcal{T}$，则 $(Y, Z, T(X), v, w, -T(u)) \in \mathcal{T}$。

(TR3) 设 (X, Y, Z, u, v, w), $(X', Y', Z', u', v', w') \in \mathcal{T}$，且设 $f: X \longrightarrow X'$, $g: Y \longrightarrow Y'$ 使得 $u' \circ f = g \circ u$。则存在态射 $h: Z \longrightarrow Z'$ 使得 (f, g, h) 为三角态射。

(TR4) (八面体公理 the octahedral axiom) 任给 $\mathcal{T}$ 中的三角 (X, Y, X', u, i, i'), (Y, Z, Z', v, j, j') 以及 $(X, Z, Y', v\circ u, k, k')$。则有如下的交换图

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "v"] & X' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, dotted, "u'"] & T(X) \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "v\circ u"] & Z \arrow[r, "k"] \arrow[d, "j"] & Y' \arrow[r, "k'"] \arrow[d, dotted, "v'"] & T(X) \arrow[d, "T(u)"] \\
& Z' \arrow[r, equal] \arrow[d, "j'"] & Z' \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "w'"] & T(Y) \\
& T(Y) \arrow[r, "T(i)"] & T(X') &
\end{tikzcd}$$

其中第三列也属于 $\mathcal{T}$。

设 $(\mathcal{C}, T, \mathcal{T})$ 为三角范畴。则类 $\mathcal{T}$ 中的三角称为**正合三角**。范畴 $\mathcal{C}$ 上的**三角结构**是指二元组 $(T, \mathcal{T})$ 使得 $(\mathcal{C}, T, \mathcal{T})$ 成为三角范畴。

注记 1.1.1 *(1)* 关于三角范畴的定义，有的文献仅要求其平移函子 T 为范畴自等价。但注意到，我们有标准的办法使得自等价自然地“变成”自同构，参见 *[1]*，第 *248-250* 页或 *[63]*，第 *293* 页练习 *11.1*。
(2) 三元组 $(\mathcal{C}, T, \mathcal{T})$ 称为**预三角范畴** *[90] (*与 *D. Puppe* 的**稳定同伦范畴**的概念进行比较 *[96])*，若它们只满足公理 *(TR1)-(TR3)*。我们注意到八面体公理是由 *J. L. Verdier* 引入的 *[110]*。
(3) 预三角范畴中的平移函子又记成[1]，参见 *[16]*。于是，$T^n(X)$ 记为 $X[n]$，$T^n(f)$ 记为 $f[n]$，$n \in \mathbb{Z}$。有文献将平移函子记为 S *[67]* 或者 Σ *[90, 73]*。
(4) 对于预三角范畴 $\mathcal{C}$，我们可以证明*:* 三角 $(X, Y, Z, u, v, w) \in \mathcal{T}$ 当且仅当 $(Y, Z, T(X), v, w, -T(u)) \in \mathcal{T}$。参见 *[49]*，第 *6* 页。

设 $(\mathcal{C},\ T,\ \mathcal{T})$ 为三角范畴。设 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴。加法函子 $H:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{A}$ 称为**上同调函子**，如果对于每个正合三角 $X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\xrightarrow{w}T(X)$，下序列正合：

$$\cdots\to H^{-1}(Y)\overset{H^{-1}(v)}{\to}H^{-1}(Z)\overset{H^{-1}(w)}{\to}H^{0}(X)\overset{H^{0}(u)}{\to}H^{0}(Y)\overset{H^{0}(v)}{\to}H^{0}(Z)\overset{H^{0}(w)}{\to}H^{1}(X)\to\cdots$$

其中 $H^n=H\circ T^n$，$n\in\mathbb{Z}$。类似地，可定义**反变上同调函子**。

注记 1.1.2 根据 *(TR2)* 可知，加法函子 $H:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{A}$ 为上同调函子当且仅当对于任意如上的正合三角，序列 $H(X)\overset{H(u)}{\longrightarrow}H(Y)\overset{H(v)}{\longrightarrow}H(Z)$ 在中间处正合。

关于预三角范畴，下面的结论最为基本。参见 [110, 96, 90]。

命题 1.1.3 设 $(\mathcal{C},\ T,\ \mathcal{T})$ 为预三角范畴。

(1) 设 $(X,\ Y,\ Z,\ u,\ v,\ w)$ 为正合三角。则有 $v\circ u=0$，$w\circ v=0$ 以及 $T(u)\circ w=0$。

(2) 设 $X\in\mathcal{C}$。则函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-)$ 和 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X)$ 均为上同调函子。

(3) 设 $(f,\ g,\ h)$ 为正合三角 $(X,\ Y,\ Z,\ u,\ v,\ w)$ 到 $(X',\ Y',\ Z',\ u',\ v',\ w')$ 的三角态射。若 f 和 g 是同构，则 h 是同构。特别地，$\mathcal{C}$ 中的任一态射 $u:X\longrightarrow Y$ 在同构意义下唯一地嵌入某正合三角 $(X,\ Y,\ Z,\ u,\ v,\ w)$。

(4) 设 Λ 为任意指标集。给定正合三角 $(X_i,\ Y_i,\ Z_i,\ u_i,\ v_i,\ w_i)$，$i\in\Lambda$。假设上积 $\bigoplus_{i\in\Lambda}X_i$，$\bigoplus_{i\in\Lambda}Y_i$ 和 $\bigoplus_{i\in\Lambda}Z_i$ 均存在。则如下三角为正合三角

$$(\bigoplus_{i\in\Lambda}X_i,\ \bigoplus_{i\in\Lambda}Y_i,\ \bigoplus_{i\in\Lambda}Z_i,\ \bigoplus_{i\in\Lambda}u_i,\ \bigoplus_{i\in\Lambda}v_i,\ \gamma\circ\bigoplus_{i\in\Lambda}w_i),$$

其中 $\gamma:\bigoplus_{i\in\Lambda}T(X_i)\longrightarrow T(\bigoplus_{i\in\Lambda}X_i)$ 为典范同构。对于积也有相应的结果。

注记 1.1.4 根据命题 *1.1.3(3)*，公理 *(TR4)* 可换成如下公理：

(TR4') 任意给定态射 $\tilde{u}:\tilde{X}\longrightarrow\tilde{Y}$ 和 $\tilde{v}:\tilde{Y}\longrightarrow\tilde{Z}$，存在如 *(TR4)* 中的交换图且第一、二行和二、三列正合，其中 u 和 v 是使得下图交换的态射

$$\begin{array}{ccccc}\tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{u}} & \tilde{Y} & \xrightarrow{\tilde{v}} & \tilde{Z}\\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z\end{array}$$

其中列映射均为同构态射。关于公理 *(TR4)* 的其他等价形式，可参见 *[94, 80, 87]*。

§1.1.2 三角函子

本小节回顾三角函子的概念以及基本结论。

设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 均为三角范畴。从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的**三角函子**（或**正合函子**）是指二元组 $(F,\ \alpha)$，其中 $F:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ 为加法函子，$\alpha: FT\longrightarrow TF$ 为函子的自然同构，且满足：对于 $\mathcal{C}$ 中任一正合三角 $(X,\ Y,\ Z,\ u,\ v,\ w)$，($\mathcal{D}$ 中）三角 $(F(X),\ F(Y),\ F(Z),\ F(u),\ F(v),\ \alpha(X)\circ F(w))$ 正合。在不指明 α 的情况下，也简称 F 为三角函子。特别地，我们称 F 为**严格三角函子**，若相应的自然同构 α 是等同变换。

例 1.1.5 *重复利用公理 (TR2)，我们有：平移函子 $T:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}$ 为三角函子，其相应的自然同构为 $-\mathrm{Id}_{T^2}$；而 $T^2:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}$ 也为三角函子，其相应的自然同构则为 Id_{T^3}，因此 T^2 是严格三角函子。另外，恒等函子 $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ 也是严格三角函子。*

设 $(F,\ \alpha)$ 和 $(F',\ \alpha')$ 为从三角范畴 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的两个三角函子。三角函子间的**自然同态**（或**自然变换**）是指函子间的自然同态 $\theta: F\longrightarrow F'$ 使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} FT(X) & \xrightarrow{\theta(T(X))} & F'T(X) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha(X)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha'(X)} \\ TF(X) & \xrightarrow{T(\theta(X))} & TF'(X) \end{array}$$

其中 $X\in\mathcal{C}$。设 $(G,\ \gamma)$ 为从 $\mathcal{D}$ 到三角范畴 $\mathcal{B}$ 的三角函子。则 (F,α) 和 (G,γ) 的**复合**定义为二元组 $(GF,\gamma F\circ G\alpha)$。容易验证，该复合确是三角函子。

有以下的基本结论。

命题 1.1.6 ([65], 6.7; [90], 引理 5.3.6) *设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 均为三角范畴。设 $(F,\ G,\ \varepsilon,\ \eta)$ 为其上的伴随函子 (参见 [79], 第 IV 章)。设 (F,α) 为正合函子。则存在自然同构 $\beta: GT\longrightarrow TG$ 使得 $(G,\ \beta)$ 为三角函子，且 $\varepsilon:\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}\longrightarrow GF$ 和 $\eta: FG\longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ 均为三角函子间的自然同态。*

注记 1.1.7 *事实上，我们可选择自然同构 β 使得*

$$\beta^{-1}(D)=GT\eta(D)\circ G\alpha G(D)\circ\varepsilon TG(D)$$

成立，其中 $D\in\mathcal{D}$。一个自然的问题就是：满足命题的 β 是否唯一？

三角范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 称为**三角等价的**，如果存在三角函子 $(F,\ \alpha): \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ 和 $(G,\ \beta): \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ 使得存在三角函子的自然同构 $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \simeq GF$ 和 $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \simeq FG$。

作为命题 1.1.6 的直接推论，如下结论是十分有用的。

推论 1.1.8 ([49]，第 4 页) *三角范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是三角等价的当且仅当存在三角函子 $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ 使得 F 是范畴间的等价。*

§1.2 正合范畴

本节回顾正合范畴 [97] 和 Frobenius 范畴 [55] 的定义，并介绍 Heller-Happel 定理。

§1.2.1 正合范畴

设 $\mathcal{A}$ 是加法范畴。范畴 $\mathcal{A}$ 中的**正合对** (exact pair) 是指可合成的态射对 $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{d} Z$ 使得 i 是 d 的核且 d 是 i 的余核。记该正合对为 $(i,\ d)$。正合对 $(i,\ d)$ 和 $(i',\ d')$ 称为**同构的**若存在如下交换图，其中列映射均为同构态射

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d] & Y \arrow[r, "d"] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\ X' \arrow[r, "i'"] & Y' \arrow[r, "d'"] & Z'. \end{tikzcd}$$

类似地，可定义正合对间的**态射**。正合对 $(i,\ d)$ 称为**可裂的**，若它同构于典范正合对 $X \xrightarrow{\binom{1}{0}} X \oplus Z \xrightarrow{(0\ 1)} Z$。注意到，$(i,\ d)$ 可裂等价于态射 i 为 section，也等价于，态射 d 为 retraction。

正合范畴是指二元组 $(\mathcal{A},\ \mathcal{E})$，其中 $\mathcal{A}$ 为加法范畴，$\mathcal{E}$ 为由 $\mathcal{A}$ 中某些正合对组成的类。称类 $\mathcal{E}$ 中的对 $(i,\ d)$ 为 conflation，相应的 i 为 inflation，d 为 deflation。要求类 $\mathcal{E}$ 满足以下公理：

(Ex0) 类 $\mathcal{E}$ 在同构下封闭；态射 Id_0 为 deflation。

(Ex1) deflation 的复合仍是 deflation。

(Ex1)$^{\mathrm{op}}$ inflation 的复合仍是 inflation。

(Ex2) 对于任意给定的态射 $f: Z' \longrightarrow Z$ 和 deflation $d: Y \longrightarrow Z$，存在如下的拉回图 (pullback diagram = cartesian diagram)

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, dotted, "d'"] \arrow[d, dotted, "f'"] & Z' \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "d"] & Z, \end{tikzcd}$$

其中 d' 是 deflation。

(Ex2)$^{\mathrm{op}}$ 对于任意给定的态射 $f: X \longrightarrow X'$ 和 inflation $i: Z \longrightarrow Y$，存在如下的推出图 (pushout diagram = cocartesian diagram)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[d, dotted, "f'"] \\ X' \arrow[r, dotted, "i'"] & Z', \end{tikzcd}$$

其中 i' 为 inflation。

注记 1.2.1 *(1)* 文 *[64]*, 附录 *A* 证明了这里的定义与 *[97]*, 第 *91* 页中的定义是一样的，并指出了公理 *(Ex1)*$^{\mathrm{op}}$ 可由其他公理导出。另外注意到，这里的正合范畴和文献 *[83, 57]* 中的正合范畴是显然不同的。值得一提的是，文 *[36]*, 附录指出了该定义与 *[43]*, 第九章中的正合范畴的定义之间的关系。注意文 *[102]*, 第 *59* 页中的正合范畴可视为该定义的特殊情况。

(2) 由 $(Ex0)$ 易知 *inflation* 和 *deflation* 均在同构下不变。另外，*deflation* 的核就是 *inflation*; 反之，*inflation* 的余核就是 *deflation*。特别地，由 $(Ex0)$ 可知态射 Id_0 也是 *inflation*。

(3) 设 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 为正合范畴。我们称 $\mathcal{E}$ 为范畴 $\mathcal{A}$ 的**正合结构**。在 $\mathcal{E}$ 是自明的情况下，简称 $\mathcal{A}$ 为正合范畴。

例 1.2.2 *(1)* 设 $\mathcal{A}$ 为任意加法范畴。取 $\mathcal{E}$ 为可裂正合对的全体。则易验证 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 为正合范畴。

(2) 设 $\mathcal{B}$ 为 *Abel* 范畴，设 $\mathcal{A}$ 为其扩张闭的满子范畴。取 $\mathcal{E}$ 为每项均落在 $\mathcal{A}$ 中的正合对 (即，$\mathcal{B}$ 中的短正合列) 的全体。则 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 为正合范畴。

(3) 设 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 为正合范畴。不难证明：$\mathcal{A}$ 是 *Abel* 范畴且 $\mathcal{E}$ 是由其短正合列

诱导的 *(参见 (2))*，当且仅当 $\mathcal{A}$ 中任一态射 f 均有分解 $f = i \circ d$，使得 i 为 *inflation*，d 为 *deflation*。

设 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 为正合范畴。满子加法范畴 $\mathcal{B}$ 称为**正合子范畴**，如果 $\mathcal{B}$ 是对扩张封闭的，即，对于任意 conflation $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$，若 $X, Z \in \mathcal{B}$，则 $Y \in \mathcal{B}$。易验证，$\mathcal{B}$ 继承了 $\mathcal{A}$ 的正合结构成为正合范畴。两正合范畴间的加法函子 $F: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ 称为**正合函子**，如果 F 保持 conflation。例如，若 $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{A}$ 的正合子范畴，则嵌入函子 $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A}$ 是正合函子。

我们需要下面的命题。

命题 1.2.3 ([64], 第 406 页) 设 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 为如上定义的正合范畴。考虑公理 $(Ex2)$ 中的拉回图。则 $Y' \xrightarrow{\binom{-d'}{f'}} Z' \oplus Y \xrightarrow{(f\ d)} Z$ 为 *conflation*。特别地，*deflation* 在左边加个分量还是 *deflation*。对于 $(Ex2)^{\mathrm{op}}$ 和 *inflation* 有相应的结果。

§1.2.2　稳定范畴

设 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 为正合范畴。称 $I \in \mathcal{A}$ 为**内射对象**（或**相对内射对象**，亦或 $\mathcal{E}$-**内射对象**），若任何以 I 开始的 conflation 均分裂。该定义等价与以下两个条件中的任何一个：

(1)　函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, I)$ 作用在任一 conflation 上正合；

(2)　对于任一 inflation $i : X \longrightarrow Y$ 和任何态射 $f : X \longrightarrow I$，存在态射 $f' : Y \longrightarrow I$ 使得 $f = f' \circ i$。

称范畴 $\mathcal{A}$**有足够多的内射对象**，如果其任何对象 X 均存在 inflation $i : X \longrightarrow I$，其中 I 为内射对象。对偶地，可定义**投射对象**以及**有足够多的投射对象**的概念。

考虑 $\mathcal{A}$ 的**稳定范畴**$\underline{\mathcal{A}}$(参考 [8], 第 101 页): 其对象和 $\mathcal{A}$ 中的对象一样；态射空间定义为

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{A}}}(X, Y) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)/I(X, Y)$$

其中 $I(X, Y) = \{f : X \longrightarrow Y \mid f$ 经某个内射对象分解$\}$；态射的合成是由 $\mathcal{A}$ 中的态射合成自然诱导的。不难验证，$\underline{\mathcal{A}}$ 是加法范畴，且典范函子 $\pi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \longrightarrow \underline{\mathcal{A}}$ 为加法函子。为方便起见，记 $\pi_{\mathcal{A}}(f) = \underline{f}$。

下面的命题是众所周知的，但证明却未必。

命题 1.2.4 设 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 为具有足够多内射对象的正合范畴。沿用以上的记号。设 $X, Y \in \mathcal{A}$。则 $\pi_{\mathcal{A}}(X) \simeq \pi_{\mathcal{A}}(Y)$ 当且仅当存在同构 $X \oplus I \simeq Y \oplus J$，其中 I, J 为内射对象。另外，若 $\mathcal{A}$ 具有任意（由指标集给出的）上积，则范畴 $\underline{\mathcal{A}}$ 也具有任意上积且函子 $\pi_{\mathcal{A}}$ 保持上积。

证. 首先，注意到 $\pi_{\mathcal{A}}(J) \simeq 0$ 当且仅当 J 为内射对象。事实上，$\pi_{\mathcal{A}}(J) \simeq 0$ 当且仅当 $\mathrm{Id}_J \in I(J, J)$。取 $i : J \longrightarrow I_0$ 为 inflation，其中 I_0 为内射对象。则易知 $I(J, J) = \{f : J \longrightarrow J \mid f \text{ 经由 } i \text{ 分解}\}$。于是，存在 $s : I_0 \longrightarrow J$ 使得 $s \circ i = \mathrm{Id}_J$。不难证明，$I_0 \simeq C \oplus J$，其中 C 为 i 的余核。故，J 为内射对象的直和项，进而 J 本身也是内射的。

设 $\pi_{\mathcal{A}}(X) \simeq \pi_{\mathcal{A}}(Y)$，且设 $\underline{f} : X \longrightarrow Y$ 和 $\underline{g} : Y \longrightarrow X$ 为互逆态射。则 $\mathrm{Id}_X - g \circ f \in I(X, X)$。取 inflation $a : X \longrightarrow I$，其中 I 内射。则存在态射 $b : I \longrightarrow X$ 使得 $\mathrm{Id}_X = g \circ f + b \circ a = (g\ b) \circ \binom{f}{a}$。根据命题 1.2.3，态射 $\binom{f}{a} : X \to Y \oplus I$ 为 inflation，特别地，它的余核总存在，记为 J。不难证明，存在同构 $\xi : Y \oplus I \simeq X \oplus J$ 使得 $\xi \circ \binom{f}{a} = \binom{\mathrm{Id}_X}{0}$。注意到，$\pi_{\mathcal{A}}(\xi)$ 与 $\pi_{\mathcal{A}}(\binom{f}{a})$ 均为同构，于是 $\pi_{\mathcal{A}}(\binom{\mathrm{Id}_X}{0})$ 也为同构。而 $\pi_{\mathcal{A}}(J)$ 为态射 $\pi_{\mathcal{A}}(\binom{\mathrm{Id}_X}{0})$ 的余核，因此 $\pi_{\mathcal{A}}(J) \simeq 0$。于是，由上知 J 为内射对象，这就证明了第一个结论。后一个结论的证明是直接的验证（只需注意到：内射对象的上积仍是内射的）。 ■

回顾 suspension 函子的构造，参见 [55]。设 $\mathcal{A}$ 为具有足够多内射对象的正合范畴。对于任意 X，取定 conflation $X \xrightarrow{i_X} I(X) \xrightarrow{\pi_X} S(X)$，其中 $I(X)$ 为内射对象。对于任意态射 $f : X \longrightarrow Y$，有如下的交换图

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "f"] & I(X) \arrow[r, "\pi_X"] \arrow[d, dotted] & S(X) \arrow[d, "S(f)"] \\
Y \arrow[r, "i_Y"] & I(Y) \arrow[r, "\pi_Y"] & S(Y)
\end{tikzcd}$$

注意到，态射 $S(f)$ 不一定唯一，但稳定范畴中的态射 $\pi_{\mathcal{A}}(S(f)) = \underline{S(f)}$ 确是由 f 唯一决定的。这样，我们就定义了**suspension 函子** $S : \underline{\mathcal{A}} \longrightarrow \underline{\mathcal{A}}$。不难证明，$S$ 是加法函子。

§1.2.3 Frobenius 范畴与 Heller-Happel 定理

正合范畴 $(\mathcal{A},\ \mathcal{E})$ 称为**Frobenius 范畴** ([55]，第 386 页)，如果它有足够多的内射对象，有足够多的投射对象且内射对象的全体和投射对象的全体是一致的。

有如下的基本观察。

引理 1.2.5 设 $\mathcal{A}$ 为 *Frobenius* 范畴。则 *suspension* 函子 $S : \underline{\mathcal{A}} \longrightarrow \underline{\mathcal{A}}$ 是范畴自等价。

我们总假设有下面的结论（参见 [55]，第 387 页；[48]，第 370 页或 [49]，第 13 页）

假定 1.2.6 设 $\mathcal{A}$ 为 *Frobenius* 范畴。则 *suspension* 函子是自同构函子。

我们将在范畴 $\underline{\mathcal{A}}$ 中定义一类标准三角。设 $u : X \longrightarrow Y$ 为 $\mathcal{A}$ 中的任意态射。考虑下推出图（参见公理 $(\mathrm{Ex2})^{\mathrm{op}}$）

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "u"] & I(X) \arrow[r, "\pi_X"] \arrow[d, dotted] & S(X) \arrow[d, equal] \\
Y \arrow[r, dotted, "v"] & C(u) \arrow[r, dotted, "w"] & S(X)
\end{tikzcd}$$

称三角 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} C(u) \xrightarrow{w} S(X)$ 为**标准三角**。定义 $\mathcal{T}$ 为由 $\underline{\mathcal{A}}$ 中所有同构于标准三角的三角组成的类。

下面的定理独立地属于 A. Heller 和 D. Happel，它在三角范畴的理论中是最基本的定理之一。

定理 1.2.7 （Heller-Happel，参考 [56]，定理 9.2 以及 [48]，定理 9.4）设 $\mathcal{A}$ 为 *Frobenius* 范畴。沿用以上记号。则 $(\underline{\mathcal{A}},\ S,\ \mathcal{T})$ 为三角范畴。

注记 1.2.8 注意到范畴 $\mathcal{A}$ 中的 *conflation* 能诱导 $\underline{\mathcal{A}}$ 中的正合三角。设 $X \xrightarrow{i}$

$Y \xrightarrow{d} Z$ 为 *conflation*。则有交换图

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{d} & Z \\ \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle w} \\ X & \xrightarrow{i_X} & I(X) & \xrightarrow{\pi_X} & S(X). \end{array}$$

于是，三角 $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{d} Z \xrightarrow{-w} S(X)$ 正合。注意这里的负号并比较公理 *(TR2)* 中出现的负号。不难看出，$\underline{\mathcal{A}}$ 中任意正合三角均可这样得到。参见 *[103]*，第 *65-67* 页。

回顾 ∂ - 函子的概念，参见 [65]，第 381 页。设 $(\mathcal{A},\ \mathcal{E})$ 为正合范畴，$(\mathcal{C},\ T,\ \mathcal{T})$ 为三角范畴。加法函子 $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ 称为∂ - **函子**，如果对于 $\mathcal{A}$ 中的任意 conflation $(i,\ d)$，均存在正合三角 $F(X) \xrightarrow{F(i)} F(Y) \xrightarrow{F(d)} F(Z) \xrightarrow{w_{(i,d)}} TF(X)$，其中态射 $w_{(i,\ d)}$ 是由 conflation $(i,\ d)$ 决定的且满足：对于任意给定 conflation 间的态射

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{d} & Z \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ X' & \xrightarrow{i'} & Y' & \xrightarrow{d'} & Z', \end{array}$$

有如下的三角态射

$$\begin{array}{ccccccc} F(X) & \xrightarrow{F(i)} & F(Y) & \xrightarrow{F(d)} & F(Z) & \xrightarrow{w_{(i,\ d)}} & TF(X) \\ \downarrow{\scriptstyle F(f)} & & \downarrow{\scriptstyle F(g)} & & \downarrow{\scriptstyle F(h)} & & \downarrow{\scriptstyle TF(f)} \\ F(X') & \xrightarrow{F(i')} & F(Y') & \xrightarrow{F(d')} & F(Z') & \xrightarrow{w_{(i',\ d')}} & TF(X'). \end{array}$$

注意到注记 1.2.8，我们很容易得到

命题 1.2.9 设 $\mathcal{A}$ 为 *Frobenius* 范畴，$\mathcal{C}$ 为三角范畴。设 $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ 为 ∂ - 函子。假设 F 将内射对象映到 0。则 F 唯一诱导了三角函子 $(\underline{F}, \eta): \underline{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{C}$，其中 $\eta(X) = w_{(i_X,\ \pi_X)}$，$X \in \underline{\mathcal{A}}$。

推论 1.2.10 ([49]，第 23 页) 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}'$ 均为 *Frobenius* 范畴。设 $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ 为正合函子且将内射对象映到内射对象。则由 F 唯一诱导的函子 $\underline{F}: \underline{\mathcal{A}} \longrightarrow \underline{\mathcal{A}'}$ 是三角函子。

证. 只需注意到合成函子 $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{A}' \xrightarrow{\pi_{\mathcal{A}'}} \underline{\mathcal{A}'}$ 是 ∂- 函子且将内射对象映到 0。■

§1.3　三角范畴的局部化

本节先回顾范畴局部化的一般理论，进而讨论三角范畴的局部化、三角子范畴的定义以及相关结论。

§1.3.1　范畴的局部化

设 $\mathfrak{a}$ 为任意范畴。设 Σ 为由 $\mathfrak{a}$ 中某些态射组成的类。以下将 Σ 中的态射画为双线。称 Σ 为**右乘法系**，如果以下公理得到满足：

(FR1)　Σ 对于态射的合成是封闭的；$\mathrm{Id}_X \in \Sigma,\ \forall X \in \mathfrak{a}$。

(FR2)　$\mathfrak{a}$ 中每个图

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[d, Rightarrow, "s"] \\ \cdot \arrow[r] & \cdot \end{tikzcd}$$

其中 $s \in \Sigma$，均可补足成交换图

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, dotted] \arrow[d, Rightarrow, dotted, "t"'] & \cdot \arrow[d, Rightarrow, "s"] \\ \cdot \arrow[r] & \cdot \end{tikzcd}$$

其中 $t \in \Sigma$。

(FR3)　任给 $\mathfrak{a}$ 中的交换图

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[d, bend right, "f"'] \arrow[d, bend left, "g"] \\ \cdot \arrow[d, Rightarrow, "s"] \\ \cdot \end{tikzcd}$$

即 $s\circ f=s\circ g$，其中 $s\in\Sigma$，均存在 $t\in\Sigma$ 使得下图交换

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[d, Rightarrow, dashed, "t"] \\ \cdot \arrow[d, bend right, "f"'] \arrow[d, bend left, "g"] \\ \cdot \end{tikzcd}$$

即 $f\circ t=g\circ t$。简称"有下而上"。

设 Σ 为范畴 $\mathfrak{a}$ 的右乘法系。设 $X, Y\in\mathfrak{a}$。则从 X 到 Y 的**右分式** $(b,\ s)$ 定义为态射图

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dl, Rightarrow, "s"'] \arrow[dr, "b"] & \\ X\cdot & & \cdot Y, \end{tikzcd}$$

其中 $s\in\Sigma$。有的文献称之为**屋顶**(roof)，参见 [44]，第 90 页或 [82]，第 5 页。两个从 X 到 Y 的右分式 $(a,\ r)$ 和 $(b,\ s)$ 称为**等价的**，记为 $(a,\ r)\sim(b,\ s)$，如果存在如下的交换图

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dl, Rightarrow, "r"'] \arrow[dr, "a"] & \\ X\cdot & \cdot \arrow[l, Rightarrow, dashed, "t"'] \arrow[r, dashed] \arrow[u, dashed] \arrow[d, dashed] & \cdot Y \\ & \cdot \arrow[ul, Rightarrow, "s"] \arrow[ur, "b"'] & \end{tikzcd}$$

其中 $t\in\Sigma$。可以证明关系 $\sim$ 是由从 X 到 Y 的右分式组成的类上的等价关系（参见 [90]，引理 2.1.14）。设 $(b,\ s)$ 为右分式。记 b/s 为其所在的等价类，即，$b/s:=\{(a,\ r)\mid(a,\ r)$ 等价于$(b,\ s)\}$。

定义右分式等价类间的**合成**如下：设 a/r 是 X 到 Y 的右分式等价类，b/s 是 Y 到 Z 的右分式等价类。由 (FR2) 有交换图

$$\begin{tikzcd} & & \cdot \arrow[dl, Rightarrow, dashed, "t"'] \arrow[dr, dashed, "c"] & & \\ & \cdot \arrow[dl, Rightarrow, "r"'] \arrow[dr, "a"] & & \cdot \arrow[dl, Rightarrow, "s"'] \arrow[dr, "b"] & \\ X\cdot & & Y\cdot & & \cdot Z \end{tikzcd}$$

定义合成

$$(b/s)\circ(a/r):=(b\circ c)/(r\circ t).$$

这个定义是合理的，即合成不依赖于代表元的选取以及上交换图的选取（参见 [90]，引理 2.1.18）。另外，这样定义的合成满足结合率。

我们总承认下面的条件（参见 [112]，定理 10.3.7 或 [90]，第 2.2 节）

假定 1.3.1 设任意 $X, Y \in \mathfrak{a}$。则从 X 到 Y 的右分式等价类的全体形成集合。

设 Σ 为范畴 $\mathfrak{a}$ 的右乘法系。定义**右局部化范畴**$\mathfrak{a}[\Sigma^{-1}]$ 如下：其对象和范畴 $\mathfrak{a}$ 中的是一样的；态射空间定义为

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{a}[\Sigma^{-1}]}(X, Y) := \{b/s \mid b/s \text{ 是从 } X \text{ 到 } Y \text{ 的右分式等价类}\};$$

态射的合成如上定义。

定义商函子 $Q : \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{a}[\Sigma^{-1}]$ 使得 $Q(X) = X$ 且 $Q(f) = f/\mathrm{Id}_X$，$f : X \longrightarrow Y$。注意到若 $s : X \longrightarrow Y \in \Sigma$，则态射 $Q(s)$ 可逆且其逆由 Id_X/s 给出。

关于范畴局部化，我们有如下的基本结论。

命题 1.3.2 设 Σ 为范畴 $\mathfrak{a}$ 上的右乘法系。记 Q 为相应的商函子。则 Q 将 Σ 中的态射均映成同构态射。设 $F : \mathfrak{a} \longrightarrow \mathcal{C}$ 为任一函子使得 $F(s)$ 均可逆，$s \in \Sigma$。则存在唯一的函子 $F' : \mathfrak{a}[\Sigma^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}$ 使得 $F = F'Q$。

注记 1.3.3 *(1)* 这里定义的右分式在 *[112]*，第 *381* 页被称为左分式。我们的叫法与文 *[67]*，第 *9* 节中的是一致的。
(2) 可以对偶地定义**左乘法系**、**左分式**以及**左局部化范畴**$[\Sigma^{-1}]\mathfrak{a}$。通常，我们将左分式的等价类记成 $s\backslash b$，其中 $s \in \Sigma$。若 Σ 既是右乘法系又是左乘法系，则称 Σ 为**乘法系**。此时，利用命题 *1.3.2* 以及它的对偶，易证，有范畴的典范同构 $\mathfrak{a}[\Sigma^{-1}] \simeq [\Sigma^{-1}]\mathfrak{a}$。

下面的事实可直接验证。

引理 1.3.4 设 Σ 为范畴 $\mathfrak{a}$ 上的乘法系。设 $f, g : X \longrightarrow Y$ 为 $\mathfrak{a}$ 中的态射。则有
(1) $Q(f) = Q(g)$ 当且仅当存在 Σ 中某个态射 s 使得 $f \circ s = g \circ s$，当且仅当存在 Σ 中某个态射 t 使得 $t \circ f = t \circ g$。
(2) $Q(f)$ 可逆当且仅当存在 $\mathfrak{a}$ 中态射 h 和 h' 使得 $f \circ h \in \Sigma$ 且 $h' \circ f \in \Sigma$。

我们称乘法系 Σ 是**饱和的**，如果对于 $\mathfrak{a}$ 中任一态射 f，只要存在态射 h 和 h' 使得 $f\circ h$, $h'\circ f\in\Sigma$，则有 $f\in\Sigma$。故，由引理 1.3.4(2) 知，若 Σ 为饱和乘法系，则 $Q(f)$ 可逆当且仅当 $f\in\Sigma$。

设 $\mathfrak{a}$ 为预加法范畴。则局部化范畴 $\mathfrak{a}[\Sigma^{-1}]$ 自然成为预加法范畴且商函子 Q 是加法函子。注意到对于从 X 到 Y 的右分式等价类 a/r 和 b/s，总存在公分母 $t\in\Sigma$ 使得 $a/r=a'/t$ 且 $b/s=b'/t$。事实上，由 (FR2) 有交换图

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, dotted, "s'"] \arrow[d, dotted, "r'"'] & \cdot \arrow[d, Rightarrow, "r"] \\
\cdot \arrow[r, Rightarrow, "s"] & \cdot X
\end{tikzcd}$$

令 $t=r\circ s'=s\circ r'$, $a'=s'\circ a$, $b'=r'\circ b$ 即可。这样在 $\mathfrak{a}[\Sigma^{-1}]$ 可定义态射加法

$$a/r+b/s:=(a'+b')/t.$$

事实上，若 $\mathfrak{a}$ 为加法范畴，则 $\mathfrak{a}[\Sigma^{-1}]$ 也是加法范畴（参见 [90]，引理 2.1.30）。

下面的结果似乎是新的（比较 [20]，引理 1.5）。

引理 1.3.5 设 $\mathfrak{a}$ 为具有任意上积的加法范畴。设 Σ 为对上积封闭的右乘法系。则局部化范畴 $\mathfrak{a}[\Sigma^{-1}]$ 有任意上积且商函子 Q 保持上积。

证. 设 $X_i\in\mathfrak{a}$, $i\in I$，其中 I 为指标集。记 $\sigma_i: X_i\longrightarrow\bigoplus_{i\in I}X_i$ 为典范态射。我们只需证明 $Q(\sigma_i)$ 给出了 X_i 在范畴 $\mathfrak{a}[\Sigma^{-1}]$ 中的上积。

设 $Y\in\mathfrak{a}$。给定任意从 X 到 Y 的态射 b_i/s_i，其中 $s_i: Z_i\longrightarrow X_i\in\Sigma$，$i\in I$。取 $s=\bigoplus_{i\in I}s_i$。根据题设，$s\in\Sigma$。由上积的泛性质，可知唯一存在态射 $b:\bigoplus_{i\in I}Z_i\longrightarrow Y$ 使得 $b\circ\delta_i=b_i$，其中 $\delta_i: Z_i\longrightarrow\bigoplus_{i\in I}Z_i$ 为典范映射。这样，我们就得到了从 $\bigoplus_{i\in I}X_i$ 到 Y 的态射 b/s，且易知 $b/s\circ Q(\sigma_i)=b_i/s_i$。另一方面，设 b/s 是从 $\bigoplus_{i\in I}X_i$ 到 Y 的态射。若 $b/s\circ Q(\sigma_i)=0$，$i\in I$，需证 $b/s=0$。这样我们就完成了引理的证明。

事实上，设 $s: Z\longrightarrow\bigoplus_{i\in I}X_i\in\Sigma$，则 $b: Z\longrightarrow Y$。由 (FR2) 有交换图

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[r, "\sigma_i"] & \bigoplus_{i\in I}X_i \\
Y_i \arrow[u, dotted, "s_i"] \arrow[r, dotted, "a_i"] & Z \arrow[u, Rightarrow, "s"']
\end{tikzcd}$$

其中 $s_i \in \Sigma$。故 $b/s \circ Q(\sigma_i) = (b \circ a_i)/s_i$。因此 $Q(b \circ a_i) = 0$，进而由引理 1.3.4(1) 存在 Σ 中的态射 $u_i : Z_i \longrightarrow Y_i$ 使得 $b \circ a_i \circ u_i = 0$。考虑映射 $v : \bigoplus_{i \in I} Z_i \longrightarrow Z$ 使得 $v \circ \delta_i = a_i \circ u_i$，其中 δ_i 为如上的典范态射。则易知 $s \circ v = \bigoplus_{i \in I}(s_i \circ u_i)$ 且 $b \circ v = 0$。注意到 u_i 和 s_i 均在 Σ 中，故由题设知 $s \circ v = \bigoplus_{i \in I}(u_i \circ s_i) \in \Sigma$。由于 $s, s \circ v$ 均在 Σ 中，我们不难得出 $Q(v)$ 可逆，进而由 $b \circ v = 0$ 可知 $Q(b) = 0$，于是 $b/s = 0$。证毕！ ■

设 Σ 为范畴 $\mathfrak{a}$ 上的右乘法系。设 $\mathfrak{b}$ 为 $\mathfrak{a}$ 的满子范畴。称 $\mathfrak{b}$**关于** Σ **左 cofinal**，如果对于 Σ 中的任意态射 $s : X' \longrightarrow X$ 使得 $X \in \mathfrak{b}$，均存在态射 $t : X'' \longrightarrow X'$ 使得 $s \circ t \in \Sigma$ 且 $X'' \in \mathfrak{b}$。

如下结论的证明是直接的。

引理 1.3.6 ([67]，引理 9.1; [112]，引理 10.3.13(2)) *设 Σ 为范畴 $\mathfrak{a}$ 上的右乘法系。设 $\mathfrak{b}$ 是关于 Σ 左 cofinal 的满子范畴。则 $\Sigma \cap \mathfrak{b}$ 为 $\mathfrak{b}$ 上的右乘法系，且典范函子 $\mathfrak{b}[(\Sigma \cap \mathfrak{b})^{-1}] \longrightarrow \mathfrak{a}[\Sigma^{-1}]$ 是满嵌入。*

§1.3.2　三角范畴的局部化

设 $(\mathcal{C}, T, \mathcal{T})$ 为三角范畴。设 Σ 为其上的乘法系。称 Σ 是 (关于给定三角结构的)**相容乘法系**，如果满足以下条件：

(FR4)　态射 $s \in \Sigma$ 当且仅当 $T(s) \in \Sigma$。

(FR5)　设下图中两行均为正合三角，$f, g \in \Sigma$，且左边方块交换

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dotted, "h"] & T(X) \arrow[d, "T(f)"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & T(X') \end{tikzcd}$$

则存在 $h \in \Sigma$ 使得整个图交换。

设 Σ 为三角范畴 $\mathcal{C}$ 上的相容乘法系。则由 (FR4) 以及命题 1.3.2，在局部化范畴 $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ 上唯一存在自同构，也记成 T，满足 $TQ = QT$，其中 Q 为商函子。

我们有以下的基本定理。

定理 1.3.7 设 Σ 为三角范畴 $(\mathcal{C},\ T,\ \mathcal{T})$ 上的相容乘法系。定义 $\mathcal{T}'$ 为 $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ 中同构于 $(Q(X),\ Q(Y),\ Q(Z),\ Q(u),\ Q(v),\ Q(w))$ 的三角的全体，其中三角 $(X,\ Y,\ Z,\ u,\ v,\ w)\in\mathcal{T}$。则 $(\mathcal{C}[\Sigma^{-1}],\ T,\ \mathcal{T}')$ 为三角范畴且商函子 Q 为严格三角函子。

设 $(F,\alpha):\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ 为三角函子使得 $F(\Sigma)$ 可逆。则唯一存在三角函子 $(F',\alpha'):\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]\longrightarrow\mathcal{D}$ 使得 $(F',\alpha')\,Q=(F,\alpha)$。

证. 由命题 1.3.2, 只需证该定理的前一部分。又由注记 1.1.4, 只需验证 (TR1), (TR2), (TR3) 以及 (TR4')。注意到 (TR1), (TR2) 以及 (TR4') 是显然的。(TR3) 的验证可参见 [90], 第 97-99 页。 ■

设 $\mathcal{N}$ 为三角范畴 $\mathcal{C}$ 的满子范畴. 总将 $\mathcal{N}$ 等同于其相应的**严格子范畴**, 即, 认为 $\mathcal{N}$ 包含所有与 $\mathcal{N}$ 中某个对象同构的那些对象。称 $\mathcal{N}$ 为**三角子范畴**, 如果满足下列条件:

(TS1) $X\in\mathcal{N}$ 当且仅当 $T(X)\in\mathcal{N}$。

(TS2) 对于任何正合三角 $X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\xrightarrow{w}T(X)$, 若 $X,Z\in\mathcal{N}$, 则 $Y\in\mathcal{N}$。

设 $\mathcal{N}$ 为三角子范畴。定义

$$\Sigma(\mathcal{N}):=\{\ \text{态射}s\mid\text{存在正合三角}X\xrightarrow{s}Y\longrightarrow N\longrightarrow T(X)\ \text{使得}N\in\mathcal{N}\ \}.$$

可验证 $\Sigma(\mathcal{N})$ 是相容乘法系。(这里我们需用 (TR4) 以及 [57], 第 XI 章命题 5.6。)

定义**Verdier 商 (三角) 范畴** [110]

$$\mathcal{C}/\mathcal{N}:=\mathcal{C}[\Sigma(\mathcal{N})^{-1}].$$

下结论只是定理 1.3.7 的重新表述。

定理 1.3.8 设 $\mathcal{N}$ 为三角范畴 $(\mathcal{C},\ T,\ \mathcal{T})$ 的三角子范畴。记 $Q:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}/\mathcal{N}$ 为商函子。定义 $\mathcal{T}'$ 为 $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ 中同构于 $(Q(X),\ Q(Y),\ Q(Z),\ Q(u),\ Q(v),\ Q(w))$ 的三角的全体，其中 $(X,\ Y,\ Z,\ u,\ v,\ w)\in\mathcal{T}$。则 $(\mathcal{C}/\mathcal{N},\ T,\ \mathcal{T}')$ 为三角范畴且典范函子 Q 为严格三角函子。

设 $(F,\alpha):\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ 为三角函子使得 $F(\mathcal{N})=0$。则唯一存在三角函子 $(F',\alpha'):\mathcal{C}/\mathcal{N}\longrightarrow D$ 使得 $(F',\alpha')Q=(F,\alpha)$。

三角子范畴 $\mathcal{N}$ 称为**有厚度的** (épaisse, thick)，如果下条件得到满足：
(TS3) 对于任意正合三角 $X\xrightarrow{u}Y\longrightarrow Z\longrightarrow T(X)$，使得 $Z\in\mathcal{N}$ 且 u 能经由 $\mathcal{N}$ 中对象分解，则 $X,Y\in\mathcal{N}$。

定理 1.3.9 ([44], 第 5 章，定理 1.10.2 或 [45]) 设 $\mathcal{C}$ 为三角范畴。则有厚度子范畴的全体与饱和相容乘法系的全体有如下的一一对应：

$$\mathcal{N}\longmapsto\Sigma(\mathcal{N}),\quad \Sigma\longmapsto\mathcal{N}(\Sigma),$$

其中 $\mathcal{N}(\Sigma):=\{N\in\mathcal{C}\mid$ 存在正合三角$X\xrightarrow{u}Y\longrightarrow N\longrightarrow T(X)$ 使得$u\in\Sigma\}$。

下面的结论十分有用。

命题 1.3.10 ([100], 命题 1.3 或 [111]) 设 $\mathcal{N}$ 为 $\mathcal{C}$ 的三角子范畴。则 $\mathcal{N}$ 有厚度当且仅当 $\mathcal{N}$ 在直和项下封闭。

于是对于任意三角子范畴 $\mathcal{N}$，其加法闭包 (参照 [4], 第 9 页，第一段) $\mathrm{add}\mathcal{N}$ 为有厚度子范畴。注意到，有三角范畴的典范同构 $\mathcal{C}/\mathcal{N}\simeq\mathcal{C}/\mathrm{add}\mathcal{N}$。故而，在考虑 Verdier 商范畴 $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ 时，我们总可以假设 $\mathcal{N}$ 是有厚度的。

注记 1.3.11 设 $\mathcal{C}$ 为具有任意上积的三角范畴。则定理 *1.3.9* 中的对应诱导了如下的一一对应：对上积封闭的三角子范畴的全体与对上积封闭的饱和相容乘法系的全体。

这里注意到对无限上积封闭的三角子范畴总是有厚度的 (结合命题 *1.3.10* 与 *[90]*，命题 *1.6.8* 即可，亦可参见本文第四章引理 *4.2.1*)。这样，将这个观察与引理 *1.3.5* 结合起来，我们立即得到 *[20]*，引理 *1.5*。

回顾垂直子范畴的概念，参见 [110], 第 24 页。设 $\mathcal{C}$ 为三角范畴，$\mathcal{N}$ 为其三角子范畴。定义 $\mathcal{N}$ 的**右垂直范畴**为满子范畴 $\mathcal{N}^{\perp}:=\{X\in\mathcal{C}\mid\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{N},X)=0\}$。类似地，可定义**左垂直范畴** ${}^{\perp}\mathcal{N}$。由命题 1.1.3(2) 和命题 1.3.10，易知 $\mathcal{N}^{\perp}$ 和 ${}^{\perp}\mathcal{N}$ 均为有厚度的三角子范畴。

利用分式的定义，不难证明如下结论。

引理 1.3.12 沿用以上记号。记 $Q: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}/\mathcal{N}$ 为商函子。则有
(1) 若 $X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{N}^{\perp}$, 则函子 Q 诱导了同构 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{N}}(Q(X), Q(Y))$。
(2) 若 $X \in {}^{\perp}\mathcal{N}, Y \in \mathcal{C}$, 则函子 Q 诱导了同构 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{N}}(Q(X), Q(Y))$。
故，合成函子 $\mathcal{N}^{\perp} \hookrightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{Q} \mathcal{C}/\mathcal{N}$ 和 ${}^{\perp}\mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{Q} \mathcal{C}/\mathcal{N}$ 均为满嵌入。

§1.4 同伦范畴与导出范畴

本节我们将研究三角范畴的两个最重要的例子：同伦范畴与导出范畴，并介绍它们的一些基本性质。

§1.4.1 同伦范畴

设 $\mathfrak{a}$ 为加法范畴。记 $C(\mathfrak{a})$ 为 $\mathfrak{a}$ 的 (上链，cochain)**复形范畴**: 其对象记为 $X^{\bullet} = (X^n, d_X^n)$，其中 $d_X^n: X^n \longrightarrow X^{n+1}$ 为**微分态射** 满足 $d_X^{n+1} \circ d_X^n = 0$; 其态射为链复形映射 $f^{\bullet} = \{f^n\}: X^{\bullet} \longrightarrow Y^{\bullet}$ 满足 $d_Y^n \circ f^n = f^{n+1} \circ d_X^n$，$n \in \mathbb{Z}$。

定义**平移函子** $[1]: C(\mathfrak{a}) \longrightarrow C(\mathfrak{a})$ 如下: 复形 $X^{\bullet}[1]$ 是由 $(X^{\bullet}[1])^n = X^{n+1}$ 和 $d_{X[1]}^n = -d_X^{n+1}$ 决定的; 态射 $f^{\bullet}[1]$ 满足 $(f^{\bullet}[1])^n = f^{n+1}$。显然，$[1]$ 是复形范畴的自同构。设 $f^{\bullet}: X^{\bullet} \longrightarrow Y^{\bullet}$ 为复形间的态射。态射 $f^{\bullet}$ 的**映射锥**，记为 $\mathrm{Con}(f^{\bullet})$，定义为复形使之满足

$$(\mathrm{Con}(f^{\bullet}))^n = X^{n+1} \oplus Y^n \text{ 且微分映射为 } \quad d_{\mathrm{Con}(f^{\bullet})}^n = \begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix}.$$

复形范畴中的正合对 $X^{\bullet} \xrightarrow{i^{\bullet}} Y^{\bullet} \xrightarrow{p^{\bullet}} Z^{\bullet}$ 称为**链可裂的**, 如果对于任意 n, $X^n \xrightarrow{i^n} Y^n \xrightarrow{p^n} Z^n$ 为 $\mathfrak{a}$ 中的可裂正合对。例如：设 $f^{\bullet}: X^{\bullet} \longrightarrow Y^{\bullet}$ 为链映射，则如下关于 $f^{\bullet}$ 的**标准正合对**是链可裂的

$$Y^{\bullet} \xrightarrow{\binom{0}{1}} \mathrm{Con}(f^{\bullet}) \xrightarrow{(1\ 0)} X^{\bullet}[1].$$

注记 1.4.1 事实上，每个链可裂正合对都同构于某个标准正合对。设 $(i^\bullet,\ p^\bullet)$ 为链可裂正合对。在相差某个同构下，可设 $Y^n = Z^n \oplus X^n$ 且 $i^n = \binom{0}{1}$，$p^n = (1\ 0)$。则易知 $d_Y^n = \begin{pmatrix} d_Z^n & 0 \\ h^{n+1} & d_X^n \end{pmatrix}$，其中 $h^{n+1} : Z^n \longrightarrow X^{n+1}$ 使得 $d_X^{n+1} \circ h^{n+1} + h^{n+2} \circ d_Z^n = 0$。则 $h^\bullet : Z^\bullet[-1] \longrightarrow X^\bullet$ 是链映射，且正合对 $(i^\bullet,\ p^\bullet)$ 同构于关于 $h^\bullet$ 的标准正合对。这里的链映射 $h^\bullet$ 称为正合对 $(i^\bullet,\ p^\bullet)$ 的**同伦不变量**。参见 *[57]，第 19 页*。

有如下的基本结论。

命题 1.4.2 设 $\mathfrak{a}$ 为任意加法范畴，$C(\mathfrak{a})$ 为其复形范畴。定义 $\mathcal{E}$ 为链可裂正合对的全体。则 $(C(\mathfrak{a}),\ \mathcal{E})$ 为 *Frobenius* 范畴。

证. (比较 [66]，引理 2.2 的证明) 先证 $(C(\mathfrak{a}),\ \mathcal{E})$ 是正合范畴。注意到链映射 $f^\bullet$ 为 inflation (deflation) 当且仅当，对于任意 n，f^n 是可裂单 (可裂满)。故公理 (Ex0), (Ex1) 和 $(\mathrm{Ex1})^{\mathrm{op}}$ 易得。只需证 (Ex2)，其对偶类似可证。注意到由注记 1.4.1，每个 deflation 均为 $(1\ 0)$ 的形式。任给 $f^\bullet : Z'^\bullet \longrightarrow Z^\bullet$ 以及 deflation $(1\ 0) : Y^\bullet \longrightarrow Z^\bullet$，其中

$$Y^n = Z^n \oplus X^n \text{ 且微分映射为 } \begin{pmatrix} d_Z^n & 0 \\ h^{n+1} & d_X^n \end{pmatrix},$$

其中 $h^\bullet$ 为相应的同伦不变量。如下定义复形 $Y'^\bullet$:

$$Y'^n = Z'^n \oplus X^n \text{ 且微分映射为 } \begin{pmatrix} d'^n_Z & 0 \\ h^{n+1} \circ f^n & d_X^n \end{pmatrix}。$$

则如下的复形交换图即为 (Ex2) 中所求的拉回图

$$\begin{tikzcd} Y'^\bullet \arrow[r, dotted, "(1\ 0)"] \arrow[d, dotted, "\begin{pmatrix} f^\bullet & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix}"'] & Z'^\bullet \arrow[d, "f^\bullet"] \\ Y^\bullet \arrow[r, "(1\ 0)"] & Z^\bullet. \end{tikzcd}$$

(这里我们需用到以下事实：若对于任意 n, 下图为范畴 $\mathfrak{a}$ 中的拉回图

$$\begin{tikzcd} Y'^n \arrow[r, "(1\ 0)"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} f^n & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{X^n} \end{pmatrix}"'] & Z'^n \arrow[d, "f^n"] \\ Y^n \arrow[r, "(1\ 0)"] & Z^n, \end{tikzcd}$$

则相应的复形交换图也为拉回图。)

下证正合范畴 $C(\mathfrak{a})$ 为 Frobenius 范畴。设 $X^\bullet$，$Y^\bullet$ 为复形。则有下面的自然同构

$$\prod_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{a}}(X^{n+1}, Y^n) \simeq \mathrm{Hom}_{C(\mathfrak{a})}(\mathrm{Con}(\mathrm{Id}_X^\bullet), Y^\bullet) \tag{1.4.1}$$

$$\{a^n\}_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto f^\bullet$$

其中，$f^n = (a^n, d_Y^{n-1} \circ a^{n-1} + a^n \circ d_X^n)$，$n \in \mathbb{Z}$;

$$\prod_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{a}}(Y^n, X^n) \simeq \mathrm{Hom}_{C(\mathfrak{a})}(Y^\bullet, \mathrm{Con}(\mathrm{Id}_X^\bullet)) \tag{1.4.2}$$

$$\{b^n\}_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto g^\bullet$$

其中，$g^n = \begin{pmatrix} b^{n+1} \circ d_Y^n - d_X^n \circ b^n \\ b^n \end{pmatrix}$，$n \in \mathbb{Z}$。根据这两个同构，易知复形 $\mathrm{Con}(\mathrm{Id}_X^\bullet)$ 既是内射对象又是投射对象。再注意到有标准正合对

$$X^\bullet \xrightarrow{\binom{0}{1}} \mathrm{Con}(\mathrm{Id}_X^\bullet) \xrightarrow{(1\ 0)} X^\bullet[1].$$

这就说明了 $C(\mathfrak{a})$ 有足够多的投射 - 内射对象，且不难得出 $(C(\mathfrak{a}), \mathcal{E})$ 为 Frobenius 范畴。 ■

设 $(C(\mathfrak{a}), \mathcal{E})$ 如上。称其投射 - 内射对象为**contractible 复形**。则由上面的证明可知复形 $X^\bullet$ 为投射 - 内射对象当且仅当链映射 $X^\bullet \xrightarrow{\binom{0}{1}} \mathrm{Con}(\mathrm{Id}_X^\bullet)$ 可裂。再根据同构 (1.4.1)，不难得出：复形 $X^\bullet$ 是 contractible 的当且仅当存在态射 $a^n : X^{n+1} \longrightarrow X^n$ 使得对于任意 $n \in \mathbb{Z}$，$\mathrm{Id}_{X^n} = a^n \circ d_X^n + d_X^{n-1} \circ a^{n-1}$。

定义 $C(\mathfrak{a})$ 的稳定范畴为 $\mathfrak{a}$ 的**同伦范畴**，记为 $K(\mathfrak{a})$. 沿用 §1.2.2 的记号。则同伦范畴的对象仍是复形，态射空间满足

$$\mathrm{Hom}_{K(\mathfrak{a})}(X^\bullet, Y^\bullet) = \mathrm{Hom}_{C(\mathfrak{a})}(X^\bullet, Y^\bullet)/I(X^\bullet, Y^\bullet),$$

其中 $I(X^\bullet, Y^\bullet)$ 为从 $X^\bullet$ 到 $Y^\bullet$ 经由内射对象分解的链映射的全体。由上命题的证明知 $\mathrm{Con}(\mathrm{Id}_X^\bullet)$ 为内射对象，从而

$$I(X^\bullet, Y^\bullet) = \{f^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet \mid f^\bullet \text{ 经由} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : X^\bullet \longrightarrow \mathrm{Con}(\mathrm{Id}_X^\bullet) \text{ 分解}\}.$$

再由式 (1.4.1)，可得

$$I(X^\bullet, Y^\bullet) = \{f^\bullet \mid \text{ 存在} a^n : X^{n+1} \longrightarrow Y^n \text{ 使得} f^n = d_Y^{n-1} \circ a^{n-1} + a^n \circ d_X^n,\ n \in \mathbb{Z}\}.$$

这里的 $\{a^n\}$ 称为**同伦**，并称相应的链映射 $f^\bullet$**同伦于** 0。至此，不难看出：这里定义的同伦范畴与通常的 ([112]，第 18 页，练习 1.4.5) 是一样的。

根据定理 1.2.7，同伦范畴 $K(\mathfrak{a})$ 为三角范畴。以下描述 $K(\mathfrak{a})$ 的三角结构。根据可裂正合对 $X^\bullet \xrightarrow{\binom{0}{1}} \mathrm{Con}(\mathrm{Id}_X^\bullet) \xrightarrow{(1\ 0)} X^\bullet[1]$，我们可取其 suspension 函子为平移函子 [1]（参考 §1.2.3）。对于任意链映射 $f^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$，考虑如下的（复形范畴中的）推出图

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, "f^\bullet"] & \mathrm{Con}(\mathrm{Id}_X^\bullet) \arrow[r, "(1\ 0)"] \arrow[d, dotted] & X^\bullet[1] \arrow[d, equal] \\
Y^\bullet \arrow[r, dotted, "\binom{0}{1}"] & \mathrm{Con}(f^\bullet) \arrow[r, dotted, "(1\ 0)"] & X^\bullet[1]
\end{tikzcd}$$

其中中间的列映射为 $\begin{pmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & f^\bullet \end{pmatrix}$。故，有正合三角 (有的文献称之为**标准三角**)

$$X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{\binom{0}{1}} \mathrm{Con}(f^\bullet) \xrightarrow{(1\ 0)} X^\bullet[1].$$

另一方面，任给链可裂正合对 $X^\bullet \xrightarrow{i^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{p^\bullet} Z^\bullet$。如注记 1.4.1，可不妨设 $Y^n = Z^n \oplus X^n$，$i^n = \binom{0}{1}$ 以及 $p^n = (1\ 0)$。设 $h^\bullet$ 为相应的同伦不变量。有如下的复形交换图：

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r, "i^\bullet"] \arrow[d, equal] & Y^\bullet \arrow[r, "p^\bullet"] \arrow[d] & Z^\bullet \arrow[d, "h^\bullet[1]"] \\
X^\bullet \arrow[r, "\binom{0}{1}"] & \mathrm{Con}(\mathrm{Id}_X^\bullet) \arrow[r, "(1\ 0)"] & X^\bullet[1],
\end{tikzcd}$$

其中中间的列映射为 $\begin{pmatrix} h^\bullet[1] & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix}$。故由注记 1.2.8，有下面的正合三角（比较 [57]，第 22 页)

$$X^\bullet \xrightarrow{i^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{p^\bullet} Z^\bullet \xrightarrow{-h^\bullet[1]} X^\bullet[1].$$

例 1.4.3 (参考 [54], 第 69-72 页或 [62]) 考虑由复形本身自然给出的正合三角。为此，需引入 *brutal* 截断的概念。设 $X^\bullet$ 为复形。任取 $n \in \mathbb{Z}$。定义如下两个复形

$$\begin{aligned} \sigma^{\geq n} X^\bullet = \quad & \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \xrightarrow{d_X^{n+1}} X^{n+2} \longrightarrow \cdots \\ \sigma^{\leq n} X^\bullet = \quad & \cdots \longrightarrow X^{n-2} \xrightarrow{d_X^{n-2}} X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots . \end{aligned}$$

有如下的自然链映射:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \sigma^{\geq n} X^\bullet = & \cdots \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X^n & \longrightarrow & X^{n+1} & \longrightarrow & X^{n+2} & \longrightarrow \cdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \| & & \| & \\ X^\bullet = & \cdots \longrightarrow & X^{n-2} & \longrightarrow & X^{n-1} & \longrightarrow & X^n & \longrightarrow & X^{n+1} & \longrightarrow & X^{n+2} & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

以及

$$\begin{array}{ccccccccccccc} X^\bullet = & \cdots \longrightarrow & X^{n-2} & \longrightarrow & X^{n-1} & \longrightarrow & X^n & \longrightarrow & X^{n+1} & \longrightarrow & X^{n+2} & \longrightarrow \cdots \\ \downarrow & & \| & & \| & & \| & & \downarrow & & \downarrow & \\ \sigma^{\leq n} X^\bullet = & \cdots \longrightarrow & X^{n-2} & \longrightarrow & X^{n-1} & \longrightarrow & X^n & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

定义链映射 $c_n^\bullet : \sigma^{\leq n} X^\bullet \longrightarrow (\sigma^{\geq n+1} X^\bullet)[1]$ 使得 $(c_n)^n = d_X^n$，$(c_n)^i = 0$，$i \neq n$。根据上面回顾的同伦范畴的三角结构，不难得到如下的正合三角

$$\sigma^{\geq n} X^\bullet \longrightarrow X^\bullet \longrightarrow \sigma^{\leq n-1} X^\bullet \xrightarrow{-c_n^\bullet} (\sigma^{\geq n} X^\bullet)[1]. \tag{1.4.3}$$

请注意到这里的负号。利用 *(TR2)* (或注意到链映射 $c_{n-1}^\bullet[-1]$ 的映射锥恰为 $X^\bullet$)，有正合三角

$$(\sigma^{\leq n-1} X^\bullet)[-1] \xrightarrow{c_{n-1}^\bullet[-1]} \sigma^{\geq n} X^\bullet \longrightarrow X^\bullet \longrightarrow \sigma^{\leq n-1} X^\bullet. \tag{1.4.4}$$

回顾复形 $X^\bullet$ 称为**集中在 n 处的 stalk 复形**，如果 $X^i = 0$，$i \neq n$。这样的复形通常记成 $X^n[-n]$。若 $n = 0$，我们将 $X^0[0]$ 简记为 X^0。另外，注意到范畴 $\mathfrak{a}$ 中任何对象都自然地决定一个集中在 0 处的 *stalk* 复形。实际上，这定义了自然的满嵌入函子 $\mathfrak{a} \longrightarrow K(\mathfrak{a})$。

分别将式 *(1.4.3)* 应用到复形 $\sigma^{\geq n-1} X^\bullet$ 和 $\sigma^{\leq n} X^\bullet$ 上，我们得到正合三角

$$\sigma^{\geq n} X^\bullet \longrightarrow \sigma^{\geq n-1} X^\bullet \longrightarrow X^{n-1}[1-n] \longrightarrow (\sigma^{\geq n} X^\bullet)[1] \tag{1.4.5}$$

以及

$$X^n[-n] \longrightarrow \sigma^{\leq n} X^\bullet \longrightarrow \sigma^{\leq n-1} X^\bullet \longrightarrow X^n[1-n]. \tag{1.4.6}$$

注记 1.4.4 *(1)* 我们这里给出的映射锥的定义与 *[57]*, 第 *23* 页或 *[112]*, 第 *18* 页中的定义有细微差别，但与 *[54]*, *[44]* 以及 *[49]* 中的是一样的。*brutal* 截断的记号与 *[54]* 中不一样，但与文 *[104]* 中的是一样的。

(2) 设 $\mathfrak{a}$ 为加法范畴。定义 $C^-(\mathfrak{a})$、$C^+(\mathfrak{a})$ 和 $C^b(\mathfrak{a})$ 分别为**上有界、下有界以及 (双边) 有界复形范畴**。则同样可证明，若取全体链可裂正合对为正合结构，它们均为 *Frobenius* 范畴。记相应的稳定范畴分别为 $K^-(\mathfrak{a})$、$K^+(\mathfrak{a})$ 和 $K^b(\mathfrak{a})$。它们均为三角范畴，且都是同伦范畴 $K(\mathfrak{a})$ 的三角子范畴。因此，称它们分别为 $\mathfrak{a}$ 的**上有界、下有界以及有界同伦范畴**。

§1.4.2 导出范畴

设 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴，$C(\mathcal{A})$ 为其复形范畴。定义函子 $H : C(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ 使得 $H(X^\bullet) = H^0(X^\bullet)$ 且 $H(f^\bullet) = H^0(f^\bullet)$，其中 $H^0(X^\bullet)$ 为复形 $X^\bullet$ 在 0 处的上同调群。注意到如下（简单，但非平凡的）事实：若态射 $f^\bullet$ 同伦于 0，则 $H(f^\bullet) = 0$。故 H 唯一诱导了函子 $K(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$，该函子仍记为 H。

下结论可视为同调代数的基本结论。

引理 1.4.5 设 $\mathcal{A}$ 为 *Abel* 范畴。则函子 $H : K(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ 为上同调函子。

证. 回顾 $K(\mathcal{A})$ 的正合三角均可由链可裂正合对得到。再根据注记 1.1.2，只需注意到：给定链可裂正合对 $X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet \longrightarrow Z^\bullet$，则相应的序列 $H(X^\bullet) \longrightarrow H(Y^\bullet) \longrightarrow H(Z^\bullet)$ 正合。而这可由 [112], 第 12-14 页得到。请注意，这里我们不需要用到**连接映射**处的正合性。 ■

注记 1.4.6 设 $\mathfrak{a}$ 为 $\mathcal{A}$ 的加法满子范畴。定义 $K^-(\mathcal{A})$ 的满子范畴

$$K^{-,b}(\mathfrak{a}) := \{X^\bullet \in K^-(\mathcal{A}) \mid X^i \in \mathfrak{a} \text{ 且 } X^\bullet \text{ 仅有有限个非零上同调群}\}.$$

根据上引理可知 $K^{-,b}(\mathfrak{a})$ 为三角子范畴。类似地，我们可定义三角子范畴 $K^{+,b}(\mathfrak{a})$。

回顾复形 $X^\bullet$ 称为**正合的**（或**零调的**），如果每个同调群 $H^n(X^\bullet)$ 均为 0; 链映射 $f^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ 称为**拟同构**，如果对于任意 n，$H^n(f) : H^n(X^\bullet) \longrightarrow H^n(Y^\bullet)$

是同构。则由引理 1.4.5 易知，链映射 $f^\bullet$ 为拟同构当且仅当其映射锥 $\mathrm{Con}(f^\bullet)$ 为正合复形。定义 $K^{\mathrm{ex}}(\mathcal{A})$ 为 $K(\mathcal{A})$ 中的正合复形组成的满子范畴。由引理 1.4.5，易知 $K^{\mathrm{ex}}(\mathcal{A})$ 为三角子范畴。事实上，它是有厚度的三角子范畴。根据定理 1.3.9 和引理 1.4.5，不难得到由 $K^{\mathrm{ex}}(\mathcal{A})$ 决定的饱和相容乘法系恰为 $\Sigma = \{f^\bullet \mid f^\bullet \text{ 是拟同构}\}$。

定义 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的**导出范畴**为 Verdier 商范畴

$$D(\mathcal{A}) := K(\mathcal{A})/K^{\mathrm{ex}}(\mathcal{A}) = K(\mathcal{A})[\Sigma^{-1}],$$

并记相应的商函子为 $Q_{\mathcal{A}} : K(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{A})$。

注记 1.4.7 （参见 [112], 定义 10.3.1 和例 10.3.2(2)） 考虑自然函子

$$q_{\mathcal{A}} : C(\mathcal{A}) \longrightarrow K(\mathcal{A}) \xrightarrow{Q_{\mathcal{A}}} D(\mathcal{A}).$$

则对于任意拟同构 $f^\bullet$，$q_{\mathcal{A}}(f^\bullet)$ 可逆；对于任意加法函子 $F : C(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathfrak{a}$ 使得对于每个拟同构 $f^\bullet$，$F(f^\bullet)$ 均可逆，则存在唯一的加法函子 $F' : D(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathfrak{a}$ 满足 $F' \circ q_{\mathcal{A}} = F$。换句话说，导出范畴 $D(\mathcal{A})$ 可看成是由复形范畴 $C(\mathcal{A})$ 直接通过对所有拟同构做局部化而得到的（可参考 *[82]*，第一章）。这可能是 *A. Grothendieck* 对导出范畴最原始的定义 *[47]*。

根据定理 1.3.8, 导出范畴 $D(\mathcal{A})$ 为三角范畴, 且其三角结构是由同伦范畴的正合三角决定的。回顾函子 $H : K(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$。注意到, 对于任意 $f^\bullet \in \Sigma$, $H(f^\bullet)$ 均可逆。故由命题 1.3.2, 存在唯一的函子 $H' : D(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ 使得 $H'Q_{\mathcal{A}} = H$。以下，我们记 H' 为 H。这样，由引理 1.4.5 不难得到

推论 1.4.8 设 $\mathcal{A}$ 为 *Abel* 范畴。则函子 $H : D(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ 为上同调函子。

例 1.4.9 本例介绍好截断 *(good truncation)* 的概念，并研究导出范畴 $D(\mathcal{A})$ 的三角结构。
(1) (参见 [57]，XI.3 节) 设 $0 \longrightarrow X^\bullet \xrightarrow{u^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{v^\bullet} Z^\bullet \longrightarrow 0$ 为复形的短正合列。我们可得到下面的复形短正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Con}(\mathrm{Id}_X^\bullet) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^\bullet \end{pmatrix}} \mathrm{Con}(u^\bullet) \xrightarrow{(0\ v^\bullet)} Z^\bullet \longrightarrow 0.$$

注意到复形 $\mathrm{Con}(\mathrm{Id}_X^\bullet)$ 总是正合的，于是由引理 *1.4.5* 可知链映射 $(0\ v^\bullet)$ 是拟同构。根据同伦范畴中的标准三角的构造，易得如下 $D(\mathcal{A})$ 中的正合三角（这里省去了函子 $Q_{\mathcal{A}}$）

$$\begin{tikzcd} & & & \mathrm{Con}(u^\bullet) \arrow[dr, "(1\ 0)"] & \\ X^\bullet \arrow[r, "u^\bullet"] & Y^\bullet \arrow[r, "v^\bullet"] & Z^\bullet & & X^\bullet[1]. \end{tikzcd}$$

(2) （参见 [54]，第 70 页引理 7.2）设 $X^\bullet$ 为任一复形。定义如下两个复形：

$$\tau^{\geq n}X^\bullet = \quad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Coker}(d_X^{n-1}) \longrightarrow X^{n+1} \xrightarrow{d_X^{n+1}} X^{n+2} \longrightarrow \cdots$$

$$\tau^{\leq n}X^\bullet = \quad \cdots \longrightarrow X^{n-2} \xrightarrow{d_X^{n-2}} X^{n-1} \longrightarrow \mathrm{Ker}d_X^n \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots.$$

值得一提的是 $\tau^{\geq n}$ 和 $\tau^{\leq n}$ 可自然看成 $K(\mathcal{A})$ 以及 $D(\mathcal{A})$ 上的自函子 *(*参见 *[57]*，第 *39* 和 *48* 页或 *[78]*，第 *28-30* 页*)*。

有如下的自然链映射：

$$\begin{tikzcd} \tau^{\leq n}X^\bullet = \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & X^{n-2} \arrow[r] \arrow[d, equal] & X^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ker}(d_X^n) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ X^\bullet = & \cdots \arrow[r] & X^{n-2} \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r] & X^n \arrow[r] & X^{n+1} \arrow[r] & X^{n+2} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

以及

$$\begin{tikzcd} X^\bullet = \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & X^{n-2} \arrow[r] \arrow[d] & X^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & X^n \arrow[r] \arrow[d] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & X^{n+2} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\ \tau^{\geq n}X^\bullet = & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathrm{Coker}(d_X^{n-1}) \arrow[r] & X^{n+1} \arrow[r] & X^{n+2} \arrow[r] & \cdots. \end{tikzcd}$$

注意到有复形的短正合列 $0 \longrightarrow \tau^{\leq n}X^\bullet \longrightarrow X^\bullet \longrightarrow X^\bullet/\tau^{\leq n}X^\bullet \longrightarrow 0$，以及如下的自然拟同构

$$\begin{tikzcd} X^\bullet/\tau^{\leq n}X^\bullet = \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X^n/\mathrm{Ker}(d_X^n) \arrow[r] \arrow[d] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & X^{n+2} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\ \tau^{\geq n+1}X^\bullet = & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathrm{Coker}(d_X^n) \arrow[r] & X^{n+2} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

再注意到根据 *(1)*，复形的短正合列可诱导导出范畴 $D(\mathcal{A})$ 中的正合三角，易得下面的正合三角

$$\tau^{\leq n}X^\bullet \longrightarrow X^\bullet \longrightarrow \tau^{\geq n+1}X^\bullet \dashrightarrow (\tau^{\leq n}X^\bullet)[1], \tag{1.4.7}$$

其中虚线的态射由分式给出。

分别将上式应用到复形 $\tau^{\leq n+1}X^\bullet$ 和 $\tau^{\geq n}X^\bullet$ 上，我们得到以下的正合三角

$$\tau^{\leq n}X^\bullet \longrightarrow \tau^{\leq n+1}X^\bullet \longrightarrow H^{n+1}(X^\bullet)[-n-1] \dashrightarrow (\tau^{\leq n}X^\bullet)[1] \tag{1.4.8}$$

以及

$$H^n(X^\bullet)[-n] \longrightarrow \tau^{\geq n}X^\bullet \longrightarrow \tau^{\geq n+1}X^\bullet \dashrightarrow H^n(X^\bullet)[1-n]. \tag{1.4.9}$$

考虑如下函子的复合

$$i_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \longrightarrow K(\mathcal{A}) \xrightarrow{Q_{\mathcal{A}}} D(\mathcal{A}),$$

其中第一个函子为自然嵌入使得 $i_{\mathcal{A}}(X)$ 为集中在 0 处的 stalk 复形，$X \in \mathcal{A}$。通常我们将 $i_{\mathcal{A}}(X)$ 记为 $X[0]$ 或 X。

有如下的基本结论。

命题 1.4.10 (参考 [54]，第 40 页命题 4.3) 设 $\mathcal{A}$ 为 *Abel* 范畴。沿用以上记号。则函子 $i_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \longrightarrow D(\mathcal{A})$ 为满嵌入。

证. 注意到有自然同构 $H \circ i_{\mathcal{A}} \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$，故 $i_{\mathcal{A}}$ 是忠实的。下证 $i_{\mathcal{A}}$ 是满的。设 $X, Y \in \mathcal{A}$。设 $a^\bullet/s^\bullet \in \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(i_{\mathcal{A}}(X), i_{\mathcal{A}}(Y))$ 为右分式 $i_{\mathcal{A}}(X) \overset{s^\bullet}{\Longleftarrow} Z^\bullet \xrightarrow{a^\bullet} i_{\mathcal{A}}(Y)$，其中 $s^\bullet$ 为拟同构。故 $H^0(s^\bullet) : H^0(Z^\bullet) \longrightarrow X$ 为同构。记 $j^\bullet : \tau^{\leq n}Z^\bullet \longrightarrow Z^\bullet$ 和 $\pi^\bullet : \tau^{\leq 0}Z^\bullet \longrightarrow i_{\mathcal{A}}(H^0(Z^\bullet))$ 为自然链映射。注意到它们均为拟同构。设 $u = H^0(a^\bullet) \circ H^0(s^\bullet)^{-1} : X \longrightarrow H^0(Z^\bullet) \longrightarrow Y$。

考虑如下的同伦交换图 (事实上，是复形交换图)

$$\begin{tikzcd}
 & Z^\bullet \arrow[dl, Rightarrow, "s^\bullet"'] \arrow[dr, "a^\bullet"] & \\
X[0] \arrow[dr, equal] & \cdot \arrow[l, "s^\bullet\circ j^\bullet"'] \arrow[r, "a^\bullet\circ j^\bullet"] \arrow[u, "j^\bullet"'] \arrow[d, "s^\bullet\circ j^\bullet"] & Y[0] \\
 & X[0] \arrow[ur, "u[0]"'] &
\end{tikzcd}$$

故由分式的定义知 $a^\bullet/s^\bullet = i_{\mathcal{A}}(u)$。(这里需验证 $u[0] \circ s^\bullet \circ j^\bullet = a^\bullet \circ j^\bullet$。事实上，易知 $s^\bullet \circ j^\bullet = H^0(s^\bullet)[0] \circ \pi^\bullet$，$a^\bullet \circ j^\bullet = H^0(a^\bullet)[0] \circ \pi^\bullet$，于是 $u[0] \circ s^\bullet \circ j^\bullet = u[0] \circ H^0(s^\bullet)[0] \circ \pi^\bullet = H^0(a^\bullet)[0] \circ \pi^\bullet = a^\bullet \circ j^\bullet$。) 证毕! ■

注记 1.4.11 从上证明不难看出：复形 $Z^\bullet$ 同构于 *stalk* 复形当且仅当 $Z^\bullet$ 至多有一个非零上同调群。(利用上证明中的拟同构 $j^\bullet$ 以及 $\pi^\bullet$。)

设 $X^\bullet, Y^\bullet \in D(\mathcal{A})$。定义其 n 次**hyper-Ext 群**，$n \in \mathbb{Z}$，为

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(X^\bullet, Y^\bullet) := \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet[n]).$$

特别地，设 $M, N \in \mathcal{A}$，则其 n 次**Ext 群**可定义为

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(M, N) := \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(M[0], N[0]) = \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(M[0], N[n]).$$

注意到若 $n < 0$，$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(M, N) = 0$ (用好截断，不难证明该事实)。

回顾 Yoneda 扩张的定义。设 $M, N \in \mathcal{A}$。M **被** N **的** n **次扩张**是指正合列

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow X^{-n+1} \longrightarrow X^{-n+2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

记上面的扩张为复形 $X^\bullet$，其中 $X^{-n} = N$，$X^1 = M$。两个 M 被 N 的 n 次扩张 $X^\bullet$ 和 $Y^\bullet$ 称为**等价的**，如果存在扩张 $Z^\bullet$ 使得有下面的交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & X^{-n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots\cdots \arrow[r] & X^0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & Z^{-n+1} \arrow[r] & \cdots\cdots \arrow[r] & Z^0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[u, equal] & Y^{-n+1} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots\cdots \arrow[r] & Y^0 \arrow[r] \arrow[u] & M \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0.
\end{tikzcd}$$

记 M 被 N 的 n 次扩张的等价类的全体为 $\mathrm{Yext}^n_{\mathcal{A}}(M, N)$。对于给定的扩张 $X^\bullet$，定义它的**示性类**为

$$\chi(X^\bullet) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} f^\bullet / s^\bullet \quad \in \ \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(M, N),$$

其中 $s^\bullet : \sigma^{\leq 0} X^\bullet \longrightarrow M$，$f^\bullet : \sigma^{\leq 0} X^\bullet \longrightarrow N[n]$ 均为自然链映射 (注意到，$s^\bullet$ 是拟同构)。

下面的结论将 Yoneda 扩张与以上定义的 Ext 群等同起来。

命题 1.4.12 ([57], 第 IX 章命题 4.7 和 4.8) 设 $M, N \in \mathcal{A}$，$n > 0$。则示性类映射 $\chi : \mathrm{Yext}^n_{\mathcal{A}}(M, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(M, N)$ 是双射。

注记 1.4.13 可以类似定义 *Verdier* 商范畴 $D^*(\mathcal{A})$，$* \in \{-,+,b\}$。例如，

$$D^b(\mathcal{A}) = K^b(\mathcal{A})/(K^{\mathrm{ex}}(\mathcal{A}) \cap K^b(\mathcal{A})).$$

它们都有自然的三角结构。我们称 $D^-(\mathcal{A})$，$D^+(\mathcal{A})$ 和 $D^b(\mathcal{A})$ 分别为范畴 $\mathcal{A}$ 的**上有界、下有界以及有界导出范畴**。

利用好截断函子、引理 *1.3.6* 及其对偶，不难证明自然函子 $D^*(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{A})$ 均为满嵌入。设 $X^\bullet \in D(\mathcal{A})$。利用好截断函子，易证 $X^\bullet \in D^-(\mathcal{A})$ 当且仅当 $H^i(X^\bullet) = 0$, $i >> 0$; $X^\bullet \in D^+(\mathcal{A})$ 当且仅当 $H^i(X^\bullet) = 0$, $i << 0$; $X^\bullet \in D^b(\mathcal{A})$ 当且仅当 $H^i(X^\bullet) = 0$，$|i| >> 0$。特别地，我们有 $D^-(\mathcal{A}) \cap D^+(\mathcal{A}) = D^b(\mathcal{A})$。

记 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{I}$ 分别为由范畴 $\mathcal{A}$ 的全体投射对象和全体内射对象组成的满子加法范畴。自然地，我们认为 $K^-(\mathcal{P})$ 和 $K^+(\mathcal{I})$ 为 $K(\mathcal{A})$ 的满子范畴，事实上，它们均为三角子范畴。

如下的观察可直接验证（利用投射或内射对象的性质）。

引理 1.4.14 ([54], 第一章引理 4.4) 在同伦范畴 $K(\mathcal{A})$ 中考虑问题。则有 $K^-(\mathcal{P}) \subseteq {}^\perp K^{\mathrm{ex}}(\mathcal{A})$ 和 $K^+(\mathcal{I}) \subseteq K^{\mathrm{ex}}(\mathcal{A})^\perp$。

根据上引理以及引理 1.3.12，自然函子 $K^-(\mathcal{P}) \longrightarrow D(\mathcal{A})$ 和 $K^+(\mathcal{I}) \longrightarrow D(\mathcal{A})$ 均为满嵌入。另一方面，下面的结论十分重要，其证明需重复用到推出的技巧。

命题 1.4.15 ([54]，第一章引理 4.6(1); [62]，命题 1.7.7) 设 $\mathcal{P}'$ 为 $\mathcal{A}$ 的满子范畴使得对于任意对象 X，均存在满态射 $P \twoheadrightarrow X$，其中 $P \in \mathcal{P}'$。则对于任意上有界复形 $X^\bullet$，均存在拟同构 $\pi^\bullet : P^\bullet \longrightarrow X^\bullet$，其中 $P^\bullet$ 是上有界复形且其每个分支 $P^n \in \mathcal{P}'$。

将上命题及其对偶形式与引理 1.4.14 结合起来，易得如下结论。

定理 1.4.16 ([54]，第一章命题 4.7; [70]，命题 6.3.1)
(1) 设 $\mathcal{A}$ 为具有足够多投射对象的 *Abel* 范畴。则自然函子 $K^-(\mathcal{P}) \longrightarrow D^-(\mathcal{A})$ 是三角等价。该等价可限制得到自然的三角等价 $K^{-,b}(\mathcal{P}) \simeq D^b(\mathcal{A})$。
(2) 设 $\mathcal{A}$ 为具有足够多内射对象的 *Abel* 范畴。则自然函子 $K^+(\mathcal{I}) \longrightarrow D^+(\mathcal{A})$ 是三角等价。该等价可限制得到自然的三角等价 $K^{+,b}(\mathcal{I}) \simeq D^b(\mathcal{A})$。

第二章　相对奇点范畴

为了研究 Landau-Ginzburg 模型上的 B- 膜范畴, D. Orlov 对左 Noether 环 R 引入了奇点范畴 $D_{\rm sg}(R)$ 的概念: 奇点范畴 $D_{\rm sg}(R)$ 定义为导出范畴 $D^b(R\text{-mod})$ 关于三角子范畴 $K^b(R\text{-proj})$ 的 Verdier 商范畴, 参见 [91, 93]。不难看出, $D_{\rm sg}(R) \simeq 0$ 当且仅当每个有限生成左 R- 模具有有限投射维数（在某些情形下，环 R 是正则的，比较 [104]，命题 7.26）。于是，范畴 $D_{\rm sg}(R)$ 反应了环 R 的奇异性，故而得名。事实上，早在上世纪八十年代末，R. O. Buchweitz [28] 和 D. Happel [51] 分别从不角度对奇点范畴进行了较系统的研究。近来，A. Beligiannis 和 H. Krause 等人对奇点范畴以及相关课题的研究有了一些新的进展，特别地，他们注意到了某些无界零伦复形的重要性，参见 [18, 74] 等。

本章提出相对奇点范畴的概念：设 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴，$\omega \subseteq \mathcal{A}$ 为自正交加法满子范畴，定义相应的相对奇点范畴为 Verdier 商范畴 $D_\omega(\mathcal{A}) = D^b(\mathcal{A})/K^b(\omega)$。我们研究与之相关的 Frobenius 正合范畴 $\alpha(\omega)$ 以及无界正合复形的同伦范畴 $K^{\rm ex}(\omega)$。本章的主定理推广了 R. O. Buchweitz 和 D. Happel 等人的工作。

§2.1　Abel 范畴的一些子范畴

本节，我们总假设 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴，$\omega \subseteq \mathcal{A}$ 是其加法满子范畴。

§2.1.1　记号及概念

本小节中的概念可从文献 [4], [7] 以及 [32] 中找到。在范畴 $\mathcal{A}$ 中，定义如下四个加法满子范畴：

$$\widehat{\omega} := \{X \in \mathcal{A} \mid \text{ 存在正合列 } 0 \to T^{-n} \to T^{1-n} \to \cdots \to T^0 \to X \to 0,\ \text{其中 } T^{-i} \in \omega, n \geq 0\};$$

$$\widehat{\omega} := \{X \in \mathcal{A} \mid \text{ 存在正合列 } \cdots \to T^{-n} \to T^{1-n} \to \cdots \to T^0 \to X \to 0,\ \text{其中 } T^{-i} \in \omega\};$$

$$\omega^\perp := \{X \in \mathcal{A} \mid \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{A}}(T, X) = 0,\ \text{任意 } T \in \omega,\ i \geq 1\};$$

$$_\omega\mathcal{X} := \{X \in \mathcal{A} \mid \text{ 存在正合列 } \cdots \to T^{-n} \xrightarrow{d^{-n}} T^{1-n} \to \cdots \to T^0 \xrightarrow{d^0} X \to 0,\ \text{其中 } T^{-i} \in \omega,\ \operatorname{Ker} d^i \in \omega^\perp\}.$$

显然，有包含关系 $\omega\subseteq\widehat{\omega}\subseteq\widehat{\omega}$，$\omega\subseteq{}_\omega\mathcal{X}\subseteq\widehat{\omega}$。另外，容易看到 $\mathrm{add}\omega\subseteq\widehat{\omega}$，其中 $\mathrm{add}\omega$ 为 ω 的加法闭包。由函子 $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(-,-)$ 的长正合列，易知子范畴 $\omega^\perp$ 对扩张，单态射的余核以及直和项是封闭的。

回顾 ω- 分解维数的概念。设 $X\in\widehat{\omega}$。定义 X 的**ω- 分解维数**, 记为 $\omega\text{-res.dim}X$，为最小的非负整数 n 使得存在正合列 $0\to T^{-n}\to T^{1-n}\to\cdots\to T^0\to X\to 0$，其中 $T^{-i}\in\omega$。若 $X\notin\widehat{\omega}$，则定义 $\omega\text{-res.dim}X=\infty$。

对偶地，我们定义如下四个加法满子范畴：

$$\overset{\vee}{\omega}:=\{X\in\mathcal{A}\mid \text{存在正合列 } 0\to X\to T^0\to\cdots\to T^{n-1}\to T^n\to 0,\ \text{其中 } T^i\in\omega, n\geq 0\};$$
$$\breve{\omega}:=\{X\in\mathcal{A}\mid \text{存在正合列 } 0\to X\to T^0\to\cdots\to T^{n-1}\to T^n\to\cdots,\ \text{其中 } T^i\in\omega\};$$
$${}^\perp\omega:=\{X\in\mathcal{A}\mid \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X,T)=0,\ \text{任意 } T\in\omega,\ i\geq 1\};$$
$$\mathcal{X}_\omega:=\{X\in\mathcal{A}\mid \text{存在正合列}$$
$$0\to X\xrightarrow{d^{-1}}T^0\xrightarrow{d^0}T^1\to\cdots\to T^{n-1}\xrightarrow{d^{n-1}}T^n\to\cdots,\ \text{其中 } T^i\in\omega,\ \mathrm{Coker}d^i\in{}^\perp\omega\}.$$

我们有包含关系 $\omega\subseteq\overset{\vee}{\omega}\subseteq\breve{\omega}$，$\omega\subseteq\mathcal{X}_\omega\subseteq\breve{\omega}$ 以及 $\mathrm{add}\omega\subseteq\breve{\omega}$。由函子 $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(-,-)$ 的长正合列，不难看出子范畴 ${}^\perp\omega$ 对扩张，满态射的核以及直和项是封闭的。

回顾 ω- 余分解维数的概念。设 $X\in^\vee\omega$。定义 X 的**ω- 余分解维数**，记为 $\omega\text{-cores.dim}X$，为最小的非负整数 n 使得存在正合列 $0\to X\to T^0\to\cdots\to T^{n-1}\to T^n\to 0$，其中 $T^i\in\omega$。若 $X\notin\overset{\vee}{\omega}$，则定义 $\omega\text{-cores.dim}X=\infty$。

称子范畴 ω 是**自正交**的，如果对于任意 $i\geq 1, T,T'\in\omega$，均有 $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(T,T')=0$。故，$\omega$ 自正交当且仅当 $\omega\subseteq\omega^\perp$，当且仅当 $\omega\subseteq{}^\perp\omega$。

引理 2.1.1 设满子范畴 ω 是自正交的。则有

(1) $\omega\subseteq\widehat{\omega}\subseteq{}_\omega\mathcal{X}\subseteq(\omega^\perp\cap\widehat{\omega})$，进而易知，$\widehat{\omega}\subseteq\omega^\perp$ 当且仅当 $\widehat{\omega}={}_\omega\mathcal{X}$。

(2) $\omega\subseteq\overset{\vee}{\omega}\subseteq\mathcal{X}_\omega\subseteq({}^\perp\omega\cap\breve{\omega})$，进而易知，$\breve{\omega}\subseteq{}^\perp\omega$ 当且仅当 $\breve{\omega}=\mathcal{X}_\omega$。

证. 只证 (1)。注意到 $\omega^\perp$ 对单态射的余核封闭且 $\omega\subseteq\omega^\perp$，则易知 ${}_\omega\mathcal{X}\subseteq\omega^\perp$ 以及 $\widehat{\omega}\subseteq\omega^\perp$，进而有 $\widehat{\omega}\subseteq{}_\omega\mathcal{X}$。这样就很容易得到 (1)。 ■

有如下的基本结论。

引理 2.1.2 (参考 [49], 第 103 页引理 2.1) 设 ω 为自正交的加法满子范畴。则自然合成函子 $K^b(\omega) \hookrightarrow K^b(\mathcal{A}) \xrightarrow{Q^b_{\mathcal{A}}} D^b(\mathcal{A})$ 是满嵌入。

证. 根据 Beilinson 引理 ([13] 或 [49], 第 72 页引理 3.4(a)), 只需证明该函子诱导了同构

$$\mathrm{Hom}_{K^b(\omega)}(T, T'[n]) \simeq \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(T, T'[n]),$$

其中 $T, T' \in \omega$, $n \in \mathbb{Z}$。当 $n = 0$ 时, 上式两边均自然同构于 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(T, T')$ (参考命题 1.4.10)。当 $n \neq 0$ 时, 左式恒为 0; 右式当 $n < 0$ 时为 0; 当 $n > 0$ 时, 右式即为 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(T, T')$, 由题设知亦为 0。证毕! ■

§2.1.2 一些基本结论

上小节我们引入了八个加法满子范畴, 本小节我们回顾它们的一些基本性质。

设 $\omega \subseteq \mathcal{A}$ 如上。设 $\mathcal{X}$ 为包含 ω 的某一加法满子范畴。称 ω**余生成**$\mathcal{X}$, 如果对于任意 $X \in \mathcal{X}$, 均存在正合列 $0 \to X \to T \to X' \to 0$ 使得 $T \in \omega$, $X' \in \mathcal{X}$。对偶地, 可定义 ω**生成**$\mathcal{X}$ 的概念。

有如下的重要结论。

定理 2.1.3 (Auslander-Buchweitz 分解定理 [4]) 设 $\mathcal{X}$ 为包含 ω 且对扩张封闭的加法满子范畴。

(1) 设 ω 余生成 $\mathcal{X}$。则对于任意对象 $C \in \widehat{\mathcal{X}}$, 均存在正合列

$$0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \longrightarrow C \longrightarrow 0, \quad 0 \longrightarrow C \longrightarrow Y^C \longrightarrow X^C \longrightarrow 0,$$

其中 $Y_C, Y^C \in \widehat{\omega}$, $X_C, X^C \in \mathcal{X}$。

(2) 设 ω 生成 $\mathcal{X}$。则对于任意对象 $C \in \check{\mathcal{X}}$, 均存在正合列

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow {}_CX \longrightarrow {}_CY \longrightarrow 0, \quad 0 \longrightarrow {}^CX \longrightarrow {}^CY \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

其中 ${}_CX, {}^CX \in \mathcal{X}$, ${}_CY, {}^CY \in \check{\omega}$。

证. (2) 是 (1) 的对偶, 而 (1) 可参见 [4], 定理 1.1。 ■

我们需要如下的基本结论。

命题 2.1.4 (参考 [7], 命题 5.4) *设 ω 为 $\mathcal{A}$ 中自正交的加法满子范畴。则有*
(1) 子范畴 ${}_\omega\mathcal{X}$ 对扩张、单态射的余核以及直和项封闭; 子范畴 $\widehat{\omega}$ 对扩张、单态射的余核封闭。
(2) 子范畴 $\mathcal{X}_\omega$ 对扩张、满态射的核以及直和项封闭; 子范畴 $\overset{\vee}{\omega}$ 对扩张、满态射的核封闭。

证. (1) 是 (2) 的对偶。(2) 的第一个断言可参见 [7], 命题 5.4; 后一个断言的证明可参照 [7], 命题 5.4 的证明 (从 138 页到 139 页第 7 行)。 ■

回顾幂等可裂的概念 (可参考本文第四章)。设 $\mathfrak{a}$ 为加法范畴。设 $e : X \longrightarrow X$ 为幂等态射。称 e**可裂**, 如果存在态射 $u : X \longrightarrow Y$ 和 $v : Y \longrightarrow X$ 满足 $v \circ u = e$ 且 $u \circ v = \mathrm{Id}_Y$。称范畴 $\mathfrak{a}$**幂等可裂**, 如果其每个幂等态射均可裂。若 $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{A}$ 为加法满子范畴, 则 $\mathfrak{a}$ 幂等可裂当且仅当 $\mathfrak{a}$ 在直和项下封闭 (参见 [31], 附录 A)。故由上命题知, 子范畴 ${}_\omega\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{X}_\omega$ 均幂等可裂。我们提出如下问题: 子范畴 $\widehat{\omega}$ 和 $\overset{\vee}{\omega}$ 是否也幂等可裂?

命题 2.1.5 *设 $\omega \subseteq \mathcal{A}$ 为自正交的加法满子范畴。则*
(1) 有包含关系 $\omega \subseteq (\widehat{\omega} \cap {}^\perp\omega) \subseteq \mathrm{add}\omega$ 以及 $\omega \subseteq (\overset{\vee}{\omega} \cap \omega^\perp) \subseteq \mathrm{add}\omega$。
(2) 设 ω 幂等可裂。视 $K^b(\omega)$ 和 $\mathcal{A}$ 均为 $D^b(\mathcal{A})$ 中的严格子范畴 (参见引理 2.1.2 以及命题 1.4.10)。则有 $K^b(\omega) \cap \omega^\perp = \widehat{\omega}$ 以及 $K^b(\omega) \cap {}^\perp\omega = \overset{\vee}{\omega}$。

证. (1). 根据对偶, 只需证第一个包含关系。显然 $\omega \subseteq (\widehat{\omega} \cap {}^\perp\omega)$。设 $X \in (\widehat{\omega} \cap {}^\perp\omega)$。则存在正合列

$$0 \longrightarrow T^{-n} \longrightarrow \cdots \longrightarrow T^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} T^0 \longrightarrow X \longrightarrow 0,$$

其中 $T^{-i} \in \omega$。由于 $X \in {}^\perp\omega$, 故有 $T^{-i} \in X^\perp$。注意到子范畴 $X^\perp$ 对满态射的余核封闭, 于是我们得到 $\mathrm{Im}d^{-1} \in X^\perp$, 因此如下短正合列分裂

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}d^{-1} \longrightarrow T^0 \longrightarrow X \longrightarrow 0.$$

再注意到 $T^0 \in \omega$, 因此 $X \in \mathrm{add}\omega$。

(2). 注意到 $\widehat{\omega} \subseteq \omega^\perp$ 且显然有 $\widehat{\omega} \subseteq K^b(\omega)$ (事实上, 若 $X \in \widehat{\omega}$, 设有正合列

$$0 \longrightarrow T^{-n} \longrightarrow \cdots \longrightarrow T^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} T^0 \longrightarrow X \longrightarrow 0.$$

则有自然的拟同构 $T^\bullet \longrightarrow X[0]$, 故 $X \in K^b(\omega)$)。于是有 $\widehat{\omega} \subseteq K^b(\omega) \cap \omega^\perp$。

另一方面，设 $Y \in K^b(\omega) \cap \omega^{\perp}$。则 stalk 复形 $Y[0]$ 拟同构于如下的有界复形

$$0 \longrightarrow T^{-n} \longrightarrow \cdots \longrightarrow T^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} T^0 \xrightarrow{d^0} T^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow T^n \longrightarrow 0,$$

其中 T^i 均在 ω 中。故有短正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im} d^{-1} \longrightarrow \mathrm{Ker} d^0 \longrightarrow Y \longrightarrow 0.$$

再注意到 $\mathrm{Im} d^{-1} \in \widehat{\omega} \subseteq \omega^{\perp}$，$\mathrm{Ker} d^0 \in \overset{\vee}{\omega}$ 且 $Y \in \omega^{\perp}$。由于子范畴 $\omega^{\perp}$ 对扩张封闭，故我们得到 $\mathrm{Ker} d^0 \in \overset{\vee}{\omega} \cap \omega^{\perp}$。再利用 (1)，得到 $\mathrm{Ker} d^0 \in \mathrm{add}\omega = \omega$。再由上面的短正合列 (注意到 $\mathrm{Im} d^{-1} \in \widehat{\omega}$)，我们就看出了 $Y \in \widehat{\omega}$。这就证明了第一个等式，第二个类似可证。 ■

我们以如下结论来结束本小节：它部分地回答了我们前面提出的问题。

定理 2.1.6 设 $\omega \subseteq \mathcal{A}$ 为自正交的加法满子范畴。则有

(1) 子范畴 $\widehat{\omega}$ 幂等可裂当且仅当有包含关系 $\mathrm{add}\omega \subseteq \widehat{\omega}$；

(2) 子范畴 $\overset{\vee}{\omega}$ 幂等可裂当且仅当有包含关系 $\mathrm{add}\omega \subseteq \overset{\vee}{\omega}$。

证. 只证 (1)。“仅当”部分很显然。设 $\mathrm{add}\omega \subseteq \widehat{\omega}$。由于范畴 $\widehat{\omega}$ 对单态射的余核封闭，易得 $\widehat{\omega} = \widehat{\mathrm{add}\omega}$。故下只需证：若 ω 幂等可裂，则 $\widehat{\omega}$ 也幂等可裂。

注意到，在任何加法子范畴中，两个幂等可裂的加法 (严格) 子范畴之交仍是幂等可裂的。设 ω 幂等可裂。则根据第四章定理 A，$K^b(\omega)$ 幂等可裂；另外，$\mathcal{A}$ 的子范畴 $\omega^{\perp}$ 显然在直合项下封闭，故而幂等可裂。根据命题 2.1.5 (2)，我们可得出范畴 $\widehat{\omega}$ 幂等可裂. 证毕! ■

§2.2 相对奇点范畴

设 ω 为 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的自正交加法满子范畴。根据引理 2.1.2，自然三角函子 $K^b(\omega) \longrightarrow D^b(\mathcal{A})$ 是满嵌入。因此我们可视 $K^b(\omega)$ 为 $D^b(\mathcal{A})$ 的三角子范畴。定义关于自正交子范畴 ω 的**相对奇点范畴**为 Verdier 商范畴

$$D_{\omega}(\mathcal{A}) := D^b(\mathcal{A})/K^b(\omega).$$

并记相应的商函子为 $Q_{\omega} : D^b(\mathcal{A}) \longrightarrow D_{\omega}(\mathcal{A})$。

§2.2.1 嵌入函子

注意到如下结论。

引理 2.2.1 在导出范畴 $D^b(\mathcal{A})$ 中，我们有 $\mathrm{add}K^b(\omega) = K^b(\mathrm{add}\omega)$。因此，对于任意 $X^\bullet \in D^b(\mathcal{A})$，$Q_\omega(X^\bullet) \simeq 0$ 当且仅当 $X^\bullet \in K^b(\mathrm{add}\omega)$。

证. 根据本文第四章定理 A, $K^b(\mathrm{add}\omega)$ 是幂等可裂的, 故 $\mathrm{add}K^b(\omega) \subseteq K^b(\mathrm{add}\omega)$。另一方面, $\mathrm{add}\omega \subseteq \mathrm{add}K^b(\omega)$, 而 $K^b(\mathrm{add}\omega)$ 是包含 $\mathrm{add}\omega$ 的最小三角子范畴, 因此有 $K^b(\mathrm{add}\omega) \subseteq \mathrm{add}K^b(\omega)$, 进而 $\mathrm{add}K^b(\omega) = K^b(\mathrm{add}\omega)$。最后一个断言是直接的。 ■

考虑 $\mathcal{A}$ 中的满子范畴 $\mathcal{X}_\omega \cap \omega^\perp$ 和 ${}^\perp\omega \cap {}_\omega\mathcal{X}$。注意到 $\omega \subseteq \mathcal{X}_\omega \cap \omega^\perp$ 且 $\omega \subseteq {}^\perp\omega \cap {}_\omega\mathcal{X}$。分别记 $\overline{\mathcal{X}_\omega \cap \omega^\perp}$ 和 $\underline{{}^\perp\omega \cap {}_\omega\mathcal{X}}$ 为它们关于子范畴 ω 的稳定范畴。

考虑如下的合成函子

$$\mathcal{X}_\omega \cap \omega^\perp \hookrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{i_\mathcal{A}} D^b(\mathcal{A}) \xrightarrow{Q_\omega} D_\omega(\mathcal{A}),$$

其中 $i_\mathcal{A}$ 为自然嵌入函子 (参见命题 1.4.10)。注意到该函子将子范畴 ω 映为 0, 故有唯一的诱导函子

$$\overline{\mathcal{X}_\omega \cap \omega^\perp} \longrightarrow D_\omega(\mathcal{A}).$$

类似地，我们有诱导函子 $\underline{{}^\perp\omega \cap {}_\omega\mathcal{X}} \longrightarrow D_\omega(\mathcal{A})$。

本小节的主要定理为

定理 2.2.2 设 ω 为 $\mathcal{A}$ 的自正交子范畴。则上面的自然函子 $\overline{\mathcal{X}_\omega \cap \omega^\perp} \longrightarrow D_\omega(\mathcal{A})$ 以及 $\underline{{}^\perp\omega \cap {}_\omega\mathcal{X}} \longrightarrow D_\omega(\mathcal{A})$ 均为满嵌入。

为了证明该定理，我们需做一些准备。称复形 $X^\bullet \in C^b(\omega)$ 是**集中在负部分的**，如果 $X^n = 0$，$n \geq 0$。记 $D^{\leq -1}(\omega)$ 为 $K^b(\omega)$ 中由同构于某个集中于负部分的复形组成的严格满子范畴。类似地，可定义子范畴 $D^{\geq 1}(\omega)$。

引理 2.2.3 *(1)* 设 $M \in {}^\perp\omega$, $X^\bullet \in D^{\leq -1}(\omega)$。则有 $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(M, X^\bullet) = 0$。
(2) 设 $N \in \omega^\perp$, $Y^\bullet \in D^{\geq 1}(\omega)$。则有 $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(Y^\bullet, N) = 0$。

证. 只证 (1)，(2) 可类似证明。

考虑满子范畴

$$\mathcal{L} := \{Z^\bullet \in D^b(\mathcal{A}) \mid \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(M, Z^\bullet) = 0\}.$$

由于 $M \in {}^\perp\omega$，则有 $\omega[i] \subseteq \mathcal{L}$，$i \geq 1$。注意到 $\mathcal{L}$ 对扩张封闭 (即，任给 $D^b(\mathcal{A})$ 中的正合三角

$$X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet \longrightarrow Z^\bullet \longrightarrow X^\bullet[1],$$

若 $X^\bullet, X^\bullet \in \mathcal{L}$，则 $Y^\bullet \in \mathcal{L}$)。根据例 1.4.3，易知任意 $X^\bullet \in D^{\leq -1}(\omega)$ 可由子范畴 $\bigcup_{i\geq 1}\omega[i]$ 经过有限步扩张得到。故 $D^{\leq -1}(\omega) \subseteq \mathcal{L}$。即为所证。 ■

以下将 $D_\omega(\mathcal{A})$ 中的态射记为分式。对于 $D^b(\mathcal{A})$ 中的态射，若其映射锥落在 $K^b(\omega)$ 中，则记之为双箭头。

设 $M, N \in \mathcal{A}$。令 $\omega(M,N) := \{f : M \longrightarrow N \mid f$ 经由 ω 分解$\}$。考虑自然映射

$$\theta : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{D_\omega(\mathcal{A})}(M,N)$$

使得 $\theta(f) = f/\mathrm{Id}_M$。易知，$\theta(\omega(M,N)) = 0$。

引理 2.2.4 设 (*1*) $M \in \mathcal{X}_\omega$，$N \in \omega^\perp$；或 (*2*) $M \in {}^\perp\omega$，$N \in {}_\omega\mathcal{X}$。则 θ 诱导了同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N)/\omega(M,N) \simeq \mathrm{Hom}_{D_\omega(\mathcal{A})}(M,N).$$

证. 这里只证情形 (1)。(2) 的证明是类似的，但需用左分式的技巧（比较 [91]，命题 1.21 的证明）。

先证 θ 是满射。设 $a/s : M \overset{s}{\Longleftarrow} Z^\bullet \xrightarrow{a} N$ 为 $D_\omega(\mathcal{A})$ 中的态射，其中 a 和 s 均为 $D^b(\mathcal{A})$ 中的态射且 s 的映射锥 $C^\bullet = \mathrm{Con}(s) \in K^b(\omega)$。于是，在 $D^b(\mathcal{A})$ 中有如下的正合三角

$$Z^\bullet \overset{s}{\Longrightarrow} M \longrightarrow C^\bullet \longrightarrow Z^\bullet[1]. \tag{2.2.1}$$

由于 $M \in \mathcal{X}_\omega$，可取长正合列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varepsilon} T^0 \xrightarrow{d^0} T^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow T^n \xrightarrow{d^n} T^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

其中 $T^i \in \omega$ 且 $\mathrm{Ker}d^i \in {}^{\perp}\omega$。故而在 $D^b(\mathcal{A})$ 中，M 同构于复形

$$T^\bullet := \ 0 \longrightarrow T^0 \xrightarrow{d^0} T^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow T^n \xrightarrow{d^n} T^{n+1} \longrightarrow \cdots ,$$

进而同构于 $\tau^{\leq l}T^\bullet$，任意 $l \geq 0$。注意到在 $K^b(\mathcal{A})$ 中有如下的正合三角

$$(\sigma^{<l}T^\bullet)[-1] \longrightarrow \mathrm{Ker}d^l[-l] \overset{s''}{\Longrightarrow} \tau^{\leq l}T^\bullet \longrightarrow \sigma^{<l}T^\bullet.$$

在 $D^b(\mathcal{A})$ 中，令 s' 为如下的复合态射

$$\mathrm{Ker}d^l[-l] \overset{s''}{\Longrightarrow} \tau^{\leq l}T^\bullet \longrightarrow T^\bullet \overset{\varepsilon}{\Longleftarrow} M.$$

则根据上面的三角，我们得到 $D^b(\mathcal{A})$ 中的正合三角

$$(\sigma^{<l}T^\bullet)[-1] \longrightarrow \mathrm{Ker}d^l[-l] \overset{s'}{\Longrightarrow} M \xrightarrow{\varepsilon} \sigma^{<l}T^\bullet. \tag{2.2.2}$$

设有

$$C^\bullet = \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow W^{-t'} \longrightarrow \cdots \longrightarrow W^{t-1} \longrightarrow W^t \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots ,$$

其中 $W^i \in \omega$，$t', t \geq 0$。设 $l_0 = t+1$，$E = \mathrm{Ker}d^{l_0}$。由于 $E \in {}^{\perp}\omega$ 且 $C^\bullet[l_0] \in D^{\leq -1}(\omega)$，则根据引理 2.2.3(1)，有

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(E[-l_0], C^\bullet) = \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(E, C^\bullet[l_0]) = 0.$$

因此，态射 $E[-l_0] \overset{s'}{\Longrightarrow} M \longrightarrow C^\bullet$ 为 0。根据三角 (2.2.1)，存在 $h: E[-l_0] \longrightarrow Z^\bullet$ 使得 $s' = s \circ h$，进而 $a/s = (a \circ h)/s'$。

由于 $N \in \omega^{\perp}$ 且 $(\sigma^{<l_0}T^\bullet)[-1] \in D^{\geq 1}(\omega)$，根据引理 2.2.3(2)，有

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}((\sigma^{<l_0}T^\bullet)[-1], N) = 0.$$

将上同调函子 $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(-, N)$ 作用在 (2.2.2) 上，我们得到正合列（取 $l = l_0$）

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(M, N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(s', N)} \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(E[-l_0], N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}((\sigma^{<l_0}T^\bullet)[-1], N).$$

故，存在 $f: M \longrightarrow N$ 使得 $f \circ s' = a \circ h$。因此，

$$a/s = (a \circ h)/s' = (f \circ s')/s' = \theta(f).$$

这就证明了 θ 是满射。

接下来，欲证 $\mathrm{Ker}\theta = \omega(M, N)$。已知 $\omega(M, N) \subseteq \mathrm{Ker}\theta$。设 $f : M \longrightarrow N$ 使得 $\theta(f) = 0$。则根据引理 1.3.4(1)，存在 $s : Z^\bullet \Longrightarrow M$ 使得 $f \circ s = 0$，其中 s 的映射锥 $C^\bullet \in K^b(\omega)$。这里我们沿用以上记号，进而我们可得到 $s' = s \circ h$。于是 $f \circ s' = 0$。根据三角 (2.2.2)，存在 $f' : \sigma^{<l_0} T^\bullet \longrightarrow N$ 使得 $f' \circ \varepsilon = f$。

考虑如下的自然正合三角

$$T^0[-1] \longrightarrow \sigma^{>0}(\sigma^{<l_0} T^\bullet) \Longrightarrow \sigma^{<l_0} T^\bullet \xrightarrow{\pi} T^0.$$

由于 $N \in \omega^\perp$ 且 $\sigma^{>0}(\sigma^{<l_0} T^\bullet) \in D^{\geq 1}(\omega)$，根据引理 2.2.3(2)，有

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(\sigma^{>0}(\sigma^{<l_0} T^\bullet), N) = 0.$$

进而，合成态射 $\sigma^{>0}(\sigma^{<l_0} T^\bullet) \Longrightarrow \sigma^{<l_0} T^\bullet \xrightarrow{f'} N$ 为 0，则存在 $g : T^0 \longrightarrow N$ 使得 $g \circ \pi = f'$。于是，$f = g \circ (\pi \circ \varepsilon)$，这就证明了 f 在 $D^b(\mathcal{A})$ 中经由 ω 分解。注意到 $i_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \longrightarrow D^b(\mathcal{A})$ 是满嵌入，我们得出 f 在 $\mathcal{A}$ 中也经由 ω 分解，即，$f \in \omega(M, N)$。证毕! ■

定理 2.2.2 的证明: 注意到映射 θ 是由所考虑的自然函子给出的，于是定理可根据引理 2.2.4 立得。 ■

§2.2.2 稳定范畴

同上，设 ω 为 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的自正交满子范畴。考虑满子范畴 $\mathfrak{a}(\omega) = \mathcal{X}_\omega \cap {}_\omega\mathcal{X}$。

引理 2.2.5 范畴 $\mathfrak{a}(\omega)$ 是 *Frobenius* 正合范畴，其投射 - 内射对象的全体恰是 $\mathrm{add}\omega$。

证. 由命题 2.1.4，子范畴 $\mathcal{X}_\omega$ 和 ${}_\omega\mathcal{X}$ 对扩张以及直和项封闭。于是 $\mathfrak{a}(\omega)$ 对扩张以及直和项也封闭。由例 1.2.2(2)，$\mathfrak{a}(\omega)$ 自然地成为正合范畴，且易知 $\mathrm{add}\omega \subseteq \mathfrak{a}(\omega)$。注意到，$\mathcal{X}_\omega \subseteq {}^\perp\omega$ 且 ${}_\omega\mathcal{X} \subseteq \omega^\perp$。故有 $\mathfrak{a}(\omega) \subseteq {}^\perp\omega \cap \omega^\perp$。特别地，我们有，对于任意 $T \in \omega$ 和 $X \in \mathfrak{a}(\omega)$，$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(T, X) = 0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X, T)$。于是 ω 中的，进而 $\mathrm{add}\omega$ 中的，对象在 $\mathfrak{a}(\omega)$ 中既投射又内射。

设 $X \in \mathfrak{a}(\omega)$。由于 $X \in \mathcal{X}_\omega$, 我们有 $\mathcal{A}$ 中的正合列

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow T \longrightarrow X' \longrightarrow 0,$$

其中 $T \in \omega$ 且 $X' \in \mathcal{X}_\omega$。但注意到 $X, T \in {}_\omega\mathcal{X}$，再根据命题 2.1.4(1)，${}_\omega\mathcal{X}$ 对单态射的余核封闭，于是有 $X' \in {}_\omega\mathcal{X}$，进而 $X' \in \mathfrak{a}(\omega)$。因此上正合列落在 $\mathfrak{a}(\omega)$ 中，又注意到 T 是内射对象，这就证明了 $\mathfrak{a}(\omega)$ 具有足够多的内射对象。对偶地，对于任意 $X \in \mathfrak{a}(\omega)$，存在正合列 $0 \longrightarrow X'' \longrightarrow T' \longrightarrow X \longrightarrow 0$，其中 $T' \in \omega$，$X'' \in \alpha(\omega)$。从而，$\mathfrak{a}(\omega)$ 具有足够多的投射对象。

从上面得证明，我们不难推出 $\mathfrak{a}(\omega)$ 是 Frobenius 范畴，且其全体投射 - 内射对象恰为 addω。 ■

考虑 $\mathfrak{a}(\omega)$ 关于 addω 的稳定范畴，记为 $\underline{\mathfrak{a}(\omega)}$。根据 Heller-Happel 定理 (定理 1.2.7)，$\underline{\mathfrak{a}(\omega)}$ 是三角范畴，记其平移函子（即，suspension 函子）为 S。注意到 $\mathfrak{a}(\omega) \subseteq \mathcal{X}_\omega \cap \omega^\perp$，于是 $\underline{\mathfrak{a}(\omega)} \subseteq \overline{\mathcal{X}_\omega \cap \omega^\perp}$。根据定理 2.2.2，有自然的满嵌入

$$F: \quad \underline{\mathfrak{a}(\omega)} \longrightarrow D_\omega(\mathcal{A}).$$

定理 2.2.6 *存在函子的自然同构 $\alpha : FS \longrightarrow [1]F$ 使得 (F, α) 成为三角范畴间的正合函子。*

证. 设 $X \in \mathfrak{a}(\omega)$。考虑在定义 suspension 函子 S 时所用的正合列

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{i_X} T(X) \xrightarrow{\pi_X} S(X) \longrightarrow 0,$$

其中 $T(X) \in \mathrm{add}\omega$。记 $C^\bullet$ 为复形 $\cdots \to 0 \to X \xrightarrow{i_X} T(X) \to 0 \to \cdots$，其中 $T(X)$ 处在第 0 位。故，我们得到自然的链映射 $p'_X : C^\bullet \longrightarrow X[1]$ 和 $\pi'_X : C^\bullet \longrightarrow S(X)$，其中 p'_X 和 π'_X 分别是由 Id_X 和 π_X 诱导的。显然，π'_X 为复形的拟同构。

定义态射

$$\beta_X := \; -p'_X/\pi'_X \in \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(S(X), X[1]).$$

进而，定义 $\alpha_X := Q_\omega(\beta_X)$。注意到 α_X 是同构。

事实上，我们有 $D^b(\mathcal{A})$ 中自然的正合三角

$$X \xrightarrow{i_X} T(X) \longrightarrow C^\bullet \xrightarrow{p'_X} X[1].$$

该三角诱导了 $D_\omega(\mathcal{A})$ 中的正合三角。但 $Q_\omega(T(X)) = 0$，于是 $Q_\omega(p'_X)$ 是同构，进而 α_X 是同构。

注意到，对于任意 $Y \in \mathfrak{a}(\omega)$，有 $F(Y) = Q_\omega(i_{\mathcal{A}}(Y))$，其中 $i_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \longrightarrow D^b(\mathcal{A})$ 为自然嵌入。故，α_X 可视为从 $FS(X)$ 到 $F(X)[1]$ 的同构。

首先，我们来证明 $\alpha : FS \longrightarrow [1]F$ 为自然同构。设 $f : X \longrightarrow X'$ 为 $\mathfrak{a}(\omega)$ 中的态射。则存在交换图

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "f"] & T(X) \arrow[r, "\pi_X"] \arrow[d, "T(f)"] & S(X) \arrow[d, "S(f)"] \\
X' \arrow[r, "i_{X'}"] & T(X') \arrow[r, "\pi_{X'}"] & S(X').
\end{tikzcd}$$

类似于 $C^\bullet$、β_X 等，我们可以定义复形 $C'^\bullet$、链映射 $\beta_{X'}$ 等。注意到，有如下的复形交换图

$$\begin{tikzcd}
S(X) \arrow[d, "S(f)"] & C^\bullet \arrow[l, "\pi'_X"'] \arrow[r, "p'_X"] \arrow[d] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
S(X') & C'^\bullet \arrow[l, "\pi'_{X'}"'] \arrow[r, "p'_{X'}"] & X'[1],
\end{tikzcd}$$

其中中间列的链映射由 f 和 $T(f)$ 决定。这样就不难得到，在 $D^b(\mathcal{A})$ 中有，$f[1]\circ\beta_X = \beta_{X'}\circ S(f)$，进而有 $F(f)[1]\circ\alpha_X = \alpha_{X'}\circ FS(f)$。这就证明了 α 的自然性。

其次，我们证明 (F, α) 是正合函子。回顾稳定范畴 $\underline{\mathfrak{a}(\omega)}$ 中的正合三角均可由正合列得到。设 $0 \longrightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \longrightarrow 0$ 为 $\mathfrak{a}(\omega)$ 中（也为 $\mathcal{A}$ 中）的正合列。有如下的交换图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\rho"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "w"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "i_X"] & T(X) \arrow[r, "\pi_X"] & S(X) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

从而，$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{-w} S(X)$ 为 $\underline{\mathfrak{a}(\omega)}$ 中的正合三角。欲证 (也只需证)

$$F(X) \xrightarrow{F(\underline{u})} F(Y) \xrightarrow{F(\underline{v})} F(Z) \xrightarrow{-\alpha_X\circ F(\underline{w})} F(X)[1]$$

为 $D_\omega(\mathcal{A})$ 中的正合三角。

回顾 $\mathcal{A}$ 中的正合列可诱导 $D^b(\mathcal{A})$ 中的正合三角。可设

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w'} X[1] \tag{2.2.3}$$

为相应的正合三角。根据例 1.4.9(1)，我们可以如下刻画态射 w'：取 $\mathrm{Con}(u)$ 为复形 $\cdots \to 0 \to X \xrightarrow{u} Y \to 0 \to \cdots$，其中 Y 处在第 0 位；考虑自然复形链映射 $p_X : \mathrm{Con}(u) \longrightarrow X[1]$ 和 $v' : \mathrm{Con}(u) \longrightarrow Z$，则有 $w' = p_X/v' \in \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(Z, X[1])$。

我们断言: $w' = -\beta_X \circ w$。若是，则根据 (2.2.3)，我们有 $D^b(\mathcal{A})$ 中的正合三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{-\beta_X \circ w} X[1]$$

而该三角自然地诱导了 $D_\omega(\mathcal{A})$ 中的三角，即为所求。(这里，我们需注意到 $F(\underline{u}) = Q_\omega(u)$，$F(\underline{v}) = Q_\omega(v)$ 以及 $\alpha_X \circ F(\underline{w}) = Q_\omega(\beta_X \circ w)$。)

为了证明上述断言，我们只需证在 $D^b(\mathcal{A})$ 中有 $p_X = -\beta_X \circ (w \circ v')$。记 $\rho' : \mathrm{Con}(u) \longrightarrow C^\bullet$ 为由 ρ 自然决定的链映射，其中复形 $C^\bullet$ 如上。事实上，我们有

$$\begin{aligned} -\beta_X \circ (w \circ v') &= (p'_X / \pi'_X) \circ (w \circ v') \\ &= p'_X \circ \rho' = p_X, \end{aligned}$$

其中第二个等号由右分式的复合法则得到，并注意到 $w \circ v = \pi_X \circ \rho$，进而有 $w \circ v' = \pi'_X \circ \rho'$，而最后一个等号可由定义看出。这样我们就完成了定理的证明。 ■

§2.2.3 主定理

设 ω 为 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的自正交满子范畴。上小节已得到正合满嵌入函子 $F : \underline{\mathfrak{a}(\omega)} \longrightarrow D_\omega(\mathcal{A})$。一个自然的问题是：何时该函子成为等价函子？

本节的主定理是

定理 2.2.7 *设 ω 为 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的自正交加法满子范畴。假设 $\widehat{\mathcal{X}_\omega} = \mathcal{A} = {}_\omega\overset{\vee}{\mathcal{X}}$。则 $F : \underline{\mathfrak{a}(\omega)} \longrightarrow D_\omega(\mathcal{A})$ 是三角范畴间的等价。*

证. 根据定理 2.2.2 和定理 2.2.6，F 是三角范畴间的满嵌入，故只需证 F 是稠密的。我们断言，只需证 $Q_\omega(\mathcal{A})$ 包含在 F 的象中。

事实上，由于 $\mathcal{A}$ (在 [49]，第 70 页的意义下) 生成 $D^b(\mathcal{A})$，进而 $Q_\omega(\mathcal{A})$ 生成 $D_\omega(\mathcal{A})$。又注意到 $\mathrm{Im}F$ 是 $D_\omega(\mathcal{A})$ 的三角子范畴，故 $Q_\omega(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Im}F$ 就能推出函子 F 是稠密的。

为了证明 $Q_\omega(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Im}F$，设 $X \in \mathcal{A}$。由于 ω 余生成 $\mathcal{X}_\omega$ 且 $X \in \widehat{\mathcal{X}_\omega} = \mathcal{A}$，故

由 Auslander-Buchweitz 分解定理（定理 2.3.1(1)），存在正合列

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow 0,$$

其中 $X' \in \mathcal{X}_\omega$，$Y \in \widehat{\omega}$。进而，(在导出范畴 $D^b(\mathcal{A})$ 中) 有 $Y \in K^b(\omega)$，于是 $Q_\omega(Y) \simeq 0$。注意到该正合列自然诱导 $D^b(\mathcal{A})$ 中的，进而 $D_\omega(\mathcal{A})$ 中的，正合三角，又由于 $Q_\omega(Y) \simeq 0$，所以 $Q_\omega(X) \simeq Q_\omega(X')$。另一方面，由于 ω 生成 ${}_\omega\mathcal{X}$ 且 $X' \in {}_\omega\overset{\vee}{\mathcal{X}} = \mathcal{A}$，再根据 Auslander-Buchweitz 分解定理 (定理 2.3.1(2))，存在正合列

$$0 \longrightarrow X' \longrightarrow X'' \longrightarrow Z \longrightarrow 0,$$

其中 $X'' \in {}_\omega\mathcal{X}$，$Z \in \overset{\vee}{\omega}$。由类似于上面的讨论，易知 $Q_\omega(X') \simeq Q_\omega(X'')$，于是 $Q_\omega(X) \simeq Q_\omega(X'')$。

注意到 $\overset{\vee}{\omega} \subseteq \mathcal{X}_\omega$，于是有 $X', Z \in \mathcal{X}_\omega$，又注意到 $\mathcal{X}_\omega$ 对扩张封闭（命题2.1.4(2)），这样由上正合列，我们得出 $X'' \in \mathcal{X}_\omega$，从而有 $X'' \in \mathfrak{a}(\omega)$。于是 $F(X'') \simeq Q_\omega(X'')$，进而有 $Q_\omega(X) \simeq F(X'') \in \mathrm{Im}F$。证毕! ■

§2.3 稳定范畴的刻画

§2.3.1 主定理

设 ω 为 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的自正交加法满子范畴。上节我们证明了，在一定条件下，相对奇点范畴 $D_\omega(\mathcal{A})$ 三角等价于稳定范畴 $\underline{\mathfrak{a}(\omega)}$。本节，我们将给出该稳定范畴的另一种刻画，从而也就得到相对奇点范畴 $D_\omega(\mathcal{A})$ 的一个新刻画（参见前言中的定理 I）。

记 $K^{\mathrm{ex}}(\omega)$ 为同伦范畴 $K(\omega)$ 中由正合复形组成的满子范畴。由引理 1.4.5 易知，$K^{\mathrm{ex}}(\omega)$ 为 $K(\omega)$ 的三角子范畴。

本节的主要结论为：

定理 2.3.1 *设自正交加法满子范畴 ω 满足 $\widehat{\omega} \subseteq \omega^\perp$ 以及 $\overset{\vee}{\omega} \subseteq {}^\perp\omega$。则有三角范畴间的等价 $K^{\mathrm{ex}}(\omega) \simeq \underline{\mathfrak{a}(\omega)}$.*

§2.3.2 主定理的证明

本小节将给出定理 2.3.1 的证明。实际上，我们将证明一个更一般的结论，而定理 2.3.1 将作为其推论。

设 $\mathfrak{a}$ 为 Frobenius 正合范畴。记 $\mathcal{I}$ 为其内射对象组成的满子范畴。$\mathfrak{a}$ 中的复形 $X^\bullet = \{X^n, d_X^n\}$ 称为**零调**的，如果存在 conflation $Z^n \xrightarrow{i^n} X^n \xrightarrow{d^n} Z^{n+1}$ 满足 $d_X^n = i^{n+1} \circ d^n$，$n \in \mathbb{Z}$ (参见 [67]，第 11 节)。记 $C^{\mathrm{ac}}(\mathcal{I})$ 为 $C(\mathcal{I})$ 中由零调复形组成的满子范畴，记 $K^{\mathrm{ac}}(\mathcal{I})$ 为相应的同伦范畴。

下结论是众所周知的。

引理 2.3.2 (参考 [86]，引理 1.1 或 [67]，引理 11.3) $K^{\mathrm{ac}}(\mathcal{I})$ 为 $K(\mathcal{I})$ 的三角子范畴。

事实上，为了证明该引理，只需证：对于任意链映射 $u^\bullet : X^\bullet \longrightarrow X'^\bullet$，其中 $X^\bullet, X'^\bullet$ 为零调复形，则映射锥 $\mathrm{Con}(u^\bullet)$ 也为零调复形。

设对于复形 $X'^\bullet$，有 conflation $Z'^n \xrightarrow{i'^n} X'^n \xrightarrow{d'^n} Z'^{n+1}$ 使得 $d_{X'}^n = i'^{n+1} \circ d'^n$。很容易看到，存在（唯一的）态射 $v^n : Z^n \longrightarrow Z'^n$ 使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
Z^n \arrow[r, "i^n"] \arrow[d, dotted, "v^n"] & X^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[d, "u^n"] & Z^{n+1} \arrow[d, dotted, "v^{n+1}"] \\
Z'^n \arrow[r, "i'^n"] & X'^n \arrow[r, "d'^n"] & Z'^{n+1}.
\end{tikzcd}$$

对于每个 $n \in \mathbb{Z}$，取拉回图（应用公理 (Ex2)）

$$\begin{tikzcd}
Z'^n \arrow[r, dotted, "c^n"] \arrow[d, equal] & K^n \arrow[r, dotted, "a^n"] \arrow[d, dotted, "b^n"] & Z^{n+1} \arrow[d, "v^{n+1}"] \\
Z'^n \arrow[r, "i'^n"] & X'^n \arrow[r, "d'^n"] & Z'^{n+1}.
\end{tikzcd}$$

由拉回的泛性质，易知存在态射 $e^n : X^n \longrightarrow K^n$ 使得 $a^n \circ e^n = d^n$ 且 $b^n \circ e^n = u^n$。进而，再由拉回图的泛性质，有 $e^n \circ i^n = c^n \circ v^n$。故，我们得到映

射锥的微分映射 $d^{n-1}_{\mathrm{Con}(u^\bullet)} = \begin{pmatrix} -d^n_X & 0 \\ u^n & d^{n-1}_{X'} \end{pmatrix}$ 的分解

$$X^n \oplus X'^{n-1} \xrightarrow{(e^n,\, c^n \circ d'^{n-1})} K^n \xrightarrow{\binom{-i^{n+1}\circ a^n}{b^n}} X^{n+1} \oplus X'^n$$

注意到如下的交换图表

$$\begin{tikzcd}
Z'^{n+1} \arrow[r, "c^{n+1}"] & K^{n+1} \arrow[r, "a^{n+1}"] & Z^{n+2} \\
X'^n \arrow[u, "d'^n"] \arrow[r, "\binom{0}{1}"] & X^{n+1} \oplus X'^n \arrow[u, "{(e^{n+1},\, c^{n+1}\circ d'^n)}"'] \arrow[r, "{(1,\,0)}"] & X^{n+1} \arrow[u, "d^{n+1}"'] \\
Z'^n \arrow[u, "i'^n"] \arrow[r, "c^n"] & K^n \arrow[u, "\binom{-i^{n+1}\circ a^n}{b^n}"'] \arrow[r, "a^n"] & Z^{n+1} \arrow[u, "-i^{n+1}"']
\end{tikzcd}$$

注意到上图的各行均为 conflation，两边的列也为 conflation，这样由嵌入定理 ([64] 以及下面的注记)，不难证明中间一列也为 conflation。这样就证明了 $\mathrm{Con}(u^\bullet)$ 为零调复形。

注记 2.3.3 *B. Keller* 证明了如下的嵌入定理：任何小的正合范畴 $\mathfrak{a}$ 均可满嵌入到某个 *Abel* 范畴 $\mathcal{A}$ 中使得 $\mathfrak{a}$ 在 $\mathcal{A}$ 中对扩张封闭，且 $\mathfrak{a}$ 中的 *conflation* 恰由 $\mathcal{A}$ 中三项均落在 $\mathfrak{a}$ 中的短正合列给出。参见 *[64]* 或 *[106]*。

一般地，对于任何正合范畴 $\mathfrak{a}$ 和给定其某个小的子范畴 $\mathfrak{b}$，则存在最小的包含 $\mathfrak{b}$ 的加法子范畴 $\mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{a}$ 满足对核和余核封闭。易证，$\mathfrak{a}'$ 为小范畴，且它自然地继承了 $\mathfrak{a}$ 的正合结构而成为正合范畴。实际上，子范畴 $\mathfrak{a}'$ 可由对 $\mathfrak{b}$ 做可数次的添加核和余核而得到。（注意到 $\mathfrak{a}'$ 不一定为 $\mathfrak{a}$ 的正合子范畴，比较 §1.2.1 中的定义。）于是，我们可以对正合范畴 $\mathfrak{a}'$ 应用 *Keller* 嵌入定理。

考虑加法函子 $G : C^{\mathrm{ac}}(\mathcal{I}) \longrightarrow \mathfrak{a}$ 使得

$$G(X^\bullet) = \mathrm{Ker} d^0_X, \quad G(u^\bullet) = u^0|_{\mathrm{Ker} d^0_X},$$

其中 $u^\bullet: X^\bullet \longrightarrow X'^\bullet$。

引理 2.3.4 如上定义的函子 G 是满且稠密的正合函子，且满足 $G(X^\bullet)$ 为内射对象当且仅当 $X^\bullet$ 为内射对象。

证. 设 $Z \in \mathfrak{a}$。由于 $\mathfrak{a}$ 有足够多的内射对象和投射对象，我们可设 Z 有如下的内射分解和投射分解

$$0 \longrightarrow Z \longrightarrow X^0 \longrightarrow X^1 \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow X^{-2} \longrightarrow X^{-1} \longrightarrow Z \longrightarrow 0,$$

其中 $X^i \in \mathcal{I}$。这样我们就得到了零调复形 $X^\bullet$，显然有 $G(X^\bullet) = Z$。这就证明了函子 G 是稠密的。

另一方面，设 $Z' \in \mathfrak{a}$。如上可取零调复形 $X'^\bullet$ 使得 $G(X'^\bullet) = Z'$。设 $v: Z \longrightarrow Z'$。则根据同调代数中的比较定理（[112]，定理 2.2.6），存在如下两个交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z \arrow[r] \arrow[d, "v"] & X^0 \arrow[r] \arrow[d, "u^0"] & X^1 \arrow[r] \arrow[d, "u^1"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & Z' \arrow[r] & X'^0 \arrow[r] & X'^1 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^{-2} \arrow[r] \arrow[d, "u^{-2}"] & X^{-1} \arrow[r] \arrow[d, "u^{-1}"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "v"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & X'^{-2} \arrow[r] & X'^{-1} \arrow[r] & Z' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

这样就得到链映射 $u^\bullet: X^\bullet \longrightarrow X'^\bullet$，且 $G(u^\bullet) = v$。这就证明了 G 是满的。

为了证明 G 是正合函子，设 $X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet \longrightarrow Z^\bullet$ 为 $C^{\mathrm{ac}}(\mathcal{I})$ 中的任一 conflation，即为链可裂正合对。由注记 1.4.1，可设有链映射 $u^\bullet: X^\bullet \longrightarrow X'^\bullet$ 使得上正合对同构于标准正合对 $X'^\bullet \longrightarrow \mathrm{Con}(u^\bullet) \longrightarrow X^\bullet[1]$。沿用引理 2.3.2 的证明中的记号。则有 $G(X'^\bullet) = Z'^0$，$G(X^\bullet[1]) = Z^1$，而 $G(\mathrm{Con}(u^\bullet)) = K^0$。但我们已看到有 $\mathfrak{a}$ 中的 conflation $Z'^0 \xrightarrow{c^0} K^0 \xrightarrow{a^0} Z^1$，即，序列 $G(X^\bullet) \longrightarrow G(Y^\bullet) \longrightarrow G(Z^\bullet)$ 为 $\mathfrak{a}$ 中的 conflation。这样我们就证明了 G 为正合函子。

对于最后一个断言，回顾 $C^{\mathrm{ac}}(\mathcal{I})$ 中的内射对象即为 contractible 复形。故，零调复形 $X^\bullet$ 为 contractible 当且仅当其对应的 conflation $Z^n \longrightarrow X^n \longrightarrow Z^{n+1}$

均可裂。注意到 $X^n \in \mathcal{I}$，所以，如果 $X^{\bullet}$ 为内射对象，则 $G(X^{\bullet}) = Z^0$ 为 X^0 的直和项，于是 $G(X^{\bullet})$ 在 $\mathfrak{a}$ 中内射。反之，若 $G(X^{\bullet}) = Z^0$ 内射（也投射），则 conflation$Z^{-1} \longrightarrow X^{-1} \longrightarrow Z^0$ 以及 $Z^0 \longrightarrow X^0 \longrightarrow Z^1$ 均可裂，进而 Z^{-1} 和 Z^1 均为内射 (也投射)，于是 conflation $Z^{-2} \longrightarrow X^{-2} \longrightarrow Z^{-1}$ 以及 $Z^1 \longrightarrow X^1 \longrightarrow Z^2$ 均可裂，进而 Z^{-2} 和 Z^2 均内射（也投射）。继续这种论证，最终，可知每个 conflation $Z^n \longrightarrow X^n \longrightarrow Z^{n+1}$ 均可裂，于是复形 $X^{\bullet}$ contractible，即为 $C^{\mathrm{ac}}(\mathcal{I})$ 中的内射对象。证毕！ ■

下面的结论易证。

引理 2.3.5 ([99], 第 446 页或 [70], 第 45 页) *设 $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ 为三角范畴的正合函子。设 F 是满的。则 F 是忠实的当且仅当 F 在对象上是忠实的（即，$F(X) \simeq 0$ 意味着 $X \simeq 0$）。*

根据引理 2.3.4，函子 G 自然诱导了稳定范畴间的函子

$$\underline{G} : K^{\mathrm{ac}}(\mathcal{I}) \longrightarrow \underline{\mathfrak{a}}.$$

根据推论 1.2.10，函子 $\underline{G}$ 为三角函子。再根据引理 2.3.4，可知 $\underline{G}$ 是满的稠密函子，且在对象上忠实。故，由引理 2.3.5，可得到以下定理 (比较 [44]，第 132 页 2.9.2，[18]，定理 3.11 或 [74]，命题 7.2)。

定理 2.3.6 *设 $\mathfrak{a}$ 为 Frobenius 正合范畴，其所有内射对象组成的满子范畴记为 $\mathcal{I}$。则上述函子 $\underline{G} : K^{\mathrm{ac}}(\mathcal{I}) \longrightarrow \underline{\mathfrak{a}}$ 为三角范畴间的等价。*

定理 2.3.1 的证明： 注意到 addω 恰为 Frobenius 范畴 $\mathfrak{a}(\omega)$ 中全体内射对象所组成的子范畴，于是由定理 2.3.6，有三角等价 $K^{\mathrm{ac}}(\mathrm{add}\omega) \simeq \underline{\mathfrak{a}(\omega)}$。注意到，自然嵌入 $K^{\mathrm{ac}}(\omega) \hookrightarrow K^{\mathrm{ac}}(\mathrm{add}\omega)$ 是稠密的（即，每个复形 $X^{\bullet} \in K^{\mathrm{ac}}(\mathrm{add}\omega)$ 可通过（可数次地）加上 contractible 复形 $\cdots \to 0 \to T \overset{\mathrm{Id}_T}{\to} T \to 0 \to \cdots$，$T \in \mathrm{add}\omega$，使之成为 $K^{\mathrm{ac}}(\omega)$ 中的复形），因而是范畴等价。于是，有三角等价 $K^{\mathrm{ac}}(\omega) \simeq \underline{\mathfrak{a}(\omega)}$。

另一方面，由假设有 $\widehat{\omega} \subseteq \omega^{\perp}$ 以及 $\widecheck{\omega} \subseteq {}^{\perp}\omega$ 可得 $\widehat{\omega} = {}_{\omega}\mathcal{X}$ 且 $\widecheck{\omega} = \mathcal{X}_{\omega}$，进而我们得到，$K^{\mathrm{ex}}(\omega)$ 中的任何复形均可视为 $K(\mathfrak{a}(\omega))$ 中的零调复形。因此，$K^{\mathrm{ex}}(\omega) = K^{\mathrm{ac}}(\omega)$。这样定理 2.3.1 就得证了。 ■

§2.4 应用：奇点范畴

本节考察（非交换）Gorenstein 环的 (分次) 奇点范畴以及 Gorenstein 范畴的奇点范畴。

§2.4.1 Gorenstein 环的奇点范畴

设 R 为左 Noether 含幺环。记 R-mod 为有限生成左 R- 模范畴, 并记 R-proj 为其由有限生成投射模组成的满子范畴。在文献 [91] 中（比较 [51], [28] 以及 [29]），环 R 的**奇点范畴**定义为 Verdier 商范畴

$$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(R) := D^b(R\text{-mod})/K^b(R\text{-proj}).$$

可类似定义分次奇点范畴：设 $R = \oplus_{n\geq 0} R_n$ 为正分次的左 Noether 环，分别记 R-gr 以及 R-grproj 为有限生成分次左 R- 模和有限生成分次投射模组成的范畴。则分次环 R 的**分次奇点范畴**（[93], 也见 [108]）定义为 Verdier 商范畴

$$\mathbf{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{sg}}(R) := D^b(R\text{-gr})/K^b(R\text{-grproj}).$$

回顾（非交换）含幺环 R 称为**Gorenstein 环**，如果 R 为双边 Noether 环且正则模 R 作为左模和右模均具有有限的内射长度 (参见 [38], 第九章)。两个著名的结论：H. Bass 证明了交换 Gorenstein 环一定具有有限的 Krull 维数，且 $\mathrm{inj.dim}\ {}_RR = \mathrm{K.dim}\ R$ (参见 [12]，推论 3.4)；A. Zaks 证明了任何 Gorenstein 环均满足 $\mathrm{inj.dim}\ {}_RR = \mathrm{inj.dim}\ R_R$ (参见 [115]，引理 A)。

引入一些记号：记 $\mathcal{A} = R$-mod，$\omega = R$-proj，$\mathcal{A}' = R^{\mathrm{op}}$-mod 以及 $\omega' = R^{\mathrm{op}}$-proj。回顾**对偶函子**

$$* = \mathrm{Hom}_R(-, R) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}' \quad \text{和} \quad * = \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(-, R) : \mathcal{A}' \longrightarrow \mathcal{A}。$$

对于任意 $M \in \mathcal{A}$, 存在自然的映射 $\theta_M : M \longrightarrow M^{**}$ 使得 $\theta_M(m)(f) = f(m)$，其中 $m \in M$，$f \in M^*$。注意到 θ_P 为同构，$P \in \omega$。

引理 2.4.1 (比较 [4], 引理 1.7) *设 R 为 Gorenstein 环。则对偶函子 $*$ 诱导了范畴间的等价 ${}^\perp\omega \simeq {}^\perp(\omega')$，且 $*$ 保持这两个子范畴中的短正合列。*

证. 设 $M \in {}^{\perp}\omega$。取 M 的投射分解

$$\cdots \longrightarrow P^{-n} \xrightarrow{d^{-n}} P^{-n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^{0} \xrightarrow{d^{0}} M \longrightarrow 0. \qquad (2.4.1)$$

令 $K^{-i} = \mathrm{Ker} d^{-i}$, $i \geq 0$。记 $K^{1} = M$。注意到子范畴 ${}^{\perp}\omega$ 对满态射的核封闭，于是每个 $K^{-i} \in {}^{\perp}\omega$。将对偶函子 $*$ 作用到如下短正合列上

$$0 \longrightarrow K^{-i} \longrightarrow P^{-i} \longrightarrow K^{-i+1} \longrightarrow 0.$$

由于 $K^{-i+1} \in {}^{\perp}\omega$，我们得到 $\mathcal{A}'$ 中的正合列

$$0 \longrightarrow (K^{-i+1})^{*} \longrightarrow (P^{-i})^{*} \longrightarrow (K^{-i})^{*} \longrightarrow 0. \qquad (2.4.2)$$

设 inj.dim $R_R = d$。对上面短正合列用 dimension-shift，可得到

$$\mathrm{Ext}_R^{j}((K^{-i+1})^{*}, R) \simeq \mathrm{Ext}_R^{j+1}((K^{-i})^{*}, R) \simeq \cdots \simeq \mathrm{Ext}_R^{j+d}((K^{-(i+d-1)})^{*}, R) = 0,$$

其中 $j \geq 1$。于是，$(K^{-i})^{*} \in {}^{\perp}(\omega')$，$i \geq -1$。特别地，$M^{*} \in {}^{\perp}(\omega')$。同理，对式 (2.4.2) 用对偶函子，我们得到正合列

$$0 \longrightarrow (K^{-i})^{**} \longrightarrow (P^{-i})^{**} \longrightarrow (K^{-i+1})^{**} \longrightarrow 0,$$

进而，得到长正合列

$$\cdots \longrightarrow (P^{-n})^{**} \longrightarrow (P^{-n+1})^{**} \longrightarrow \cdots \longrightarrow (P^{-1})^{**} \longrightarrow (P^{0})^{**} \longrightarrow M^{**} \longrightarrow 0. \qquad (2.4.3)$$

注意到，$\theta_{P^{-i}} : P^{-i} \longrightarrow (P^{-i})^{**}$ 均为同构。通过比较长正合列 (2.4.1) 和 (2.4.3)，我们得到 θ_M 为同构。同理，反过来，对于 $M' \in {}^{\perp}(\omega')$，可证 $(M')^{*} \in {}^{\perp}\omega$ 且 $M' \simeq (M')^{**}$。这就证明了 $* : {}^{\perp}\omega \longrightarrow {}^{\perp}(\omega')$ 为等价。很明显，函子 $*$ 能保持 ${}^{\perp}\omega$ 和 ${}^{\perp}(\omega')$ 中的短正合列。 ■

命题 2.4.2 *沿用上面的记号。设 R 为 Gorenstein 环。则有 $\mathcal{X}_\omega = {}^{\perp}\omega = \breve{\omega}$ 且 $\widehat{\mathcal{X}_\omega} = \mathcal{A}$。*

证. 由引理 2.1.1(2)，我们已知 $\mathcal{X}_\omega \subseteq {}^{\perp}\omega \cap \breve{\omega}$。设 $M \in {}^{\perp}\omega$。由引理 2.4.1 知，$M^{*} \in {}^{\perp}(\omega')$。取短正合列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow Q \longrightarrow M^{*} \longrightarrow,$$

其中 $Q \in \omega'$。由于 ${}^{\perp}(\omega')$ 对满态射的核封闭，则 $K \in {}^{\perp}(\omega')$。再根据引理 2.4.1，下序列正合

$$0 \longrightarrow M^{**} \longrightarrow Q^{*} \longrightarrow L^{*} \longrightarrow 0,$$

且 $L^{*} \in {}^{\perp}\omega$，$M \simeq M^{**}$，$Q^{*}$ 为投射模。记 $M' = L^{*}$，$P^{0} = Q^{*}$。则我们得到正合列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow P^{0} \longrightarrow M' \longrightarrow 0$。对 M' 做类似的论证，我们可得 $0 \longrightarrow M' \longrightarrow P^{1} \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$。继续这种论证，可知 $M \in \mathcal{X}_{\omega}$。于是，$\mathcal{X}_{\omega} = {}^{\perp}\omega$。

设 $M \in \breve{\omega}$。则存在正合列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow P^{0} \longrightarrow P^{1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P^{n} \longrightarrow P^{n+1} \longrightarrow \cdots.$$

由于 $\text{inj.dim}\,{}_{R}R = d < \infty$，利用 dimension-shift，不难看出 $M \in {}^{\perp}\omega$。这样就证明了第一个断言。

为了证 $\widehat{\mathcal{X}_{\omega}} = \mathcal{A}$，设 $M \in \mathcal{A}$。取长正合列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P^{-d-1} \longrightarrow P^{-d} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P^{0} \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

其中 P^{-i} 为投射。同样，利用 dimension-shift，可证 $K \in {}^{\perp}\omega = \mathcal{X}_{\omega}$。这样 $M \in \widehat{\mathcal{X}_{\omega}}$。证毕！ ■

对于 Gorenstein 环 R，$\mathcal{X}_{\omega}$ 中的模称为 R 的**极大 Cohen-Macaulay 模**，并记 $\mathrm{MCM}(R) = \mathcal{X}_{\omega}$（比较 [7]，第 148 页或 [6]，第 223 页）。注意到，$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(R) = D_{\omega}(\mathcal{A})$。此时，易知 ${}_{\omega}\mathcal{X} = \omega^{\perp} = \mathcal{A}$。再根据命题 2.4.2，可知定理 2.2.7 以及定理 2.3.1 的条件均得到满足。

结合定理 2.2.7 和定理 2.3.1，我们得到如下定理。注意到，该定理部分地属于 Buchweitz [28] 和 Happel [51]，定理 4.6.

定理 2.4.3 *设 R 为 Gorenstein 环。则有三角范畴间的等价*

$$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(R) \simeq \underline{\mathrm{MCM}(R)} \simeq K^{\mathrm{ex}}(R\text{-proj}).$$

上述定理有其分次形式。分次环 $R = \oplus_{n \geq 0} R_{n}$ 称为**分次 Gorenstein 环**，如果 R 为双边分次 Noether 环且分次正则模 R 作为左模和右模均具有有限的内射长度。根据 [109]，第 670 页第 9-11 行，不难得出：分次 Gorenstein 环作为非分次环是 Gorenstein 的。

分次 R- 模通常记成 $M=\oplus_{n\in\mathbb{Z}}M_n$。回顾分次模范畴上的 degree-shift 函子 $(d): R\text{-gr}\longrightarrow R\text{-gr}$ 使得 $M(d)_n=M_{d+n}$，其中 $n\in\mathbb{Z}$，$d\in\mathbb{Z}$。此时的**对偶函子**为

$$*=\underline{\mathrm{Hom}}(-,R)=:\oplus_{d\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_{R\text{-gr}}(-,R(d)):\ R\text{-gr}\longrightarrow R^{\mathrm{op}}\text{-gr}.$$

进而，不难证明引理 2.4.1 和命题 2.4.2 的分次形式。可类似定义 R 的**分次极大 Cohen-Macaulay 模范畴** 为 $\mathrm{MCM}(R\text{-gr}):=\mathcal{X}_\omega$，这里 $\omega=R\text{-grproj}$，$\mathcal{A}=R\text{-gr}$。

如下结论即为定理 2.4.3 的分次形式。

定理 2.4.4 *设 R 为分次 Gorenstein 环。则有三角范畴间的等价*

$$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}^{\mathrm{gr}}(R)\simeq\underline{\mathrm{MCM}(R\text{-gr})}\simeq K^{\mathrm{ex}}(R\text{-grproj}).$$

§2.4.2　Gorenstein 范畴的奇点范畴

设 $\mathcal{A}$ 为具有足够多投射对象的 Abel 范畴。记其所有投射对象组成的范畴为 $\mathcal{P}$。仿照 [91] 和 [93]，定义范畴 $\mathcal{A}$ 的**奇点范畴** 为 Verdier 商范畴

$$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\mathcal{A}):=D^b(\mathcal{A})/K^b(\mathcal{P}).$$

回顾 Gorenstein 范畴 (比较 [69], 3.2) 的概念。Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 称为**Gorenstein 范畴**，如果 $\mathcal{A}$ 具有足够多的投射对象和足够多的内射对象，且每个投射对象具有有限的内射维数，每个内射对象具有有限的投射维数。显然，Frobenius Abel 范畴是 Gorenstein 的；对于 Gorenstein artin 代数 A，其模范畴 $\mathcal{A}=A\text{-mod}$ 是 Gorenstein 范畴（比较 [51]）；对于分次 Gorenstein artin 代数 $A=\oplus_{n\geq 0}A_n$，其分次模范畴 $\mathcal{A}=A\text{-gr}$ 为 Gorenstein 范畴。

有如下的基本结论。

引理 2.4.5 *设 $\mathcal{A}$ 为 Gorenstein 范畴，$\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{I}$ 分别为其全体投射和内射对象组成的满子范畴。则有*

$$\begin{aligned}\sup\{\mathrm{inj.dim}\,P\mid P\in\mathcal{P}\}&=\sup\{n\in\mathbb{N}\mid \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(I,P)\neq 0,\ I\in\mathcal{I},P\in\mathcal{P}\}\\&=\sup\{\mathrm{proj.dim}\,I\mid I\in\mathcal{I}\}.\end{aligned}$$

*若该数是有限的，则称之为 $\mathcal{A}$ 的***Gorenstein 维数***，记为 d。则 $\mathcal{A}$ 中任一投射维数有限的对象具有投射维数和内射维数均不超过 d。*

证. 只证第一个等号。显然左边大于或等于右边。利用投射分解以及 dimension-shift，不难证明下面的一般事实：对于 $M \in \mathcal{A}$，设 $\mathrm{proj.dim}\, M = n < \infty$，则存在投射对象 P 使得 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(M, P) \neq 0$。用该事实，我们可以看出右边大于等于左边以及最后一个断言成立。 ■

回忆广义倾斜子范畴（比较 [49]，第三章或 [52]）的概念。设 $\mathcal{A}$ 为具有足够多投射对象的 Abel 范畴。满子范畴 $\omega \subseteq \mathcal{A}$ 称为**广义倾斜子范畴**，如果 ω 为自正交子范畴且在 $D^b(\mathcal{A})$ 中有范畴相等 $K^b(\omega) = K^b(\mathcal{P})$。根据命题 2.1.5 (2)，不难知道：自正交子范畴 ω 为广义倾斜的当且仅当其每个对象均具有有限的投射维数，且 $\mathcal{A}$ 中的每个投射对象均具有有限的 ω- 余分解维数。类似可定义**广义余倾斜子范畴**。对于 Gorenstein 范畴来说，不难看出广义倾斜和广义余倾斜是一致的（参见 [53]，引理 1.3）。

由引理 2.4.5，不难看出

推论 2.4.6 *设 $\mathcal{A}$ 为 Gorenstein 范畴，ω 为其广义倾斜子范畴。设 $\mathcal{A}$ 具有有限的 Gorenstein 维数，记为 d。则对于 $T \in \omega$，有 $\mathrm{proj.dim}\, T \leq d$ 且 $\mathrm{inj.dim}\, T \leq d$。*

回顾子范畴 $\omega \subseteq \mathcal{A}$ 称为**反变有限的**（[9], [10]），如果对于任何 $M \in \mathcal{A}$，均存在态射 $g : T \longrightarrow M$ 使得 $T \in \omega$ 且任何态射 $g' : T' \longrightarrow M$，$T' \in \omega$，均经由 g 分解。同时，这样的态射 g 称为 M 的**右 ω- 逼进**。对偶地，定义**正变有限**的概念。称范畴 ω 为**函子有限的**(functorially-finite)，如果它既是反变有限的也是正变有限的。

下结论类似于命题 2.4.2，但证明却必须完全不同。

命题 2.4.7 *设 $\mathcal{A}$ 为具有有限 Gorenstein 维数的 Gorenstein 范畴，$\omega \subseteq \mathcal{A}$ 为广义倾斜子范畴。设 ω 为函子有限的。则有*

(1) $\mathcal{X}_\omega = {}^\perp\omega = \breve{\omega}$ 且 $\widehat{\mathcal{X}_\omega} = \mathcal{A}$;　　(2) ${}_\omega\mathcal{X} = \omega^\perp = \widehat{\omega}$ 且 $\check{{}_\omega\mathcal{X}} = \mathcal{A}$。

证. 只证 (1)，可类似证 (2)。先证 $\mathcal{X}_\omega = {}^\perp\omega$。已知 $\mathcal{X}_\omega \subseteq {}^\perp\omega$。设 $M \in {}^\perp\omega$。则存在嵌入 $f : M \hookrightarrow I$，I 为内射对象。根据假设 $K^b(\omega) = K^b(\mathcal{P}) = K^b(\mathcal{I})$，再由命题 2.1.5(2)，我们有 $I \in K^b(\omega) \cap \omega^\perp = \widehat{\omega}$，进而存在正合列

$$0 \longrightarrow T^{-n} \longrightarrow T^{-n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow T^0 \xrightarrow{d^0} I \longrightarrow 0,$$

其中 $T^{-i}\in\omega$。故 $T^{-i}\in M^{\perp}$。因为子范畴 $M^{\perp}$ 对单态射的余核封闭，我们可由上长正合列导出 $K=\mathrm{Ker}d^0\in M^{\perp}$。这样，将函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,-)$ 作用在下面正合列上

$$0\longrightarrow K\longrightarrow T^0\xrightarrow{d^0} I\longrightarrow 0$$

就会得到正合列

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,K)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,T^0)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,I)\longrightarrow 0.$$

于是，存在态射 $f':M\longrightarrow T^0$ 使得 $d^0\circ f'=f$。特别地，f' 为单态射。

由于 ω 为正变有限的，可取 M 的左 ω- 逼进 $g:M\longrightarrow T$。故 f' 经由 g 分解，从而 g 为单态射。可取短正合列

$$0\longrightarrow M\xrightarrow{g} T\longrightarrow M'\longrightarrow 0.$$

我们断言 $M'\in{}^{\perp}\omega$。若是，则可对 M' 做同样的论证，从而最终证明 $M\in\mathcal{X}_{\omega}$。

事实上，设 $W\in\omega$，则有长正合列

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(T,W)\xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(g,W)}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,W)\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(M',W)\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(T,W)$$

由于 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(g,W)$ 为满射且 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(T,W)=0$，可知 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(M',W)=0$。另外，由 dimension-shift, 不难得到 $\mathrm{Ext}^{j+1}_{\mathcal{A}}(M',W)\simeq\mathrm{Ext}^{j}_{\mathcal{A}}(M,W)=0$，$j\geq 1$。于是 $M'\in{}^{\perp}\omega$，我们完成了断言的证明。

为了证完 (1)，下只需证 $\breve{\omega}\subseteq{}^{\perp}\omega$ 以及 $\widehat{{}^{\perp}\omega}=\mathcal{A}$。只要注意到推论 2.4.6，可以看出这些证明就与命题 2.4.2 后两段的证明是一样的，故而略去。 ■

根据上命题，可知定理 2.2.7 以及定理 2.3.1 的条件均得到满足。故，有如下定理（比较 Happel [51]，定理 4.6）。

定理 2.4.8 *设 $\mathcal{A}$ 为具有有限 Gorenstein 维数的 Gorenstein 范畴，$\omega\subseteq\mathcal{A}$ 为函子有限的广义倾斜子范畴。则有三角范畴间的等价*

$$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})\simeq\underline{\mathfrak{a}(\omega)}\simeq K^{\mathrm{ex}}(\omega).$$

作为本章的结尾，我们列出下面两个有用的推论。

推论 2.4.9 ([32]) 设 A 为 *Gorenstein artin* 代数，T 为其广义倾斜模。则有三角范畴间的等价

$$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(A) \simeq \underline{\mathfrak{a}(T)} \simeq K^{\mathrm{ex}}(\mathrm{add}T).$$

推论 2.4.10 (Rickard [99]，定理 2.1) 设 $\mathcal{A}$ 为 *Frobenius Abel* 范畴。记 $\mathcal{I}$ 其全体内射对象组成的满子范畴。则有三角范畴的等价

$$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\mathcal{A}) \simeq \underline{\mathcal{A}} \simeq K^{\mathrm{ex}}(\mathcal{I}).$$

第三章　广义 Serre 对偶

A. I. Bondal 和 M. M. Kapranov [21] 引入了三角范畴的 Serre 对偶的概念，并将经典的光滑射影簇上的 Serre 对偶诠释为相应有界导出范畴上的 Serre 对偶。正如文 [21] 指出的，Serre 对偶的存在性是与某些函子的可表示性密切相关的。I. Reiten 和 M. Van den Bergh [98] 证明了如下著名的结果：对态射空间有限 (Hom-finite) 的 Krull-Schmidt 三角范畴，Serre 对偶的存在性等价于其有 Auslander-Reiten 三角。

众所周知，对于任意态射空间有限的 Krull-Schmidt 三角范畴，其 Auslander-Reiten 理论仍是十分重要的，并且考虑其哪些不可分解对象上有 Auslander-Reiten 三角是代数表示论中一个很重要的课题。为此，本章对任意态射空间有限的预加法范畴引入广义 Serre 结构 (对偶) 的概念；对于 Krull-Schmidt 预三角范畴，我们证明了其广义 Serre 结构的基本定理：广义 Serre 函子定义域和值域的三角性，广义 Serre 函子的正合性，以及它们与 Auslander-Reiten 三角的关系。我们的结果推广了 Reiten-Van den Bergh 的定理 [98]。另外，我们显示地计算出了两类重要的有界导出范畴的广义 Serre 结构并给出其应用。

§3.1　广义 Serre 对偶的定义

本节，$\mathbb{K}$ 是一固定的域，$\mathcal{C}$ 是域 $\mathbb{K}$ 上态射空间有限的预加法范畴。将 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ 简记为 (X,Y)，任意 $X,Y\in\mathcal{C}$。

§3.1.1　定义及性质

记 $\mathbb{K}$-mod 为有限维 $\mathbb{K}$- 空间组成的范畴，记 $D=\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(-,\mathbb{K})$ 为其上的标准对偶。设范畴 $\mathcal{C}$ 如上。则 $D\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-)$ 为从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathbb{K}$-mod 的 $\mathbb{K}$- 线性加法函子，将此函子简记为 $D(X,-)$。类似地，有记号 $D(-,Y)$。回顾 $\mathbb{K}$- 线性函子 $F:\mathcal{C}\longrightarrow\mathbb{K}$-mod 称为**可表示的**，如果存在 $X\in\mathcal{C}$ 以及某个 $\mathbb{K}$- 线性函子间的自然同构 $F\simeq(-,X)$。类似地，定义**可表示的反变线性函子**。

定义 3.1.1 设 $\mathcal{C}$ 为域 $\mathbb{K}$ 上态射空间有限的预加法范畴。定义满子范畴 $\mathcal{C}_r$ 和 $\mathcal{C}_l$ 如下：

$$\mathcal{C}_r = \{X \in \mathcal{C} \mid \text{ 函子}D(X,-) \text{ 可表示}\}, \quad \mathcal{C}_l = \{X \in \mathcal{C} \mid \text{ 函子}D(-,X) \text{ 可表示}\}.$$

我们将构造加法函子 $S : \mathcal{C}_r \longrightarrow \mathcal{C}_l$。设 $X \in \mathcal{C}_r$。因为函子 $D(X,-)$ 可表示，故存在某个对象 $S(X) \in \mathcal{C}$ 使得有（$\mathbb{K}$- 线性）函子的自然同构

$$\phi_X : D(X,-) \simeq (-, S(X)).$$

注意到有函子的同构 $D\phi_X : D(-,S(X)) \simeq (X,-)$，于是，函子 $D(-,S(X))$ 可表示，故有 $S(X) \in \mathcal{C}_l$。设 $f : X \longrightarrow X'$ 为 $\mathcal{C}_r$ 中的态射。则根据 Yoneda 引理，唯一存在态射 $S(f) : S(X) \longrightarrow S(X')$ 使得有如下的函子交换图

$$\begin{tikzcd}
D(X,-) \arrow[r, "\phi_X"] \arrow[d, "D(f,-)"] & (-,S(X)) \arrow[d, dotted, "(-,S(f))"] \\
D(X',-) \arrow[r, "\phi_Y"] & (-,S(X'))
\end{tikzcd}$$

由函子 S 的定义，易知 $S(f+g) = S(f) + S(g)$，即，S 为加法函子。事实上，函子 S 还是 $\mathbb{K}$- 线性的。

设 $X \in \mathcal{C}_r, Y \in \mathcal{C}$。定义同构

$$\phi_{X,Y} : D(X,Y) \simeq (Y, S(X))$$

使得 $\phi_{X,Y} = \phi_X(Y)$。则 $\phi_{X,Y}$ 对于变元 Y 是自然的。根据函子 S 的定义，可知 $\phi_{X,Y}$ 对于变元 X 也是自然的, 故 $\phi_{X,Y}$ 是**双自然的**。定义双线性型

$$(-,-)_{X,Y} : (X,Y) \times (Y, S(X)) \longrightarrow \mathbb{K}$$

使得 $(f,\ g)_{X,Y} = \phi_{X,Y}^{-1}(g)(f)$，其中 $f : X \longrightarrow Y$，$g : Y \longrightarrow S(X)$。定义**迹函数**

$$\mathrm{Tr}_X : (X, S(X)) \longrightarrow \mathbb{K}$$

使得 $\mathrm{Tr}_X(f) = (\mathrm{Id}_X, f)_{X,X}$，其中 $f : X \longrightarrow S(X)$。

定义 3.1.2 *(1)* 如上定义的六元组 $(S,\ \mathcal{C}_r,\ \mathcal{C}_l,\ \phi_{-,-},\ (-,-),\ \mathrm{Tr}_-)$ 称为范畴 $\mathcal{C}$ 的**广义 Serre 结构**。称 S 为**广义 Serre 函子**，子范畴 $\mathcal{C}_r$ 和 $\mathcal{C}_l$ 分别称为 S 的**定义域**和**值域**。

(2) 若 $\mathcal{C}_r = \mathcal{C}$，我们称范畴 $\mathcal{C}$**有右 Serre 对偶**; 若 $\mathcal{C}_l = \mathcal{C}$，则称 $\mathcal{C}$**有左 Serre 对偶**。若 $\mathcal{C}$ 既有右 *Serre* 对偶又有左 *Serre* 对偶，则称 $\mathcal{C}$**有 Serre 对偶**，此时称相应的函子 S 为 $\mathcal{C}$ 的**Serre 函子**。

注记 3.1.3 范畴 $\mathcal{C}$ 的广义 *Serre* 结构的选取完全由函子的自然同构 $\phi_X, X \in \mathcal{C}_r$，决定。但根据 *Yoneda* 引理，不难看出不同的 ϕ_X 诱导了互为同构的广义 *Serre* 函子。在这个意义下，我们认为广义 *Serre* 函子以及相应的广义 *Serre* 结构都是唯一的。结合下命题 *(2)*，不难看出广义 *Serre* 结构中的后面三个元素是互相可决定的。另外，本文有时混淆广义 *Serre* 结构与**广义 Serre 对偶**。

命题 3.1.4 设 $\mathcal{C}$ 及其广义 *Serre* 结构如上。则有：
(1) 双线性型 $(-,-)$ 满足

$$(f \circ \theta,\ g)_{X',Y} = (f,\ S(\theta) \circ g)_{X,Y} \tag{3.1.1}$$

$$(f,\ g \circ \gamma)_{X,Y'} = (\gamma \circ f,\ g)_{X,Y}, \tag{3.1.2}$$

其中 $\theta : X' \longrightarrow X$，$\gamma : Y' \longrightarrow Y$。(注：在式 *(3.1.1)* 中，$f : X \longrightarrow Y$，$g : Y \longrightarrow S(X')$；在式 *(3.1.2)* 中，$f : X \longrightarrow Y'$，$g : Y \longrightarrow S(X)$。)
(2) 有等式 $(f,\ g)_{X,Y} = \mathrm{Tr}_X(g \circ f)$ 成立，且有

$$\mathrm{Tr}_X(g \circ f) = \mathrm{Tr}_Y(S(f) \circ g), \tag{3.1.3}$$

其中 $f : X \longrightarrow Y$，$g : Y \longrightarrow S(X)$。
(3) 广义 *Serre* 函子 $S : \mathcal{C}_r \longrightarrow \mathcal{C}_l$ 为范畴（的 $\mathbb{K}$- 线性）等价。

证. (1) 事实上，这两个等式均可由同构 $\phi_{-,-}$ 的双自然性直接得到。为了证式 (3.1.1)，考虑交换图（即，$\phi_{X,Y}$ 关于 X 的自然性）

$$\begin{tikzcd}
D(X',Y) \arrow[r, "\phi_{X',Y}"] \arrow[d, "D(\theta,Y)"] & (Y,S(X')) \arrow[d, "(Y,S(\theta))"] \\
D(X,Y) \arrow[r, "\phi_{X,Y}"] & (Y,S(X))
\end{tikzcd}$$

因此，有

$$\begin{aligned}
(f \circ \theta,\ g)_{X',Y} \ &= \ \phi^{-1}_{X',Y}(g)(f \circ \theta) \\
= D(\theta,Y)(\phi^{-1}_{X',Y}(g))(f) \ &= \ \phi^{-1}_{X,Y}((Y,S(\theta))(g))(f) \\
= \phi^{-1}_{X,Y}(S(\theta) \circ g)(f) \ &= \ (f,\ S(\theta) \circ g)_{X,Y},
\end{aligned}$$

其中第一、五个等号由双线性型的定义得到，而第三个等号由图表交换得到。类似可证式 (3.1.2)。

(2) 由式 (3.1.2)，取 $X = Y'$，$f = \mathrm{Id}_X$，则有 $(\mathrm{Id}_X,\ g \circ \gamma)_{X,X} = (\gamma,\ g)_{X,Y}$，于是 $\mathrm{Tr}_X(g \circ \gamma) = (\gamma,\ g)_{X,Y}$，即为第一个等式。

为了证式 (3.1.3)，由第一个等式，只需证对 $f : X \longrightarrow Y$ 和 $g : Y \longrightarrow S(X)$，有下式成立

$$(f,\ g)_{X,Y} = (g,\ S(f))_{Y,S(X)}. \tag{3.1.4}$$

事实上，我们有

$$\begin{aligned}(f,\ g)_{X,Y} &= (f \circ \mathrm{Id}_X,\ g)_{X,Y} \quad \text{用式(3.1.1)}\\ &= (\mathrm{Id}_X,\ S(f) \circ g)_{X,X} \quad \text{用式(3.1.2)}\\ &= (g,\ S(f))_{Y,S(X)}.\end{aligned}$$

(3) 我们已注意到了函子 S 是 $\mathbb{K}$- 线性的，下只需证 S 是满忠实且稠密的。设 $X, Y \in \mathcal{C}_r$。考虑如下同构的合成

$$\Phi : (X, Y) \stackrel{D(\phi_{X,Y})^{-1}}{\longrightarrow} D(Y, S(X)) \stackrel{\phi_{Y,S(X)}}{\longrightarrow} (S(X), S(Y)).$$

注意到 $D(\phi_{X,Y})^{-1}(f)(g) = (f,\ g)_{X,Y}$ 以及 $F(g) = (g,\ \phi_{Y,S(X)}(F))_{Y,S(X)}$，任意 $F \in D(Y, S(X))$，则我们可得 $(f,\ g)_{X,Y} = (g,\ \Phi(f))$。将之与式 (3.1.4) 进行比较并注意到双线性型的非退化性，我们得出 $S(f) = \Phi(f)$，于是，函子 S 是满忠实的。

为了证明 S 是稠密的，任取 $X' \in \mathcal{C}_l$。由于函子 $D(-, X')$ 可表示，可设有函子的同构 $D(-, X') \simeq (X, -)$。于是 $D(X, -) \simeq (-, X')$，因此 $X \in \mathcal{C}_r$ 且有函子的同构

$$(-, S(X)) \stackrel{\phi_X^{-1}}{\simeq} D(X, -) \simeq (-, X').$$

由 Yoneda 引理，有同构 $S(X) \simeq X'$。这就证明了函子 S 是稠密的。证毕！ ■

§3.1.2 定义域上的 Serre 对偶

设 $\mathcal{C}$ 及其广义 Serre 结构如上小节。本小节研究广义 Serre 函子 S 的定义域 $\mathcal{C}_r$ 何时有 Serre 对偶。

首先，我们对范畴 $\mathcal{C}$ 引入两个条件：

(C) 任意给定 $X, X' \in \mathcal{C}_r$，$Z \in \mathcal{C}$，存在态射 $s: Z' \longrightarrow Z$ 使得 $Z' \in \mathcal{C}_r$ 且满足 $(X, Z') \overset{(X,s)}{\simeq} (X, Z)$，$(Z', X') \overset{(s,X')}{\simeq} (Z, X')$。

(C') 任意给定 $Y, Y' \in \mathcal{C}_l$，$Z \in \mathcal{C}$，存在态射 $s: Z \longrightarrow Z'$ 使得 $Z' \in \mathcal{C}_l$ 且满足 $(Y, Z) \overset{(Y,s)}{\simeq} (Y, Z')$，$(Z', Y') \overset{(s,Y')}{\simeq} (Z, Y')$。

引理 3.1.5 *设范畴 $\mathcal{C}$ 如上。则有*
(1) 若 $\mathcal{C}_l \subseteq \mathcal{C}_r$，则有 $(\mathcal{C}_r)_r = \mathcal{C}_r$。
(2) 反之，若 $(\mathcal{C}_r)_r = \mathcal{C}_r$ 且 $\mathcal{C}$ 满足条件 (C)，则有 $\mathcal{C}_l \subseteq \mathcal{C}_r$。

证. (1) 是很容易的。设 $X \in \mathcal{C}_r$。则有 $\mathcal{C}$ 上的函子同构 $D(X, -) \simeq (-, S(X))$。注意到 $S(X) \in \mathcal{C}_l \subseteq \mathcal{C}_r$，于是作为 $\mathcal{C}_r$ 上的函子 $D(X, -)$ 是表示的，由子范畴 $(\mathcal{C}_r)_r$ 的定义知 $X \in (\mathcal{C}_r)_r$，即有 $(\mathcal{C}_r)_r = \mathcal{C}_r$。

为了证 (2)，设 $X \in \mathcal{C}_r$。因为 $(\mathcal{C}_r)_r = \mathcal{C}_r$，所以有 $\mathcal{C}_r$ 上的函子同构 $\phi: D(X, -) \simeq (-, X')$，其中 $X' \in \mathcal{C}_r$。我们断言同构 ϕ 可延拓到 $\mathcal{C}$ 上。于是，$S(X) \simeq X'$。由于 $S(\mathcal{C}_r) = \mathcal{C}_l$，这就证明了 $\mathcal{C}_l \subseteq \mathcal{C}_r$。

事实上，任取 $Z \in \mathcal{C}$，由条件 (C) 得到态射 $s: Z' \longrightarrow Z$，$Z' \in \mathcal{C}_r$。则有下列同构

$$D(X, Z) \overset{D(X,s)}{\simeq} D(X, Z') \overset{\phi_{Z'}}{\simeq} (Z', X') \overset{(s,X')}{\simeq} (Z, X').$$

记 $\mathcal{C}_r$ 上的广义 Serre 函子为 $S_{\mathcal{C}_r}$ 并设 Tr 为 $\mathcal{C}_r$ 上的迹函数。则有 $S_{\mathcal{C}_r}(X) = X'$ 且 $\phi_{Z'}^{-1}(f)(g) = \mathrm{Tr}_X(f \circ g)$，其中 $f: Z' \longrightarrow X'$，$g: X \longrightarrow Z'$。则易知上面的合成同构的逆可由下式给出

$$(Z, X') \simeq D(X, Z), \quad f \mapsto (g \mapsto \mathrm{Tr}_X(f \circ g)).$$

这样就不难证明，我们所得到的同构 $D(X, Z) \simeq (Z, X')$ 关于 $Z \in \mathcal{C}$ 是自然的，即，有 $\mathcal{C}$ 上的函子同构 $D(X, -) \simeq (-, X')$。证毕! ■

对偶地，我们有

引理 3.1.6 *设范畴 $\mathcal{C}$ 如上。则有*

(*1*) *若 $\mathcal{C}_r \subseteq \mathcal{C}_l$，则有 $(\mathcal{C}_l)_l = \mathcal{C}_l$。*

(2) 反之，若 $(\mathcal{C}_l)_l = \mathcal{C}_l$ 且 $\mathcal{C}$ 满足条件 (C')，则有 $\mathcal{C}_r \subseteq \mathcal{C}_l$。

我们得到如下的有趣结论。

命题 3.1.7 *设 $\mathcal{C}$ 及其广义 Serre 结构如上。设 $\mathcal{C}$ 满足条件 (C) 以及 (C')。则下述条件等价*

(*1*) *范畴 $\mathcal{C}_r$ 有 Serre 对偶。*

(2) 有 $\mathcal{C}_r = \mathcal{C}_l$。

(3) 范畴 $\mathcal{C}_l$ 有 Serre 对偶。

证. 根据引理 3.1.5(1) 和 3.1.6(2)，易知 (2) $\Rightarrow$ (1), (3)。下只证 (1) $\Rightarrow$ (2)。(3) $\Rightarrow$ (2) 可类似证明。

为了证 (1) $\Rightarrow$ (2)，设 $\mathcal{C}_r$ 有 Serre 对偶，即 $(\mathcal{C}_r)_r = \mathcal{C}_r = (\mathcal{C}_r)_l$。根据引理 3.1.5(2)，有 $\mathcal{C}_l \subseteq \mathcal{C}_r$。于是，有 $(\mathcal{C}_l)_l \supseteq \mathcal{C}_l \cap (\mathcal{C}_r)_l$ (这里我们用到如下的简单事实：对于范畴 $\mathcal{C}_r$ 的任何加法满子范畴 $\mathcal{D}$，有 $\mathcal{D}_l \supseteq (\mathcal{C}_r)_l \cap \mathcal{D}$)。因为 $(\mathcal{C}_r)_l = \mathcal{C}_r$ 以及 $\mathcal{C}_l \subseteq \mathcal{C}_r$，所以有 $(\mathcal{C}_l)_l = \mathcal{C}_l$。再由引理 3.1.6(2)，我们得到 $\mathcal{C}_r \subseteq \mathcal{C}_l$。证毕! ■

§3.2 主定理及其证明

§3.2.1 主定理

本小节，$\mathcal{C}$ 为域 $\mathbb{K}$ 上态射空间有限的 Krull-Schmidt 预三角范畴。记其平移函子为 [1]。

回顾（[49], 第 31 页）范畴 $\mathcal{C}$ 中的**Auslander-Reiten 三角**是指正合三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

满足

(AR1) 对象 X，Z 均不可分解。

(AR2) $w \neq 0$。

(AR3) 态射 v 是**右几乎可裂**的，即，任给 $\mathcal{C}$ 中非 retraction 的态射 $f: W \longrightarrow Z$，则存在 $f': W \longrightarrow Y$ 使得 $v \circ f' = f$。

对于上 Auslander-Reiten 三角，称 X 和 Z 分别为其**左端**和**右端**。根据 [49], Auslander-Reiten 三角中的态射 u 是**左几乎可裂的**，且在同构意义下，Auslander-Reiten 三角由 X 或 Z 唯一决定。由命题 1.1.3(2)(或参见 [50]，1.2)，不难得到条件 (AR3) 可换成：

(AR3') 对于任给 $\mathcal{C}$ 中非 retraction 的态射 $f: W \longrightarrow Z$，有 $w \circ f = 0$。

关于一般预三角范畴上的 Auslander-Reiten 三角的一些等价刻画，可参见 [72]，引理 2.6。

下面的定理为本节的主要结论，我们视之为关于态射空间有限的 Krull-Schmidt 预三角范畴上的广义 Serre 结构的基本定理。

定理 3.2.1 (比较 [30]，定理) *设 $\mathcal{C}$ 是域 $\mathbb{K}$ 上态射空间有限的 Krull-Schmidt 预三角子范畴。记 $S: \mathcal{C}_r \longrightarrow \mathcal{C}_l$ 为其上的广义 Serre 函子。则有*
(1) 子范畴 $\mathcal{C}_r$ 以及 $\mathcal{C}_l$ 均为有厚度的三角子范畴。
(2) 存在自然同构 $\eta_X: S(X[1]) \longrightarrow S(X)[1]$，$X \in \mathcal{C}_r$，使得 (S, η) 成为 $\mathcal{C}_r$ 和 $\mathcal{C}_l$ 之间的三角等价。
(3) 设 $X \in \mathcal{C}$ 不可分解。则 X 成为某个 Auslander-Reiten 三角的右端（左端）当且仅当 $X \in \mathcal{C}_r$ ($X \in \mathcal{C}_l$)。

注记 3.2.2 *定理中的第 2 个断言推广了 [21]，命题 3.3 以及 [19]，定理 A.4.4，而第三个断言推广了 [98]，命题 I.2.3。*

§3.2.2 凝聚函子与 Freyd-Verdier 定理

本节为证明定理做准备。我们将给出 Freyd-Verdier 定理的完整证明。

设 $\mathcal{C}$ 为加法范畴。记 $(\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Ab})$ 为由从 $\mathcal{C}$ 到 Abel 群范畴的反变加法函子组成的大范畴（注意：因为函子间的态射全体不能形成一个集合，所以 $(\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Ab})$

通常不是范畴，但我们还是可以定义自然态射的核、余核以及函子的正合列等概念。事实上，我们可假装 $(\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Ab})$ 是范畴)。记 $\mathbf{p}: \mathcal{C} \longrightarrow (\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Ab})$ 为 Yoneda 函子，即 $\mathbf{p}(C) = (-, C)$。这里，我们仍用 $(-, C) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C)$ 表示相应的可表示函子。由 Yoneda 引理可知函子 $\mathbf{p}$ 为满嵌入。

回顾 ([2], [3]) 函子 $F \in (\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Ab})$ 称为**凝聚函子**，如果存在函子的正合列 $(-, C_0) \longrightarrow (-, C_1) \longrightarrow F \longrightarrow 0$, 其中 $C_0, C_1 \in \mathcal{C}$。记 $\widehat{\mathcal{C}}$ 为凝聚函子组成的满子范畴。注意到 $\widehat{\mathcal{C}}$ 是范畴，即凝聚函子间的态射总形成集合。

为了表述关于凝聚函子的基本结论，需回顾一些概念。态射 $f: C_0 \longrightarrow C_1$ 的**伪余核**是指态射 $k: K \longrightarrow C_0$ 满足 $f \circ k = 0$，且任意 $k': K' \longrightarrow C_0$ 满足 $f \circ k' = 0$ 均经由 k 分解，或等价地，态射 k 使得函子序列 $(-, K) \stackrel{(-,k)}{\longrightarrow} (-, C_0) \stackrel{(-,f)}{\longrightarrow} (-, C_1)$ 正合。称范畴 $\mathcal{C}$**有伪余核**，如果其每个态射均有伪余核。对偶地可定义**伪核**。

以下结论是关于凝聚函子的基本结论。

命题 3.2.3 (Auslander) *设 $\mathcal{C}$ 为加法范畴。则有*
(1) 子范畴 $\widehat{\mathcal{C}} \subseteq (\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Ab})$ 是对余核以及扩张封闭的。特别地，$\widehat{\mathcal{C}} \subseteq (\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Ab})$ 对直和项封闭。
(2) $\widehat{\mathcal{C}} \subseteq (\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Ab})$ 为 Abel 子范畴当且仅当 $\mathcal{C}$ 有伪余核。此时，范畴 $\widehat{\mathcal{C}}$ 为具有足够多投射对象的 Abel 范畴。

证. 第一个断言可结合 [2], 命题 2.1 a) 和 b) 得到。注意到，$\widehat{\mathcal{C}} \subseteq (\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Ab})$ 对直和项封闭等价于 $\widehat{\mathcal{C}}$ 幂等分裂，而 $\widehat{\mathcal{C}}$ 有余核，则其幂等态射均分裂 (参见本文第四章引理 4.1.1(2))。

第二个断言可由 [2], 命题 2.1 b) 或 [3], 第 41 页命题 a) 得到。注意到，由 Yoneda 引理，我们可得 $\mathbf{p}(C)$ 是投射对象，$C \in \mathcal{C}$，于是不难得出范畴 $\widehat{\mathcal{C}}$ 具有足够多投射对象。 ■

引理 3.2.4 ([73], 第 16 页) *设 $\mathcal{C}$ 为预三角范畴。则 $\mathcal{C}$ 有伪核以及伪余核。*

证. 设 $v: Y \longrightarrow Z$ 为 $\mathcal{C}$ 中任一态射。取正合三角

$$X \stackrel{u}{\longrightarrow} Y \stackrel{v}{\longrightarrow} Z \stackrel{w}{\longrightarrow} X[1].$$

根据命题 1.1.3(2)，对于任意 $C\in\mathcal{C}$，函子 $(C,-)$ 和 $(-,C)$ 均为上同调的，这样不难证明 u 和 w 分别为 v 的伪核和伪余核。 ■

从现在开始，$\mathcal{C}$ 为预三角范畴。我们将对凝聚函子引入**双边分解**。设 $F\in\widehat{\mathcal{C}}$。取正合列

$$(-,Y)\xrightarrow{(-,v)}(-,Z)\longrightarrow F\longrightarrow 0.$$

取正合三角 $X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\xrightarrow{w}X[1]$。则有函子的长正合列

$$\cdots\longrightarrow(-,Z[-1])\xrightarrow{(-,w[-1])}(-,X)\xrightarrow{(-,u)}(-,Y)\xrightarrow{(-,v)}(-,Z)\xrightarrow{(-,w)}(-,X[1])\longrightarrow\cdots$$

注意到 $F\simeq \mathrm{Coker}(-,v)$。因此，我们得到如下两个长正合列，即为函子 F 的双边分解：

$$\cdots\longrightarrow(-,Z[-1])\xrightarrow{(-,w[-1])}(-,X)\xrightarrow{(-,u)}(-,Y)\xrightarrow{(-,v)}(-,Z)\longrightarrow F\longrightarrow 0,$$

以及

$$0\longrightarrow F\longrightarrow(-,X[1])\xrightarrow{(-,u[1])}(-,Y[1])\xrightarrow{(-,v[1])}(-,Z[1])\xrightarrow{(-,w[1])}(-,X[2])\longrightarrow\cdots$$

注意到上面第一个长正合列是 F 的投射分解。

记 $\mathrm{Coho}(\mathcal{C})$ 为 $(\mathcal{C}^{op},\mathrm{Ab})$ 中由上同调函子组成的满子范畴。设 $F,G\in\widehat{\mathcal{C}}$，记 $\mathrm{Ext}^i(F,G)$ 为其在范畴 $\widehat{\mathcal{C}}$ 中相应的 Ext 群，$i\geq 0$。

我们观察到如下结论。

引理 3.2.5 (比较 [90], 第 258 页) 设 $H\in\widehat{\mathcal{C}}$。则 $H\in\mathrm{Coho}(\mathcal{C})$ 当且仅当 $\mathrm{Ext}^i(F,H)=0$，其中 F 为任意凝聚函子，$i\geq 1$。

证. 设 $F\in\widehat{\mathcal{C}}$。我们利用上面得到的投射分解来计算 $\mathrm{Ext}^i(F,H)$。再注意到 Yoneda 引理 $((-,C),H)\simeq H(C)$。我们得到 $\mathrm{Ext}^i(F,H)$ 就是下面复形的第 i 处上同调群

$$0\longrightarrow H(Z)\longrightarrow H(Y)\longrightarrow H(X)\longrightarrow H(Z[-1])\longrightarrow\cdots$$

（注：$H(Z)$ 位于第 0 处。）若 H 为上同调函子，则上面的复形在非零处均正合，于是有 $\mathrm{Ext}^i(F,H)=0$，$i\geq 1$。

另一方面，假设 $\mathrm{Ext}^i(F,H)=0$，$i\geq 1$。为了证明 H 为上同调函子，任取正合三角 $X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\xrightarrow{w}X[1]$。取 $F=\mathrm{Coker}(-,v)$ 为凝聚函子。由前一段的论证可知，$\mathrm{Ext}^i(F,H)=0$ 就意味着复形

$$0\longrightarrow H(Z)\longrightarrow H(Y)\longrightarrow H(X)\longrightarrow H(Z[-1])\longrightarrow\cdots$$

在非零处均正合。特别地，我们得出函子 H 是上同调的（参考注记 1.1.2）。■

记 $\mathrm{add}(\mathbf{p}(\mathcal{C}))$ 为由 $(\mathcal{C}^{op},\mathrm{Ab})$ 中可表示函子的直和项组成的满子范畴。不难看出 $\mathrm{add}(\mathbf{p}(\mathcal{C}))\subseteq\mathrm{Coho}(\mathcal{C})\cap\widehat{\mathcal{C}}$。下面的定理（以及它的不同形式）可从 [40]，第 127-133 页，[111]，第 135-144 页, [90]，第 169 页或 [73] 中找到。

定理 3.2.6 （Freyd-Verdier）设 $\mathcal{C}$ 为预三角范畴。则范畴 $\widehat{\mathcal{C}}$ 为 *Frobenius Abel* 范畴，其投射 - 内射对象的全体恰为 $\mathrm{Coho}(\mathcal{C})\cap\widehat{\mathcal{C}}=\mathrm{add}(\mathbf{p}(\mathcal{C}))$。

证. 根据命题 3.2.3 以及引理 3.2.4，$\widehat{\mathcal{C}}\subseteq(\mathcal{C}^{op},\mathrm{Ab})$ 为 Abel 子范畴，$\widehat{\mathcal{C}}$ 具有足够多投射对象，且其投射对象的全体为 $\mathrm{add}(\mathbf{p}(\mathcal{C}))$。设 $C\in\mathcal{C}$。则函子 $(-,C)$ 为上同调函子。根据引理 3.2.5，对任意 $F\in\widehat{\mathcal{C}}$，有 $\mathrm{Ext}^i(F,(-,C))=0$，$i\geq 1$。于是，函子 $\mathbf{p}(C)=(-,C)$ 在 $\widehat{\mathcal{C}}$ 中为内射对象，因此 $\widehat{\mathcal{C}}$ 中的每个投射对象均为内射对象。

我们断言 $\widehat{\mathcal{C}}$ 有足够多的内射对象且每个内射对象均投射。为了证明该断言，设 F 为任一凝聚函子。取正合列 $(-,Y)\xrightarrow{(-,v)}(-,Z)\longrightarrow F\longrightarrow 0$。则由上面关于双边分解的讨论可知，存在单态射 $F\longrightarrow(-,X[1])$。但我们已证 $(-,X[1])$ 为内射对象，这样 F 就嵌入到了一个内射对象中，即，$\widehat{\mathcal{C}}$ 有足够多的内射对象。实际上，从这个论证易知每个内射对象均是投射对象。若 F 内射，则如上的单态射 $F\longrightarrow(-,X[1])$ 将分裂，于是 F 为投射对象。这就证明了断言，进而，我们证明了 $\widehat{\mathcal{C}}$ 为 Frobenius Abel 范畴且其投射 - 内射对象的全体为 $\mathrm{add}(\mathbf{p}(\mathcal{C}))$。

最后证明 $\mathrm{Coho}(\mathcal{C})\cap\widehat{\mathcal{C}}=\mathrm{add}(\mathbf{p}(\mathcal{C}))$。我们已注意到 $\mathrm{add}(\mathbf{p}(\mathcal{C}))\subseteq\mathrm{Coho}(\mathcal{C})\cap\widehat{\mathcal{C}}$。设 $H\in\mathrm{Coho}(\mathcal{C})\cap\widehat{\mathcal{C}}$。则根据引理 3.2.5，有 $\mathrm{Ext}^i(F,H)=0$，其中 $F\in\widehat{\mathcal{C}}$，$i\geq 1$。因此，$H$ 为 $\widehat{\mathcal{C}}$ 中的内射对象，故由上面的结论知 $H\in\mathrm{add}(\mathbf{p}(\mathcal{C}))$。■

§3.2.3 主定理的证明

本节将通过证明三个命题来得到主定理的证明。设 $\mathcal{C}$ 为域 $\mathbb{K}$ 上态射空间

有限的 Krull-Schmidt 预三角范畴。

命题 3.2.7 子范畴 $\mathcal{C}_r$ 以及 $\mathcal{C}_l$ 均为有厚度的三角子范畴。

证. 只证 $\mathcal{C}_r$ 为有厚度的三角子范畴。首先，我们断言 $\mathcal{C}_r = \{X \in \mathcal{C} \mid D(X,-) \in \widehat{\mathcal{C}}\}$。

为了证明这个断言，注意到 $\mathcal{C}$ 是 Krull-Schmidt 的，特别地，$\mathcal{C}$ 中幂等态射可裂，于是有 $\mathrm{add}(\mathbf{p}(\mathcal{C})) = \mathbf{p}(\mathcal{C})$。又注意到，函子 $D(X,-)$ 总是上同调的。因此，若 $D(X,-)$ 为凝聚函子，则由 Freyd-Verdier 定理知 $D(X,-) \in \mathrm{Coho}(\mathcal{C}) \cap \widehat{\mathcal{C}} = \mathrm{add}(\mathbf{p}(\mathcal{C})) = \mathbf{p}(\mathcal{C})$，即 $D(X,-)$ 可表示。于是，函子 $D(X,-)$ 为凝聚函子当且仅当它是可表示的。这样就容易看出断言成立。

设 $X \in \mathcal{C}_r$，$n \in \mathbb{Z}$。则 $D(X[n],-) \simeq D(X,-) \circ [-n]$ 也为可表示的，所以 $X[n] \in \mathcal{C}_r$，即子范畴 $\mathcal{C}_r$ 对平移函子封闭。设 $X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \to X'[1]$ 为正合三角，其中 $X', X'' \in \mathcal{C}_r$。于是有函子的正合列

$$(X'[1],-) \longrightarrow (X'',-) \longrightarrow (X,-) \longrightarrow (X',-) \longrightarrow (X''[-1],-),$$

进而下面的序列

$$D(X''[-1],-) \longrightarrow D(X',-) \longrightarrow D(X,-) \longrightarrow D(X'',-) \longrightarrow D(X'[1],-)$$

也是正合的。因为 $X', X'' \in \mathcal{C}_r$，在上正合列中除了 $D(X,-)$ 其他四项均为凝聚函子。根据命题 3.2.3 和引理 3.2.4，$\widehat{\mathcal{C}} \subseteq (\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Ab})$ 为对扩张封闭的 Abel 子范畴。这样，我们就得出了 $D(X,-) \in \widehat{\mathcal{C}}$，再根据上断言，我们得到 $X \in \mathcal{C}_r$。于是 $\mathcal{C}_r$ 是三角子范畴。最后注意到 $\mathcal{C}_r$ 是有厚度的，即对直和项封闭，这是因为可表示函子的直和项还是可表示的 (再次注意到范畴 $\mathcal{C}$ 幂等可裂)。证毕! ■

下面，我们注意到上证明的一个有趣的推论。设 $\mathcal{C}$ 为本质小且态射空间有限的 Krull-Schmidt 范畴。记 $(\mathcal{C}^{op}, \mathbb{K}\text{-mod}) \subseteq (\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Ab})$ 为由所有取值为有限维空间的函子组成的满子范畴。易知，$\widehat{\mathcal{C}} \subseteq (\mathcal{C}^{op}, \mathbb{K}\text{-mod})$。注意到，我们有标准的对偶

$$D : (\mathcal{C}^{op}, \mathbb{K}\text{-mod}) \longrightarrow (\mathcal{C}, \mathbb{K}\text{-mod}) \text{ 和 } D : (\mathcal{C}, \mathbb{K}\text{-mod}) \longrightarrow (\mathcal{C}^{op}, \mathbb{K}\text{-mod}).$$

称范畴 $\mathcal{C}$ 为**对偶簇**，如果对偶函子 D 保持凝聚函子。容易看出，范畴 $\mathcal{C}$ 为对偶簇当且仅当 $\mathcal{C}$ 有伪核和伪余核，且 $D(X,-) \in \widehat{\mathcal{C}}$，$D(-,X) \in \widehat{\mathcal{C}^{op}}$，任意 $X \in \mathcal{C}$ (参见 [5])。回顾范畴 $\mathcal{C}$ 有 Serre 对偶当且仅当 $\mathcal{C}_r = \mathcal{C} = \mathcal{C}_l$，参见定义 3.1.2 (2)。

于是，结合引理 3.2.4 和命题 3.2.7 证明中的断言 (及其对偶)，我们得出

推论 3.2.8 (比较 [58], 命题2.1.1) 设 $\mathcal{C}$ 为本质小且态射空间有限的 *Krull-Schmidt* 预三角范畴。则 $\mathcal{C}$ 有 *Serre* 对偶当且仅当 $\mathcal{C}$ 为对偶簇。

下面的结果本质上属于 A. I. Bondal- M. M. Kapranov 和 M. Van den Bergh。我们这里给出的证明是模仿 M. Van den Bergh 的证明。

命题 3.2.9 设预三角范畴 $\mathcal{C}$ 如上。则存在自然同构 $\eta_X : S(X[1]) \longrightarrow S(X)[1]$, $X \in \mathcal{C}_r$，使得 (S, η) 为从 $\mathcal{C}_r$ 到 $\mathcal{C}_l$ 的正合函子。

证. 第一步：构造自然同构 η，即对 $X \in \mathcal{C}_r$ 构造 η_X。

设 $X \in \mathcal{C}_r$，$Y \in \mathcal{C}$。考虑如下双自然同构的合成

$$\begin{aligned}\Psi_{X,Y} : (Y, S(X[1])) &\xrightarrow{\phi^{-1}_{X[1],Y}} D(X[1], Y) \xrightarrow{-D\circ[-1]} D(X, Y[-1]) \\ &\xrightarrow{\phi_{Y[-1],X}} (Y[-1], S(X)) \xrightarrow{[1]} (Y, S(X)[1]),\end{aligned}$$

其中 ϕ 为在定义广义 Serre 结构时所用的自然同构，参见 §3.1.1。仔细研究上面的合成，不难得到，对于任意 $f : X \longrightarrow Y[-1]$，$g : Y \longrightarrow S(X[1])$,

$$(f,\ \Psi_{X,Y}(g)[-1])_{X,Y[-1]} = -(f[1],\ g)_{X[1],Y}.$$

注意到 Ψ 诱导了函子的自然同构 $\Psi_X : (-, S(X[1])) \simeq (-, S(X)[1])$。则根据 Yoneda 引理，唯一存在同构 $\eta_X : S(X[1]) \longrightarrow S(X)[1]$ 使得 $\Psi_X = (-, \eta_X)$，即有 $\Psi_{X,Y}(g) = \eta_X \circ g$。注意到因为 $\Psi_{X,Y}$ 是双自然的，所以 η_X 对 X 是自然的，即 $\eta_X : S(X)[1] \longrightarrow S(X[1])$ 为自然同构。从 η_X 的定义，不难得到：

$$(f,\ (\eta_X \circ g)[-1])_{X,Y[-1]} = -(f[1],\ g)_{X[1],Y}. \tag{3.2.1}$$

第二步：证明两个断言。

设 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ 为 $\mathcal{C}_r$ 中的正合三角。考虑如下三角

$$S(X) \xrightarrow{S(u)} S(Y) \xrightarrow{S(v)} S(Z) \xrightarrow{\eta_X\circ S(w)} S(X)[1]. \tag{3.2.2}$$

我们的目的就是证明该三角是（$\mathcal{C}_l$ 中的）正合三角。

断言一：由三角 (3.2.2) 诱导的函子序列是正合的

$$(-,S(Y))\longrightarrow(-,S(Z))\longrightarrow(-,S(X)[1])\longrightarrow(-,S(Y)[1])\longrightarrow(-,S(Z)[1]).$$

事实上，由正合三角 $X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\xrightarrow{w}X[1]$，我们可得到如下的函子正合序列

$$(Z[1],-)\longrightarrow(Y[1],-)\longrightarrow(X[1],-)\longrightarrow(Z,-)\longrightarrow(Y,-),$$

作用对偶函子 D，下序列也是正合的

$$D(Y,-)\longrightarrow D(Z,-)\longrightarrow D(X[1],-)\longrightarrow D(Y[1],-)\longrightarrow D(Z[1],-).$$

注意到下面的交换图表，其中的列态射均为同构，

$$\begin{tikzcd}
D(Y,-) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_Y"] & D(Z,-) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_Z"] & D(X[1],-) \arrow[r] \arrow[d, "\Psi_X\circ\phi_{X[1]}"] & D(Y[1],-) \arrow[r] \arrow[d, "\Psi_Y\circ\phi_{Y[1]}"] & D(Z[1],-) \arrow[d, "\Psi_Z\circ\phi_{Z[1]}"] \\
(-,S(Y)) \arrow[r] & (-,S(Z)) \arrow[r] & (-,S(X)[1]) \arrow[r] & (-,S(Y)[1]) \arrow[r] & (-,S(Z)[1]),
\end{tikzcd}$$

这里 $\phi_{X[1]}$, $\phi_{Y[1]}$ 和 $\phi_{Z[1]}$ 均由 §3.1.1 中的自然同构 ϕ 诱导的。这样就证明了断言一。

由公理 (TR2)，取正合三角 $S(X)\xrightarrow{S(u)}S(Y)\xrightarrow{\alpha}W\xrightarrow{\beta}S(X)[1]$。

断言二：为了证明三角 (3.2.2) 是正合的，只需找到态射 $\delta: W\longrightarrow S(Z)$ 使得下图交换.

$$\begin{tikzcd}
S(X) \arrow[r, "S(u)"] \arrow[d, equal] & S(Y) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & W \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\delta"] & S(X)[1] \arrow[d, equal] \\
S(X) \arrow[r, "S(u)"] & S(Y) \arrow[r, "S(v)"] & S(Z) \arrow[r, "\eta_X\circ S(w)"] & S(X)[1]
\end{tikzcd}$$

事实上，假设我们已找到这样的 δ。于是有如下函子交换图表

$$\begin{tikzcd}
(-,S(X)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & (-,S(Y)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & (-,W) \arrow[r] \arrow[d, "(-,\delta)"] & (-,S(X)[1]) \arrow[r] \arrow[d, equal] & (-,S(Y)[1]) \arrow[d, equal] \\
(-,S(X)) \arrow[r] & (-,S(Y)) \arrow[r] & (-,S(Z)) \arrow[r] & (-,S(X)[1]) \arrow[r] & (-,S(Y)[1])
\end{tikzcd}$$

在上交换图表中，已知第一行为正合，又由断言一，第二行也是正合的。这样用五引理，$(-,\delta)$ 是同构，再由 Yoneda 引理可知 δ 是同构。这样，我们就得到三角 (3.2.2) 是正合的。

第三步：找满足交换图的态射 $\delta : W \longrightarrow S(Z)$。

注意到，找这样的 δ 等价于解方程 $\delta \circ \alpha = S(v)$ 以及 $\eta_X \circ S(w) \circ \delta = \beta$。根据式 (3.2.1) 和迹函数的定义，得到

$$\mathrm{Tr}_X((\eta_X \circ f)[-1]) = -\mathrm{Tr}_{X[1]}(f), \quad \forall\, f \in (X[1], S(X[1])). \tag{3.2.3}$$

根据双线性型 $(-,-)$ 的非退化性，我们得出：方程 $\delta \circ \alpha = S(v)$ 等价于方程 $\mathrm{Tr}_Z(S(v) \circ x) = \mathrm{Tr}_Z(\delta \circ \alpha \circ x)$，任意 $x \in (Z, S(Y))$; 方程 $\eta_X \circ S(w) \circ \delta = \beta$ 等价于方程 $\mathrm{Tr}_X((\eta_X \circ S(w) \circ \delta)[-1] \circ y) = \mathrm{Tr}_X(\beta[-1] \circ y)$，任意 $y \in (X, W[-1])$。注意到我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_X((\eta_X \circ S(w) \circ \delta)[-1] \circ y) &= -\mathrm{Tr}_{X[1]}(S(w) \circ \delta \circ y[1]) \\ &= -\mathrm{Tr}_Z(\delta \circ y[1] \circ w),\end{aligned}$$

其中第一个等号利用式 (3.2.3)，而第二个等号利用式 (3.1.3)。因此，我们需找到 δ 满足以下两个方程：

$$\begin{gathered}\mathrm{Tr}_Z(\delta \circ \alpha \circ x) = \mathrm{Tr}_Z(S(v) \circ x), \quad \forall\, x \in (Z, S(Y)), \\ \mathrm{Tr}_Z(\delta \circ y[1] \circ w) = -\mathrm{Tr}_X(\beta[-1] \circ y), \quad \forall\, y \in (X, W[-1]).\end{gathered}$$

回顾自然同构 $\phi_{Z,W} : (W, S(Z)) \simeq D(Z, W)$ 以及 $\phi_{W,Z}(\delta) = \mathrm{Tr}_Z(\delta \circ -)$。因此，为了完成第三步，只需找到空间 (Z, W) 上的线性函数 F 使得

$$\begin{gathered}F(\alpha \circ x) = \mathrm{Tr}_Z(S(v) \circ x), \quad \forall\, x \in (Z, S(Y)), \\ F(y[1] \circ w) = -\mathrm{Tr}_X(\beta[-1] \circ y), \quad \forall\, y \in (X, W[-1]).\end{gathered}$$

由线性代数的知识，不难知道，这样的函数 F 存在的充分条件就是：只要 $\alpha \circ x = y[1] \circ w$，就有 $\mathrm{Tr}_Z(S(v) \circ x) = -\mathrm{Tr}_X(\beta[-1] \circ y)$。下面就证这个充分条件。设 $\alpha \circ x = y[1] \circ w$。由 (TR3)，有正合三角的交换图

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, dashed, "\phi_0"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "x"] & X[1] \arrow[r, "-u[1]"] \arrow[d, "y[1]"] & Y[1] \arrow[d, dashed, "\phi_0[1]"] \\ S(X) \arrow[r, "S(u)"] & S(Y) \arrow[r, "\alpha"] & W \arrow[r, "\beta"] & S(X)[1] \end{tikzcd}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_Z(S(v)\circ x) &= \mathrm{Tr}_Y(x\circ v)\\ &= \mathrm{Tr}_Y(S(u)\circ\phi_0)\\ &= \mathrm{Tr}_X(\phi_0\circ u)\\ &= \mathrm{Tr}_X(-\beta[-1]\circ y)\\ &= -\mathrm{Tr}_X(\beta[-1]\circ y),\end{aligned}$$

其中第一、三个等号利用式 (3.1.3)，而第二、四个等式利用图表交换性。证毕！
■

下面的结论及其证明均深受 [98]，命题 I.2.3 的启发。

命题 3.2.10 *设范畴 $\mathcal{C}$ 如上，且设 $X\in\mathcal{C}$ 为不可分解对象。则有*
(1)　$X\in\mathcal{C}_r$ 当且仅当 X 成为 ($\mathcal{C}$ 中的) 某个 Auslander-Reiten 三角的右端。
(2)　$X\in\mathcal{C}_l$ 当且仅当 X 成为 ($\mathcal{C}$ 中的) 某个 Auslander-Reiten 三角的左端。

证.　这里我们只证第一个断言，第二个可对偶得到。

为了证 “仅当”，设 $X\in\mathcal{C}_r$。记 $S:\mathcal{C}_r\longrightarrow\mathcal{C}_l$ 为范畴 $\mathcal{C}$ 上的广义 Serre 函子。根据命题 3.2.3(3)，S 是等价函子，特别地，$S(X)\in\mathcal{C}_l$ 是不可分解的。记 $\mathrm{radEnd}_{\mathcal{C}}(X)$ 为自同态代数 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)$ 的 Jacobson 根。回顾 $\mathcal{C}$ 的双线性型 $(-,-)$。故存在非零态射 $w:X\longrightarrow S(X)$ 使得 $(\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X),w)_{X,X}=0$。取正合三角 $S(X)[-1]\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}X\xrightarrow{w}S(X)$。我们断言该三角是 Auslander-Reiten 三角。这样就证明了 “仅当” 部分。

我们只需验证条件 (AR3'): 设 $\gamma:X'\longrightarrow X$ 非 retraction，欲证 $w\circ\gamma=0$。事实上，对于任意 $x:X\longrightarrow X'$，由于 γ 非 retraction，则有 $\gamma\circ x\in\mathrm{radEnd}_{\mathcal{C}}(X)$。进而，

$$(x,\ w\circ\gamma)_{X,X'}=(\gamma\circ x,w)_{X,X}=0,\quad\forall\, x\in(X,X'),$$

其中第一个等号用式 (3.1.1)，而第二个等号由 w 的选取而得。再根据双线性型的非退化性，我们得到 $w\circ\gamma=0$。

为了证 “当”，设有 Auslander-Reiten 三角 $Z\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}X\xrightarrow{w}Z[1]$。任取一

线性函数 $\mathrm{Tr}:(X,Z)\longrightarrow \mathbb{K}$ 使得 $\mathrm{Tr}(w)\neq 0$。我们断言对于任 $X'\in\mathcal{C}$，双线性型

$$(-,-):(X,X')\times(X',Z[1])\longrightarrow \mathbb{K}$$

定义为 $(f,\ g)=\mathrm{Tr}(g\circ f)$ 是非退化的。若断言获证，则有诱导的函子间自然同构 $D(X,-)\simeq(-,Z[1])$。因此 $X\in\mathcal{C}_r$。

下证双线性型非退化。设 $f:X\longrightarrow X'$ 非零。取正合三角 $X''\xrightarrow{s}X\xrightarrow{f}X'\longrightarrow X''[1]$。因为 f 非零，故态射 s 非 retraction。由 (AR3')，知 $w\circ s=0$。根据命题 1.1.3(2)，可知态射 w 经由 f 分解，即可设有 $g:X'\longrightarrow Z[1]$ 使得 $w=g\circ f$。于是 $(f,\ g)=\mathrm{Tr}(w)\neq 0$。另一方面，设 $g:X'\longrightarrow Z[1]$ 非零。取正合三角 $Z\xrightarrow{u'}X'''\longrightarrow X'\xrightarrow{g}Z[1]$。因为 g 非零，故态射 u' 非 section，根据 Auslander-Reiten 三角的性质，u' 经由 u 分解，进而由 (TR3) 有如下的三角态射

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, dashed] & X \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "f"] & Z[1] \arrow[d, equal] \\
Z \arrow[r, "u'"] & X''' \arrow[r] & X' \arrow[r, "g"] & Z[1]
\end{tikzcd}$$

于是，$g\circ f=w$，故 $(f,\ g)=\mathrm{Tr}(w)\neq 0$。证毕！ ∎

注记 3.2.11 回顾态射空间有限的 *Krull-Schmidt* 预三角范畴 $\mathcal{C}$ 上的 *Auslander-Reiten* 平移的概念，参见 *[49]* 或 *[98]*, $\S I.2$。设 $X\in\mathcal{C}$ 不可分解且存在 *Auslander-Reiten* 三角 $Z\longrightarrow Y\longrightarrow X\longrightarrow Z[1]$。注意到 *Auslander-Reiten* 三角在同构意义下由 X 唯一决定，进而对象 Z 也由 X 决定。记 $\tau(X)=Z$。称这样的"映射"τ 为范畴 $\mathcal{C}$ 的**Auslander-Reiten 平移**。由上命题及其证明知，可适当选择 τ 使得 $\tau=[-1]S$。特别地，τ 是函子，而这一点从定义看来是绝对非平凡的。

§3.3 计算广义 Serre 结构

本节，我们将显式地计算出有限维代数的模范畴的有界导出范畴以及某些非交换射影概型的凝聚层的有界导出范畴的广义 Serre 结构。

§3.3.1 有界同伦范畴的广义 Serre 结构

设 $\mathcal{A}$ 为域 $\mathbb{K}$ 上态射空间有限的加法范畴。设 $S_{\mathcal{A}}:\mathcal{A}_r\longrightarrow\mathcal{A}_l$ 为其上的广义 Serre 函子，并设 $(-,-)_{X,Y}:(X,Y)\times(Y,S_{\mathcal{A}}(X))\longrightarrow\mathbb{K}$ 为相应的双线性型。考虑有界同伦范畴 $K^b(\mathcal{A})$。很明显，它的态射空间也是有限维的。记其广义 Serre 函子为 $S:K(\mathcal{A})_r\longrightarrow K(\mathcal{A})_l$。

下面的结果本质上属于 D. Happel，参考 [48]，定理 3.6 或 [49]，第 37 页的证明。

命题 3.3.1 沿用上面的记号。则有

$$K^b(\mathcal{A}_r)\subseteq K^b(\mathcal{A})_r,\ K^b(\mathcal{A}_l)\subseteq K^b(\mathcal{A})_l\ \text{ 且 } S|_{K^b(\mathcal{A}_r)}=S_{\mathcal{A}},$$

其中这里的 $S_{\mathcal{A}}:K^b(\mathcal{A}_r)\longrightarrow K^b(\mathcal{A}_l)$ 是逐项作用在复形上的。

证. 首先断言，为了完成证明只需构造一个双自然的非退化双线性型

$$(-,-)_{X^\bullet,Y^\bullet}:\mathrm{Hom}_{K^b(\mathcal{A})}(X^\bullet,Y^\bullet)\times\mathrm{Hom}_{K^b(\mathcal{A})}(Y^\bullet,S_{\mathcal{A}}(X^\bullet))\longrightarrow\mathbb{K}$$

其中 $X^\bullet\in K^b(\mathcal{A}_r)$，$Y^\bullet\in K^b(\mathcal{A})$。事实上，若已得到这样的双线性型，则对于任意 $X^\bullet\in K^b(\mathcal{A}_r)$，有函子的同构 $\phi_{X^\bullet}:D\mathrm{Hom}_{K^b(\mathcal{A})}(X^\bullet,-)\simeq\mathrm{Hom}_{K^b(\mathcal{A})}(-,S_{\mathcal{A}}(X^\bullet))$。故，$X^\bullet\in K^b(\mathcal{A})_r$，且可适当选取 $K^b(\mathcal{A})$ 上的广义 Serre 函子 S 使得 $S|_{K^b(\mathcal{A}_r)}=S_{\mathcal{A}}$ (这里，我们需注意到同构 $\phi_{X^\bullet}$ 对 $X^\bullet\in K^b(\mathcal{A}_r)$ 是自然的)。

如下定义双线性型：设 $f^\bullet=(f^i):X^\bullet\longrightarrow Y^\bullet$，$g^\bullet=(g^i):Y^\bullet\longrightarrow S_{\mathcal{A}}(X^\bullet)$，

$$(f^\bullet,\ g^\bullet)_{X^\bullet,Y^\bullet}:=\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i(f^i,\ g^i)_{X^i,Y^i}.$$

首先，注意到该双线性型是定义合理的，即需证若 $f^\bullet$ 或 $g^\bullet$ 同伦于 0，则 $(f^\bullet,\ g^\bullet)_{X^\bullet,Y^\bullet}=0$。设 $X^\bullet=(X^i,d_X^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ ，$Y^\bullet=(Y^i,d_Y^i)_{i\in\mathbb{Z}}$。不妨设 $f^\bullet$ 同伦于 0，

即 $f^i = d_Y^{i-1} \circ h^i + h^{i+1} \circ d_X^i$，$i \in \mathbb{Z}$。则有

$$\begin{aligned}(f^\bullet,\ g^\bullet)_{X^\bullet,Y^\bullet} &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i (d_Y^{i-1} \circ h^i,\ g^i)_{X^i,Y^i} + (-1)^i (h^{i+1} \circ d_X^i,\ g^i)_{X^i,Y^i} \\ &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i (h^i,\ g^i \circ d_Y^{i-1})_{X^i,Y^{i-1}} + (-1)^i (h^{i+1},\ S_{\mathcal{A}}(d_X^i) \circ g^i)_{X^{i+1},Y^i} \\ &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i (h^i,\ g^i \circ d_Y^{i-1} - d_{S_{\mathcal{A}}(X)}^{i-1} \circ g^{i-1})_{X^i,Y^{i-1}} \\ &= 0,\end{aligned}$$

其中第二个等号需用命题 3.1.4(1)，而最后一个等号恰由于 $g^\bullet : Y^\bullet \longrightarrow S_{\mathcal{A}}(X^\bullet)$ 是链映射。

双线性型的双自然性等价于如下两个等式：

$$(f^\bullet \circ \theta^\bullet,\ g^\bullet)_{X'^\bullet,Y^\bullet} = (f^\bullet,\ S_{\mathcal{A}}(\theta^\bullet) \circ g^\bullet)_{X^\bullet,Y^\bullet}$$
$$(\gamma^\bullet \circ f^\bullet,\ g^\bullet)_{X^\bullet,Y^\bullet} = (f^\bullet,\ g^\bullet \circ \gamma^\bullet)_{X^\bullet,Y'^\bullet}.$$

而这些可由双线性型的定义以及（关于范畴 $\mathcal{A}$ 的）式 (3.1.1) 和 (3.1.2) 直接得到。

最后，我们证双线性型的非退化性。任取 $X^\bullet \in K^b(\mathcal{A}_r)$，考虑由上双线性型诱导的自然变换

$$\phi_{X^\bullet} : D\mathrm{Hom}_{K^b(\mathcal{A})}(X^\bullet, -) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{K^b(\mathcal{A})}(-, S_{\mathcal{A}}(X^\bullet)).$$

我们断言 $\phi_{X^\bullet}$ 是自然同构。这就完成了证明。

事实上，$\phi_{X^\bullet}$ 是两个上同调函子间的自然变换，于是，由 dévissage 及五引理易知只需证 $\phi_{X^\bullet}(Y^\bullet)$ 是同构，其中 $Y^\bullet$ 为 stalk 复形。不失一般性，设 $Y^\bullet = Y \in \mathcal{A}$。注意到 $D\mathrm{Hom}_{K^b(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y)$ 是如下复形的 0 次上同调群

$$\cdots \longrightarrow D(X^{-1}, Y) \longrightarrow D(X^0, Y) \longrightarrow D(X^1, Y) \longrightarrow \cdots$$

但根据 $\mathcal{A}$ 的广义 Serre 对偶，上面的复形同构于

$$\cdots \longrightarrow (Y, S_{\mathcal{A}}(X^{-1})) \longrightarrow (Y, S_{\mathcal{A}}(X^0)) \longrightarrow (Y, S_{\mathcal{A}}(X^1)) \longrightarrow \cdots$$

而该复形的 0 次上同调群恰是 $\mathrm{Hom}_{K^b(\mathcal{A})}(Y, S_{\mathcal{A}}(X^\bullet))$。这就证明了 $\phi_{X^\bullet}(Y)$ 是同构。证毕! ■

§3.3.2 有界导出范畴的广义 Serre 结构 (I)

本小节，$\mathcal{A}$ 为态射空间有限的 Abel 范畴。称 $\mathcal{A}$ 为**Ext-finite 的**，如果 $D^b(\mathcal{A})$ 是态射空间有限的。很明显，这等价于对于任意 $X,Y\in\mathcal{A}$，$i\geq 0$，$\mathbb{K}$- 空间 $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X,Y)$ 均是有限维的。分别记 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{I}$ 为 $\mathcal{A}$ 中投射对象和内射对象组成的满子范畴。

如上，记 $S_{\mathcal{A}}:\mathcal{A}_r\longrightarrow\mathcal{A}_l$ 为 $\mathcal{A}$ 的广义 Serre 函子。我们断言 $\mathcal{A}_r\subseteq\mathcal{P}$ 且 $\mathcal{A}_l\subseteq\mathcal{I}$。事实上，设 $X\in\mathcal{A}_r$。则有函子同构 $(X,-)\simeq D(-,S_{\mathcal{A}}(X))$，因此 $(X,-)$ 是右正合的，于是 X 是投射对象。类似地，$\mathcal{A}_l$ 中的每个对象均为内射。

回顾 (结合引理 1.3.12 和引理 1.4.14) 自然同构

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(P^\bullet,X^\bullet)\simeq\mathrm{Hom}_{K^b(\mathcal{A})}(P^\bullet,X^\bullet),\quad \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(X^\bullet,I^\bullet)\simeq\mathrm{Hom}_{K^b(\mathcal{A})}(X^\bullet,I^\bullet), \tag{3.3.1}$$

其中 $P^\bullet\in K^b(\mathcal{P})$，$X^\bullet\in K^b(\mathcal{A})$，$I^\bullet\in K^b(\mathcal{I})$。

引理 3.3.2 *设 $\mathcal{A}$ 为 Ext-finite 的 Abel 范畴。则有 $K^b(\mathcal{A}_r)\subseteq D^b(\mathcal{A})_r$，$K^b(\mathcal{A}_l)\subseteq D^b(\mathcal{A})_l$ 且 $S|_{K^b(\mathcal{A}_r)}=S_{\mathcal{A}}$，其中 $S:D^b(\mathcal{A})_r\longrightarrow D^b(\mathcal{A})_l$ 为 $D^b(\mathcal{A})$ 上的广义 Serre 函子。*

证. 注意到 $\mathcal{A}_r\subseteq\mathcal{P}$，$\mathcal{A}_l\subseteq\mathcal{I}$，则根据定理 1.4.16，自然函子 $K^b(\mathcal{A}_r)\longrightarrow D^b(\mathcal{A})$，$K^b(\mathcal{A}_l)\longrightarrow D^b(\mathcal{A})$ 均为满嵌入。设 $P^\bullet\in K^b(\mathcal{A}_r)$，$X^\bullet\in K^b(\mathcal{A})$，则有 (双自然) 同构

$$\begin{aligned} D\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(P^\bullet,X^\bullet) &\simeq D\mathrm{Hom}_{K^b(\mathcal{A})}(P^\bullet,X^\bullet)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{K^b(\mathcal{A})}(X^\bullet,S_{\mathcal{A}}(P^\bullet))\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(X^\bullet,S_{\mathcal{A}}(P^\bullet)), \end{aligned}$$

其中第一、三个同构均由式 (3.3.1) 得到，而第二个同构由命题 3.3.1 得到。这样，引理立即得证。 ■

回顾复形 $X^\bullet\in D^b(\mathcal{A})$ 称为**具有有限投射维数的**，如果存在某个整数 N 使得 $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(X^\bullet,M[n])=0$，任意 $M\in\mathcal{A}$，$n\geq N$。记 $D^b(\mathcal{A})_{\mathrm{fpd}}$ 为全体具有有限投射维数的复形组成的满子范畴。不难看出它是 $D^b(\mathcal{A})$ 的有厚度三角子范畴。

对偶地，引入复形**具有有限内射维数**的概念，以及有厚度三角子范畴 $D^b(\mathcal{A})_{\mathrm{fid}}$。参见 [85]，附录或 [112]，练习 10.7.2。

如下结论是熟知的。

引理 3.3.3 *设 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴。则有*

(1) $K^b(\mathcal{P}) \subseteq D^b(\mathcal{A})_{\mathrm{fpd}}$。*若 $\mathcal{A}$ 具有足够多投射对象，则有* $K^b(\mathcal{P}) = D^b(\mathcal{A})_{\mathrm{fpd}}$。

(2) $K^b(\mathcal{I}) \subseteq D^b(\mathcal{A})_{\mathrm{fid}}$。*若 $\mathcal{A}$ 具有足够多内射对象，则有* $K^b(\mathcal{I}) = D^b(\mathcal{A})_{\mathrm{fid}}$。

证. 只证 (1)。第一个包含关系很容易由式 (3.3.1) 的左式得到。如下给出的关于第二个断言的证明类似于 [99]，命题 6.2 的证明。

设 $X^\bullet \in D^b(\mathcal{A})_{\mathrm{fpd}}$。由于 $\mathcal{A}$ 具有足够多投射对象，可取拟同构 $\pi^\bullet : P^\bullet \longrightarrow X^\bullet$，其中 $P^\bullet \in K^{-,b}(\mathcal{P})$（参考命题 1.4.15）。不妨设有正整数 N 使得，对于任意 $M \in \mathcal{A}$，$i \geq N$，有 $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(X^\bullet, M[n]) = 0$，且不妨设 $H^{-n}(P^\bullet) = 0$，$n \geq N$。考虑以下的自然链映射 $\theta^\bullet : P^\bullet \longrightarrow \mathrm{Coker} d_P^{-N-1}[N]$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P^{-N-1} \arrow[r, "d_P^{-N-1}"] \arrow[d] & P^{-N} \arrow[r, "d_P^{-N}"] \arrow[d, "\theta"] & P^{-N+1} \arrow[r, "d_P^{-N+1}"] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathrm{Coker} d_P^{-N-1} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

其中 θ 是自然投射。注意到

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{K^b(\mathcal{A})}(P^\bullet, \mathrm{Coker} d_P^{-N-1}[N]) &\simeq \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(P^\bullet, \mathrm{Coker} d_P^{-N-1}[N]) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(X^\bullet, \mathrm{Coker} d_P^{-N-1}[N]) = 0.
\end{aligned}$$

于是，$\theta^\bullet$ 同伦于 0。故可设存在 $h : P^{-N+1} \longrightarrow \mathrm{Coker} d_P^{-N-1}$ 使得 $h \circ d_P^{-N} = \theta$。另一方面，$d_P^{-N}$ 唯一地经由 θ 分解，设 $d_P^{-N} = i \circ \theta$，其中 $i : \mathrm{Coker} d_P^{-N-1} \longrightarrow P^{-N+1}$。于是有 $h \circ i \circ \theta = \theta$，进而 $h \circ i = \mathrm{Id}_{\mathrm{Coker} d_P^{-N-1}}$，故 i 为可裂单，进而 $\mathrm{Coker} i$ 为投射对象。这样就不难得出复形 $P^\bullet$ 同伦于子复形

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Coker} i \longrightarrow P^{-N+2} \longrightarrow P^{-N+3} \longrightarrow \cdots,$$

而该复形是属于 $K^b(\mathcal{P})$ 的。从而我们得出 $X^\bullet \in K^b(\mathcal{P})$。证毕! ■

命题 3.3.4 *设 $\mathcal{A}$ 为 Ext-finite 的 Abel 范畴。则有* $D^b(\mathcal{A})_r \subseteq D^b(\mathcal{A})_{\mathrm{fpd}}$，$D^b(\mathcal{A})_l \subseteq S^b(\mathcal{A})_{\mathrm{fid}}$。

证. 设 $X^\bullet \in D^b(\mathcal{A})_r$。则有函子的同构 $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(X^\bullet, -) \simeq D\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(-, S(X^\bullet))$，其中 S 为 $D^b(\mathcal{A})$ 的广义 Serre 函子。取正整数 N 使得 $H^n(S(X^\bullet)) = 0$，任意 $n \leq -N$。设 $M \in \mathcal{A}$，$n \geq N$。则有

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(X^\bullet, M[n]) &\simeq D\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(M[n], S(X^\bullet)) \\ &\simeq D\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(M, S(X^\bullet)[-n]) = 0,\end{aligned}$$

其中最后一个等号成立是由于 $H^m(S(X^\bullet)[-n]) = 0$，任意 $m \leq 0$。于是，我们得出复形 $X^\bullet$ 具有有限投射维数，进而有 $D^b(\mathcal{A})_r \subseteq D^b(\mathcal{A})_{\mathrm{fpd}}$。另一个包含关系可类似得证。 ■

本小节的主定理为：

定理 3.3.5 设 $\mathcal{A}$ 为域 $\mathbb{K}$ 上态射空间有限的 *Abel* 范畴。设 $\mathcal{A}$ 具有足够多的投射对象和内射对象。假设 $\mathcal{A}_r = \mathcal{P}$，$\mathcal{A}_l = \mathcal{I}$ 并记 $S_{\mathcal{A}} = \nu$。则有 $D^b(\mathcal{A})_r = K^b(\mathcal{P})$，$D^b(\mathcal{A})_l = K^b(\mathcal{I})$ 且其上的广义 *Serre* 函子 $S = \nu$（逐项地作用在复形上）。

证. 注意到，在题设下 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 是 Ext-finite 的。于是，定理可通过结合引理 3.3.2，引理 3.3.3 以及命题 3.3.4 得到。 ■

我们给出该定理的一个例子。

例 3.3.6 设 A 为有限维代数，$\mathcal{A} = A\text{-mod}$ 为有限维左 A- 模范畴。则易知 $\mathcal{A}$ 上的广义 *Serre* 结构完全由如下的双自然同构给出

$$D\mathrm{Hom}_A(P, M) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, \nu P),$$

其中 $P \in A\text{-proj}$ 为投射模，$\nu = D\mathrm{Hom}_A(-, A)$ 为 *Nakayama* 函子，$M \in A\text{-mod}$。参见 *[8]*，命题 *II.4.2*。回顾 $\nu : A\text{-proj} \longrightarrow A\text{-inj}$ 是范畴等价。故，易知 $\mathcal{A}$ 满足定理 *3.3.5* 的条件。于是，我们得到 $D^b(A\text{-mod})_r = K^b(A\text{-proj})$，$D^b(A\text{-mod})_l = K^b(A\text{-inj})$ 且广义 *Serre* 函子由 *Nakayama* 函子 ν 给出。

将这些观察与定理 *3.2.1(3)* 接合起来，我们得到 *D. Happel* 的一个定理 *[50]*，定理 *1.4*。特别地，设

$$X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet \longrightarrow Z^\bullet \longrightarrow X^\bullet[1]$$

为 $D^b(A\text{-mod})$ 中的 *Auslander-Reiten* 三角，则有 $X^\bullet \in K^b(A\text{-inj})$，$Z^\bullet \in K^b(A\text{-proj})$ 且 $X^\bullet \simeq \nu(Z^\bullet)$。

§3.3.3 有界导出范畴的广义 Serre 结构 (II)

本节研究非交换射影概型 $\mathbb{X}$ 上凝聚层的有界导出范畴 $D^b(\mathrm{coh}(\mathbb{X}))$ 的广义 Serre 结构。

回顾一些定义。设 $R = \oplus_{i\geq 0} R_i$ 为域 $\mathbb{K}$ 上连通（即，$R_0 \simeq \mathbb{K}$）的左 Noether(或等价地，分次左 Noether) 分次代数。则易知 R 是局部有限维的，即 $\dim R_i < \infty$，$i \geq 0$。记 $R_{\geq d} = \oplus_{i\geq d} R_i$，$d \geq 1$。易知，$R_{\geq d}$ 为双边理想。

分别记 R-Gr 和 R-gr 为分次左 R- 模和有限生成分次左 R- 模范畴。记 (d) 为其上的 degree-shift 函子，$d \in \mathbb{Z}$。设 $M, N \in R$-Gr，定义

$$\underline{\mathrm{Hom}}(M,N) := \oplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\text{R-Gr}}(M, N(d)),$$

并定义相应的导出函子 $\underline{\mathrm{Ext}}^i(-,-)$，$i \geq 0$。于是，有

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i(M,N) := \oplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathrm{Ext}^i_{\text{R-Gr}}(M, N(d)).$$

设 $M \in R$-Gr。定义 $\tau(M)$ 为 M 的所有有限维分次子模之和。自然地，τ 定义了函子 $\tau : R\text{-Gr} \longrightarrow R\text{-Gr}$。若 $\tau(M) = M$，则称 M 为**扭模**。易知，M 是扭模当且仅当对于任意 $m \in M$，存在 $d \geq 1$ 使得 $R_{\geq d} m = 0$。分别记 R-Tor 和 R-tor 为扭模和有限生成扭模组成的满子范畴。于是 $R\text{-Tor} \subseteq R\text{-Gr}$，$R\text{-tor} \subseteq R\text{-gr}$ 均为**Serre 子范畴**。引入如下两个商 Abel 范畴 (参见 [42]，第 368 页，推论 2)

$$\mathrm{Tails}(R) := R\text{-Gr}/R\text{-Tor}, \quad \mathrm{tails}(R) := R\text{-gr}/R\text{-tor},$$

且记 $\pi : R\text{-Gr} \longrightarrow \mathrm{Tails}(R)$ 为正合商函子。不难得到，自然函子 $\mathrm{tails}(R) \longrightarrow \mathrm{Tails}(R)$ 为满嵌入 (参见 [1]，命题 2.3)。记 $\pi(R) = \mathcal{O}$，其中 R 视为 (0 次生成的) 正则分次左 R- 模。

定义 3.3.7 (Artin-Zhang [1]) 设 $R = \oplus_{n\geq 0} R_n$ 为连通的 *Noether* 分次代数。记

$$\mathbb{X} := \mathrm{Proj}(R) := (\mathrm{tails}(R), \mathcal{O}).$$

称 $\mathbb{X}$ 为 R 对应的**非交换射影概型**；记 $\mathrm{coh}(\mathbb{X}) = \mathrm{tails}(R)$，并称其对象为 $\mathbb{X}$ 上的**凝聚层**；称 $\mathcal{O}$ 为 $\mathbb{X}$ 的**结构层**。

设 R 为连通的左 Noether 分次代数。考虑如下条件（比较 [1]，定义 3.2 和定义 3.7）

条件 "χ": 对于任 $M \in R\text{-gr}$，$\dim \underline{\mathrm{Ext}}^j(\mathbb{K}, M) < \infty$，$j \geq 1$。

注意到，这里 $\mathbb{K} \simeq R/R_{\geq 1}$ 自然地视为（集中在 0 处的）分次 R- 模。这个条件的重要性部分地是因为有如下结论。

引理 3.3.8 ([1]，推论 7.3(3) 或 [85]，命题 2.2.1) *设 R 为连通的左 Noether 分次代数满足条件 "χ"。则 Abel 畴 $\mathrm{tails}(R)$ 是 Ext-finite 的。*

受到 [85]，定理 A.4 以及 [104]，命题 7.48 的启发，我们有本小节的主定理：

定理 3.3.9 *设 R 为连通的双边 Noether 分次代数，$\mathbb{X} = \mathrm{Proj}(R)$。假设 R 以及它的反代数 R^{op} 均满足条件 "χ" 且相应的函子 τ 均具有有限的上同调维数。设 $R^\bullet$ 为 R 的平衡对偶复形（参考 [109]，定理 6.3 或 [114]），并记 $\mathcal{R}^\bullet = \pi(R^\bullet)$。则有界导出范畴 $D^b(\mathrm{coh}(\mathbb{X}))$ 上的广义 Serre 结构由以下给出：*

$$D^b(\mathrm{coh}(\mathbb{X}))_r = D^b(\mathrm{coh}(\mathbb{X}))_{\mathrm{fpd}}, \quad D^b(\mathrm{coh}(\mathbb{X}))_l = D^b(\mathrm{coh}(\mathbb{X}))_{\mathrm{fid}},$$

且其广义 Serre 函子为 $S = - \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{R}^\bullet[-1]$.

证. 注意到这里的函子 $- \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{R}^\bullet$ 是由 $- \otimes^{\mathbf{L}} R^\bullet$ 诱导的，参见 [85]，附录。

根据引理 3.3.8，范畴 $\mathrm{coh}(\mathbb{X})$ 是 Ext-finite 的。再由命题 3.3.4，我们有

$$D^b(\mathrm{coh}(\mathbb{X}))_r \subseteq D^b(\mathrm{coh}(\mathbb{X}))_{\mathrm{fpd}}, \quad D^b(\mathrm{coh}(\mathbb{X}))_l \subseteq D^b(\mathrm{coh}(\mathbb{X}))_{\mathrm{fid}}.$$

另一方面，根据 [85]，定理 A.4 易知

$$D^b(\mathrm{coh}(\mathbb{X}))_r \supseteq D^b(\mathrm{coh}(\mathbb{X}))_{\mathrm{fpd}}，且 S|_{D^b(\mathrm{coh}(\mathbb{X}))_{\mathrm{fpd}}} = - \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{R}^\bullet[-1]$$

是从 $D^b(\mathrm{coh}(\mathbb{X}))_{\mathrm{fpd}}$ 到 $D^b(\mathrm{coh}(\mathbb{X}))_{\mathrm{fid}}$ 的范畴等价。于是得到 $D^b(\mathrm{coh}(\mathbb{X}))_{\mathrm{fid}} \subseteq D^b(\mathrm{coh}(\mathbb{X}))_l$。这样就不难看出定理成立。 ∎

§3.4 应用

本节，我们将给出广义 Serre 对偶，特别是例 3.3.6 的两个应用。

§3.4.1 Gorenstein 代数的刻画

回顾我们在 §3.1.2 中引入的条件 (C) 以及 (C')。

引理 3.4.1 *设 $\mathcal{A}$ 为态射空间有限的 Abel 范畴。我们有*
(1) 若 $\mathcal{A}$ 具有足够多投射对象且 $\mathcal{A}_r = \mathcal{P}$，则 $D^b(\mathcal{A})$ 满足条件 (C)。
(2) 若 $\mathcal{A}$ 具有足够多内射对象且 $\mathcal{A}_l = \mathcal{I}$，则 $D^b(\mathcal{A})$ 满足条件 (C')。

证. 只证 (1)。设 $\mathcal{A}$ 具有足够多投射对象且 $\mathcal{A}_r = \mathcal{P}$。根据引理 3.3.2 和命题 3.3.4，$D^b(\mathcal{A})_r = K^b(\mathcal{P})$。设 $X^\bullet, X'^\bullet \in D^b(\mathcal{A})_r$，$Z^\bullet \in D^b(\mathcal{A})$。可进一步设 $X^\bullet, X'^\bullet \in K^b(\mathcal{P})$ 为由投射对象组成的有界复形。取投射分解 $P^\bullet \longrightarrow Z^\bullet$，其中 $P^\bullet \in K^{-,b}(\mathcal{P})$。对于 $n >> 0$，取 $Z'^\bullet := \sigma^{\geq -n}P^\bullet$ 为 brutal 截断。取 s 为合成

$$Z'^\bullet \longrightarrow P^\bullet \longrightarrow Z^\bullet,$$

其中 $Z'^\bullet \longrightarrow P^\bullet$ 为自然链映射。注意到，$Z'^\bullet \in K^b(\mathcal{P}) = D^b(\mathcal{A})_r$。则容易验证，如下由 s 诱导的映射

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(X^\bullet, Z'^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(X^\bullet, Z^\bullet), \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(Z'^\bullet, X'^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(Z^\bullet, X'^\bullet)$$

均为双射。证毕! ■

回顾 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 称为 Gorenstein 范畴，如果 $\mathcal{A}$ 具有足够多的投射对象和内射对象，且每个投射对象均有有限的内射维数，每个内射对象均有有限的投射维数，参见 §2.4.2。如下结论给出（某些）Gorenstein 范畴一个新的刻画。

定理 3.4.2 *设 $\mathcal{A}$ 为态射空间有限的 Abel 范畴，具有足够多的投射对象和内射对象。假设 $\mathcal{A}_r = \mathcal{P}$，$\mathcal{A}_l = \mathcal{I}$。则下列命题等价：*
(1) 范畴 $K^b(\mathcal{P})$ 有 Serre 对偶。
(2) 范畴 $\mathcal{A}$ 是 Gorenstein 范畴。
(2) 范畴 $K^b(\mathcal{I})$ 有 Serre 对偶。

证. 根据定理 3.3.5，有 $D^b(\mathcal{A})_r = K^b(\mathcal{P})$，$D^b(\mathcal{A})_l = K^b(\mathcal{I})$。注意到，$\mathcal{A}$ 是 Gorenstein 范畴当且仅当 $K^b(\mathcal{P}) = K^b(\mathcal{I})$。再根据引理 3.4.1，由命题 3.1.7(取 $\mathcal{C} = D^b(\mathcal{A})$) 立得结论。 ■

设 A 为有限维代数。根据例 3.3.6，范畴 $\mathcal{A} = A$-mod 满足定理的条件。于是有如下的关于有限维 Gorenstein 代数的一个新的刻画（比较 [51]，定理 3.4 或 [68]，例 8.3(1)）。

推论 3.4.3 *设 A 为有限维代数。则下列命题等价：*

(1) 范畴 $K^b(A\text{-proj})$ 有 Serre 对偶。

(2) 代数 A 是 Gorenstein 代数。

(3) 范畴 $K^b(A\text{-inj})$ 有 Serre 对偶。

§3.4.2 Rickard 定理的加强

回顾两个有限维代数 A 和 B 称为**导出等价的**，如果存在三角范畴间的等价 $D^b(A\text{-mod}) \simeq D^b(B\text{-mod})$（参见 [99]，推论 8.3）。J. Rickard 在文 [101]，推论 5.2 (比较 [100]，命题 1.2) 中指出了如下令人称奇的结论。

定理 3.4.4 (Rickard) *设代数 A 和 B 导出等价。则 A 是对称代数当且仅当 B 是对称代数。*

下面，我们将利用广义 Serre 结构来给出该定理的一个加强形式（比较 [81]，引理 3.1)：

定理 3.4.5 *设 A 和 B 为有限维代数。设有(𝕂 线性的)范畴等价 $F : D^b(A\text{-mod}) \simeq D^b(B\text{-mod})$。则 A 是对称代数当且仅当 B 是对称代数。*

在证明之前，给出一个概念。设 $\mathcal{C}$ 为态射空间有限的预加法范畴，记其广义 Serre 函子为 $S_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}_r \longrightarrow \mathcal{C}_l$。称范畴 $\mathcal{C}$ 为**广义 0-Calabi-Yau 的**，如果 $\mathcal{C}_r = \mathcal{C}_l$ 且有函子的自然同构 $S_{\mathcal{C}} \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{C}_r}$ (比较 [68]，8.2)。

如下结论是自然的。

引理 3.4.6 *设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 均为态射空间有限的预加法范畴。设 $F:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ 为 ($\mathbb{K}$-线性的) 范畴等价。则 $\mathcal{C}$ 是广义 0-Calabi-Yau 范畴当且仅当 $\mathcal{D}$ 是广义 0-Calabi-Yau 范畴。*

证. 首先注意到 F 诱导了范畴等价 $\mathcal{C}_r\simeq\mathcal{D}_r$ 以及 $\mathcal{C}_l\simeq\mathcal{D}_l$。为此，只需证若 $X\in\mathcal{C}_r$，则 $F(X)\in\mathcal{D}_r$。设 $Y\in\mathcal{C}$。则有双自然同构

$$D\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))\simeq D\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\simeq\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,S_{\mathcal{C}}(X))\simeq\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(Y),F(S_{\mathcal{C}}(X))).$$

于是在 $\mathrm{Im}F$ 上有函子的同构

$$D\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),-)\simeq\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-,F(S_{\mathcal{C}}(X))).\qquad(3.4.1)$$

因为 F 稠密，故该同构可延拓到整个范畴 $\mathcal{D}$ 上，于是 $F(X)\in\mathcal{D}_r$。

为了完成证明，设 $\mathcal{C}$ 是广义 0-Calabi-Yau 范畴，即 $\mathcal{C}_r=\mathcal{C}_l$ 且 $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}\simeq\mathrm{Id}_{\mathcal{C}_r}$。则由上知 $\mathcal{D}_r=\mathcal{D}_l$，且由同构 (3.4.1) 知有自然同构 $S_{\mathcal{D}}(F(X))\simeq F(S_{\mathcal{C}}(X))$，$X\in\mathcal{C}_r$。注意到 $S_{\mathcal{C}}\simeq\mathrm{Id}_{\mathcal{C}_r}$ 且 F 是范畴等价，由此我们可得出 $S_{\mathcal{D}}\simeq\mathrm{Id}_{\mathcal{D}_r}$。这就证明了 $\mathcal{D}$ 是广义 0-Calabi-Yau 范畴。 ■

定理的证明： 设 $F:D^b(A\text{-mod})\longrightarrow D^b(B\text{-mod})$ 为范畴等价。设 A 为对称代数，即有双模同构 $A\simeq D(A)$。根据例 3.3.6，$D^b(A\text{-mod})$ 的广义 Serre 结构可如下描述：$D^b(A\text{-mod})_r=K^b(A\text{-proj})$，$D^b(A\text{-mod})_l=K^b(A\text{-inj})$ 且广义 Serre 函子由 Nakayama 函子给出 $\nu=D\mathrm{Hom}_A(-,A)\simeq D(A)\otimes_A-$。于是对于对称代数 A，可知 $D^b(A\text{-mod})$ 是广义 0-Calabi-Yau 的。

根据上引理，可知 $D^b(B\text{-mod})$ 也为广义 0-Calabi-Yau 范畴。故再由例 3.3.6，有 $K^b(B\text{-proj})=K^b(B\text{-inj})$，且有函子等价 $\eta:\mathrm{Id}_{K^b(B-\mathrm{proj})}\simeq\nu_B$。考虑 $\eta_B:B\simeq\nu_B(B)=D(B)$。首先，$\eta_B$ 是左 B- 模的同构。设 $b\in B$，记由 b 右乘所诱导的左 B- 模态射为 $r_b:B\longrightarrow B$。则由 η 的自然性，有

$$\eta_B\circ r_b=\nu_B(r_b)\circ\eta_B.$$

注意到上等式就说明了 η_B 是右 B- 模态射，于是 η_B 为双模同构，即代数 B 是对称的。证毕！ ■

第四章　三角范畴的幂等可裂性

加法范畴的幂等可裂性是一个基本问题，而一些具体的加法范畴是否幂等可裂往往与某些较深的理论或猜想密切相关，参见 [2, 41, 106] 等。另外，域上具有有限维态射空间的加法范畴是 Krull-Schmidt 范畴当且仅当它是幂等可裂的，参见 [31]。文 [11] 较专门地研究了三角范畴的幂等可裂性，特别的，该文证明了幂等可裂正合范畴的有界导出范畴是幂等可裂的（参见 [11]，定理 2.8 并比较 [31, 77]）。

本章较详细地研究了预三角范畴的幂等可裂性，并用较初等的方法证明有界同伦范畴以及 Abel 范畴的有界导出范畴的幂等可裂性。应指出两点：本章的部分结果对专家来说可能已知的；本文第二章曾数次引用本章的主要结果。

§4.1　主要结论

§4.1.1　幂等可裂性

设 $\mathcal{C}$ 为加法范畴，$X\in\mathcal{C}$。态射 $e: X\longrightarrow X$ 称为**幂等态射**，如果 $e\circ e=e$。例如，恒等态射 Id_X 和零态射均为幂等态射。更一般地，设 $X=Y\oplus Z$，则合成态射 $X\xrightarrow{\binom{1}{0}} Y\xrightarrow{(1\ 0)} X$ 为幂等态射。由这个例子我们很容易理解如下的定义：称幂等态射 $e: X\longrightarrow X$**可裂**，如果存在态射 $u: X\longrightarrow Y$ 和 $v: Y\longrightarrow X$ 使得 $v\circ u=e$ 且 $u\circ v=\mathrm{Id}_Y$。称 $e: X\longrightarrow X$ 为**强可裂**，如果 e 和 Id_X-e 均可裂。

我们将关于幂等态射分裂的一些性质归纳为如下易证的引理。

引理 4.1.1 *设 $\mathcal{C}$ 为加法范畴，$e: X\longrightarrow X$ 为幂等态射。*
(1)　设 e 分裂为 $X\xrightarrow{u} Y\xrightarrow{v} X$。则 u 为态射 Id_X-e 的余核，v 为态射 Id_X-e 的核。故，e 的分裂若存在必唯一。
(2)　幂等态射 e 可裂当且仅当态射 Id_X-e 有核，当且仅当态射 Id_X-e 有余核。
(3)　设 e 强可裂，e 和 Id_X-e 分别分裂为 $X\xrightarrow{u} Y\xrightarrow{v} X$ 和 $X\xrightarrow{u'} Y'\xrightarrow{v'} X$。

则有同构 $\binom{u}{u'}: X \longrightarrow Y \oplus Y'$，其逆为 $(v\ v')$。

下面的结论很有趣。

引理 4.1.2 设 $\mathcal{C}$ 为预三角范畴，$e: X \longrightarrow X$ 为幂等态射。则 e 可裂当且仅当 e 强可裂。

证. 只需证若 e 可裂，则 $\mathrm{Id}_X - e$ 也可裂。由引理 4.1.1(2)，只需证 e 有余核。为此，设 e 分裂为 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} X$。由于 $u \circ v = \mathrm{Id}_Y$，则易知若 v 的余核存在，则 e 的余核也存在且它们相同。

考虑正合三角 $Y \xrightarrow{v} X \xrightarrow{\pi} Z \longrightarrow Y[1]$。由于 v 为 section，则由 [49]，第 7 页引理 1.4 可知 π 为 retraction。再结合命题 1.1.3(2)，我们可得出态射 π 为 v 的余核，于是也为 e 的余核。证毕! ■

§4.1.2 主定理

设 $\mathcal{C}$ 为加法范畴。称 $\mathcal{C}$ 是**幂等可裂的** (idempotent-split, idempotent-complete 或 Karoubian)，如果其每个幂等态射均可裂，等价地，其每个幂等态射均强可裂。

本章的主要任务是证明如下两个基本定理

定理 A 设 $\mathcal{C}$ 是幂等可裂的加法范畴。则其有界同伦范畴 $K^b(\mathcal{C})$ 也为是幂等可裂的。

定理 B 设 $\mathcal{A}$ 为 *Abel* 范畴。则其有界导出范畴 $D^b(\mathcal{A})$ 是幂等可裂的。

注记: 定理 *A* 的证明思路本质上可归于 *J. Rickard* (*[99]*, 命题 *6.3*) 以及 *M. Bökstedt -A. Neeman ([20],* 命题 *3.4*)。定理 *B* 可参见 *[11]*, 推论 *2.10* 或 *[77]*, 推论 *A*, 我们这里给出的证明与文 *[77]* 中的证明是一样的。

§4.2 定理 A 的证明

在证明定理 A 之前，我们需给出一些预备引理。

设 $\mathcal{C}$ 为加法范畴。称 $\mathcal{C}$**具有可数重数直和**，如果对于任意 $X \in \mathcal{C}$，可数直和 $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} X$ 总是存在的。设 $X \in \mathcal{C}$。设有 $\mathcal{C}$ 中的子集 $\{Y_j\}_{j\in\Lambda}$ 且设其直和 $\bigoplus_{j\in\Lambda} Y_j$ 存在，则典范映射

$$\bigoplus_{j\in\Lambda} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_j) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \bigoplus_{j\in\Lambda} Y_j)$$

总为单射。称 X 为 $\mathcal{C}$ 中的**紧对象**，如果对于任意有直和的子集 $\{Y_j\}_{j\in\Lambda}$ 上面的典范映射总是同构。即，X 是紧对象当且仅当函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)$ 与任意（由指标集给出的且有意义的）直和交换。记范畴 $\mathcal{C}$ 中由全体紧对象组成的满子范畴为 $\mathcal{C}^c$。不难证明，子范畴 $\mathcal{C}^c \subseteq \mathcal{C}$ 在直和项以及有限直和下封闭。另外，若 $\mathcal{C}$ 为预三角范畴，则可证 $\mathcal{C}^c$ 是有厚度的三角子范畴（参见 [90]，引理 4.1.4 或 [104]，3.3.2）。

如下结论基本上属于 [20]，也可参考 [90]，命题 1.6.8。不难看出，它亦可视为文 [41] 中主结论的特殊情况。

引理 4.2.1 *设 $\mathcal{C}$ 为具有可数重数直和的预三角范畴。则范畴 $\mathcal{C}$ 是幂等可裂的。于是，子范畴 $\mathcal{C}^c$ 也是幂等可裂的。*

证. 这里的证明需用到**同伦正向极限**的想法，参见 [90]，第 68 页。设 $X \in \mathcal{C}$，$e : X \longrightarrow X$ 为幂等态射。考虑如下的正合三角

$$\bigoplus_{n\geq 0} X \xrightarrow{\theta} \bigoplus_{n\geq 0} X \xrightarrow{\eta} Y \longrightarrow (\bigoplus_{n\geq 0} X)[1]$$

其中态射 θ 由下面的无限矩阵给出（这里，我们认为 $\bigoplus_{n\geq 0} X$ 为列向量空间）

$$\theta=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -e & 1 & & & \\ 0 & -e & 1 & & \\ 0 & 0 & -e & 1 & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

设 $\eta=(u_0,u_1,\cdots)$。由 $\eta\circ\theta=0$，我们可得 $u_0=u_1=u_2=\cdots$ 且 $u_i\circ e=e$。记 $u=u_i$，$i\geq 0$。注意到上正合三角是可裂的（参考 [49]，第 7 页引理 1.4）。事实上，θ 有如下的左逆（注意：该无限矩阵是定义合理的）

$$\begin{pmatrix} 1-e & -e & -e & -e & \cdots & \\ & 1-e & -e & -e & \cdots & \\ & & 1-e & -e & & \\ & & & 1-e & -e & \\ & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

于是根据 [49]，第 7 页引理 1.4, η 为 retraction。考虑态射 $\gamma:\bigoplus_{n\geq 0} X\longrightarrow X$，其中 $\gamma=(e,e,\cdots)$。则 $\gamma\circ\theta=0$。根据命题 1.1.3(2)，存在态射 $v:Y\longrightarrow X$ 使得 $v\circ\eta=\gamma$。于是 $v\circ u=e$。我们断言 $u\circ v=\mathrm{Id}_Y$。若是，这就证明了 e 可裂。

事实上，我们有

$$\begin{aligned}(u\circ v)\circ\eta&=(u\circ v\circ u,u\circ v\circ u,\cdots) \qquad \text{注意到 } v\circ u=e\\ &=(u\circ e,u\circ e,\cdots) \qquad \text{注意到 } u\circ e=u\\ &=(u,u,\cdots)=\eta.\end{aligned}$$

但 η 为 retraction，于是，我们得出 $u\circ v=\mathrm{Id}_Y$。

下证子范畴 $\mathcal{C}^c$ 为幂等可裂的。首先注意到，$\mathcal{C}^c\subseteq\mathcal{C}$ 是在直和项下封闭，这就足以证明 $\mathcal{C}^c$ 幂等可裂了。事实上，设 $X\in\mathcal{C}^c$，$e:X\longrightarrow X$ 为幂等态射。

则 e 和 $\mathrm{Id}_X - e$ 均在 $\mathcal{C}$ 中分裂：$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} X$ 和 $X \xrightarrow{u'} Y \xrightarrow{v'} X$。但由引理 4.1.1(3)，知 $Y \oplus Y' \simeq X$，于是 $Y \in \mathcal{C}^c$。这样 e 在子范畴 $\mathcal{C}^c$ 中也可裂。 ■

下引理本质上属于 J. Rickard。设 R 为含幺环。分别记 R-Proj 和 R-proj 为投射左 R- 模和有限生成投射左 R- 模范畴。如下结论的证明蕴涵在文 [99] 的引理 1.1，引理 2.1 以及命题 6.3 中。

引理 4.2.2 设 R 为含幺环。则有界同伦范畴 $K^b(R\text{-Proj})$ 有可数重数直和，且有自然的范畴等价 $K^b(R\text{-proj}) \simeq K^b(R\text{-Proj})^c$。

证. 首先考虑范畴 $K^b(R\text{-Proj})$ 中的直和。为此，对于任意 $n \geq 1$，记满子范畴 $K^{[-n,n]} := \{P^\bullet \mid P^\bullet$ 同构于某个复形 $Q^\bullet$ 满足 $Q^i = 0,\ |i| > n\}$。不难得到，复形 $P^\bullet \in K^{[-n,n]}$ 当且仅当，对于任意 $P \in R\text{-Proj}$，$i > n$，有

$$\mathrm{Hom}_{K^b(R\text{-Proj})}(P[-i], P^\bullet) = 0, \quad \mathrm{Hom}_{K^b(R\text{-Proj})}(P^\bullet, P[i]) = 0.$$

设 Λ 为指标集，$P_j^\bullet \in K^b(R\text{-Proj})$，$j \in \Lambda$。我们断言直和 $\bigoplus_{j\in\Lambda} P_j^\bullet$ 存在当且仅当存在 $n \geq 1$，使得每个 $P_j^\bullet$ 均落在 $K^{[-n,n]}$ 中。若断言得证，则第一个结论自然成立。

证 "仅当" 部分。设 $P^\bullet = \bigoplus_{j\in\Lambda} P_j^\bullet$。则存在 $n \geq 1$ 使得 $P^\bullet \in K^{[-n,n]}$。根据直和的性质，我们得到，对于任意 $P \in R\text{-Proj}$，$i > n$，

$$\mathrm{Hom}_{K^b(R\text{-Proj})}(P[-i], P_j^\bullet) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{K^b(R\text{-Proj})}(P[-i], P^\bullet) = 0,$$

$$0 = \mathrm{Hom}_{K^b(R\text{-Proj})}(P^\bullet, P[i]) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_{K^b(R\text{-Proj})}(P_j^\bullet, P[i]).$$

于是，$P_j^\bullet \in K^{[-n,n]}$。反之，设 $P_j^\bullet \in K^{[-n,n]}$，$j \in \Lambda$。不妨设 $P_j^\bullet \simeq Q_j^\bullet$，使得 $Q_j^i = 0$，$|i| > n$。于是，可以自然地定义复形 $Q^\bullet := \bigoplus_{j\in\Lambda} Q_j^\bullet \in K^b(R\text{-Proj})$。不难证明 $Q^\bullet$ 就是 $P_j^\bullet$ 在范畴 $K^b(R\text{-Proj})$ 中的直和。这就证完了断言。

下证 $K^b(R\text{-proj}) \simeq K^b(R\text{-Proj})^c$。设 $P_j^\bullet$，$j \in \Lambda$ 且直和 $P^\bullet = \bigoplus_{j\in\Lambda} P_j^\bullet$ 存在。由上面的论证，可设存在 $n \geq 1$ 使得 $P_j^i = 0$，$|i| > n$，而且直和 $P^\bullet$ 是自然得到的，特别的，$P^i = \bigoplus_{j\in\Lambda} P_j^i$，$i \in \mathbb{Z}$ (这里的直和是模范畴中的直和)。设 $X^\bullet \in K^b(R\text{-proj})$。考虑链映射 $f^\bullet : X^\bullet \longrightarrow P^\bullet$。由于每个 X^i 均为有限生成，则存在有限子集 $\Lambda' \subseteq \Lambda$，使得 $f^\bullet$ 经由典范映射 $\bigoplus_{j\in\Lambda'} P_j^\bullet \longrightarrow P^\bullet$ 分解，这就得到了 $X^\bullet$ 为紧对象。故有 $K^b(R\text{-proj}) \subseteq K^b(R\text{-Proj})^c$。

反过来, 设 $P^\bullet \in K^b(R\text{-Proj})^c$。欲证 $P^\bullet \in K^b(R\text{-proj})$。对 $P^\bullet$ 的**宽度**$w(P^\bullet) := \#\{i \in \mathbb{Z} \mid P^i \neq 0\}$ 做归纳。若 $w(P^\bullet) = 1$, 即 $P^\bullet$ 为 stalk 复形。不妨设 $P^\bullet = P$ 为集中在 0 处。可设 $P \oplus Q = F$, 其中 $F = \bigoplus_{j\in\Lambda} R$ 为自由模。考虑自然映射 $f : P \longrightarrow F$, 并将该映射视为 $K^b(R\text{-Proj})$ 中的态射。由于 P 为紧对象, 则存在 Λ 的有限子集 Λ' 使得 f 经由 $\bigoplus_{j\in\Lambda'} R$ 分解。这样, 我们可得到模 P 是有限生成的, 故 $P^\bullet = P \in K^b(R\text{-proj})$。下设, $P^\bullet$ 为紧对象且 $w(P^\bullet) \geq 1$。不妨设复形 $P^\bullet = \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow P^0 \xrightarrow{d^0} P^1 \xrightarrow{d^1} P^2 \longrightarrow \cdots$, 其中 $P^0 \neq 0$。

情形一： 设 P^0 为有限生成 R- 模。则 P^0 为紧对象, 于是由自然的正合三角

$$\sigma^{\geq 1}P^\bullet \longrightarrow P^\bullet \longrightarrow P^0[0] \longrightarrow (\sigma^{\geq 1}P^\bullet)[1]$$

可得 $\sigma^{\geq 1}P^\bullet$ 也为紧对象。又由于 $w(\sigma^{\geq 1}P^\bullet) < w(P^\bullet)$, 由归纳假设, 可知 $\sigma^{\geq 1}P^\bullet \in K^b(R\text{-proj})$。于是, 再由上面的正合三角我们得到 $P^\bullet \in K^b(R\text{-proj})$ (这里需注意到, $K^b(R\text{-proj}) \subseteq K^b(R\text{-Proj})$ 为三角子范畴)。

情形二： 设 P^0 不为有限生成模。通过加上适当的 contractible 复形, 我们可设 P^0 为自由模。考虑如下的自然链映射

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_{P^0}"] & P^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[d] & P^2 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P^0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

由于 $P^\bullet$ 为紧对象, 该链映射经由 P^0 的某个有限生成直和项分解。换句话说, 存在分解 $P^0 = P'^0 \oplus P''^0$, 使得 P'^0 有限生成且上面的链映射同伦于

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P'^0 \oplus P''^0 \arrow[r, "(d'^0\ d''^0)"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}"'] & P^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[d] & P^2 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P'^0 \oplus P''^0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

其中 x, y 为模范畴中的态射。于是, 存在 $\binom{s'}{s''} : P^1 \longrightarrow P'^0 \oplus P''^0$ 使得

$$\begin{pmatrix} d'^0 & d''^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s' \\ s'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x & -y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

特别地，我们得到 $s'' \circ d''^0 = \mathrm{Id}_{P''^0}$。于是，存在分解 $P^1 = P'^1 \oplus P''^0$ 使得 $d^0 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ 且 $d^1 = (d'^1\ 0)$。于是，容易看到复形 $P^\bullet$ 同伦于如下复形

$$P'^\bullet = \quad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow P'^0 \xrightarrow{a} P'^1 \xrightarrow{d'^1} P^2 \xrightarrow{d^2} P^3 \longrightarrow \cdots$$

于是，$P'^\bullet$ 亦为紧对象，且注意到 $w(P'^\bullet) \leq w(P^\bullet)$，$P'^0$ 有限生成。这样，问题就转化到情形一，从而命题得证。 ■

定理 A 的证明： 设 $\mathcal{C}$ 幂等可裂，$X^\bullet \in K^b(\mathcal{C})$。设 $e : X^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ 为幂等态射。注意到，$X^\bullet \in K^b(\mathrm{add}T)$，其中 $T = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} X^i$。我们只需证明 e 在子范畴 $K^b(\mathrm{add}T)$ 中分裂即可。设 $R = \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(T)^{op}$。则函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,-)$ 诱导如下函子

$$\Phi_T : \quad \mathrm{add}T \longrightarrow R\text{-proj}.$$

易知 Φ_T 是满忠实函子，又由于 $\mathrm{add}T$ 幂等可裂，则可知 Φ_T 为稠密的，即，Φ_T 是范畴等价。于是，$K^b(\mathrm{add}T)$ 等价于 $K^b(R\text{-proj})$。结合引理 4.2.1 和引理 4.2.2，我们得到 $K^b(R\text{-proj})$ 是幂等可裂的 (也可见 [20]，命题 3.4)。于是，$K^b(\mathrm{add}T)$ 幂等可裂，从而 e 在其中分裂。证毕！ ■

§4.3 定理 B 的证明

为了证明定理 B，我们需做一些准备工作。

下面的引理是众所周知的。

引理 4.3.1 设 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ 为预三角范畴 $\mathcal{C}$ 中的正合三角。我们有
(1) 若态射 $e : Z \longrightarrow Z$ 满足 $e \circ v = v$ 且 $w \circ e = w$，则 e 为同构态射。
(2) 设有态射 $x : Z \longrightarrow Z'$ 以及 $y : Z' \to Z$ 满足 $x \circ v = 0$，$w \circ y = 0$。则 $x \circ y = 0$。

证. (1) 根据题设，我们有如下的正合三角间的态射

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, equal] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "e"] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & X[1]
\end{tikzcd}$$

则根据命题 1.1.3(3) 知态射 e 为同构。

(2) 由于 $x \circ v = 0$，则根据命题 1.1.3(2)，态射 x 经由 w 分解，则可设 $x' : X[1] \longrightarrow Z'$ 使得 $x = x' \circ w$。因此，$x \circ y = x' \circ w \circ y = 0$。 ■

接下来的命题可视为本节的关键所在。注意到，我们也可以根据文 [11] 的主定理：定理 1.5 来给它一个较简单的证明，但这里我们选择给出直接、初等的证明。

命题 4.3.2 设 $\mathcal{C}$ 为预三角范畴。设下图为正合三角的态射

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "e_1"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "e_2"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "e_3"] & X[1] \arrow[d, "e_1[1]"] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & X[1]
\end{tikzcd}$$

其中每个 e_i 均为幂等态射。则若 e_1 和 e_2 分裂，则 e_3 也分裂。

证. 根据引理 4.1.2，幂等态射 e_1 和 e_2 均强可裂。于是，我们可设 $X = X_1 \oplus X_2$ 且 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$Y = Y_1 \oplus Y_2$ 且 $e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。根据 $e_2 \circ u = u \circ e_1$，可知态射 u 是可对角化的，即可设 $u = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}$。取 $\mathcal{C}$ 中的正合三角

$$X_i \xrightarrow{u_i} Y_i \xrightarrow{v_i} Z_i \xrightarrow{w_i} X_i[1], \quad i = 1, 2.$$

于是，有如下的正合三角间的同构（参考命题 1.1.3(4) 和 (3)）

$$\begin{tikzcd}
X_1\oplus X_2 \arrow[r, "\begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}"] \arrow[d, equal] & Y_1\oplus Y_2 \arrow[r, "\begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix}"] \arrow[d, equal] & Z_1\oplus Z_2 \arrow[r, "\begin{pmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\theta"] & (X_1\oplus X_2)[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & X[1]
\end{tikzcd}$$

令 $e=\theta^{-1}\circ e_3\circ\theta$。注意到，$e$ 也为幂等态射且 e 分裂当且仅当 e_3 分裂。

由题设，不难得到如下的正合三角间的态射

$$\begin{tikzcd}
X_1\oplus X_2 \arrow[r, "\begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}"'] & Y_1\oplus Y_2 \arrow[r, "\begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}"'] & Z_1\oplus Z_2 \arrow[r, "\begin{pmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "e"] & (X_1\oplus X_2)[1] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}"] \\
X_1\oplus X_2 \arrow[r, "\begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}"] & Y_1\oplus Y_2 \arrow[r, "\begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix}"] & Z_1\oplus Z_2 \arrow[r, "\begin{pmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \end{pmatrix}"] & (X_1\oplus X_2)[1]
\end{tikzcd}$$

用矩阵的形式，记 $e=\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}$。由上图的交换性（以及一些必要的矩阵计算），我们得出

$$e_{11}\circ v_1=v_1,\quad w_1\circ e_{11}=w_1;$$
$$e_{12}\circ v_2=0,\quad e_{21}\circ v_1=0,\quad e_{22}\circ v_2=0;$$
$$w_1\circ e_{12}=0,\quad w_2\circ e_{21}=0,\quad w_2\circ e_{22}=0.$$

根据引理 4.3.1(1)，可知态射 e_{11} 为同构。再四次适当地利用引理 4.3.1(2)，可得以下等式

$$e_{12}\circ e_{21}=0,\quad e_{12}\circ e_{22}=0,\quad e_{22}^2=0,\quad e_{21}\circ e_{12}=0.$$

根据 $e^2=e$ 以及上四式，不难得到

$$e_{11}^2=e_{11},\quad e_{11}\circ e_{12}=e_{12},\quad e_{21}\circ e_{11}+e_{22}\circ e_{21}=e_{21},\quad e_{22}=0.$$

于是，$e_{11}=\mathrm{Id}_{Z_1}$ 且 $e=\begin{pmatrix}1 & e_{12}\\ e_{21} & 0\end{pmatrix}$。注意到 $e_{12}\circ e_{21}=0$ 且 $e_{21}\circ e_{12}=0$，因此，幂等态射 e 分裂为

$$Z_1\oplus Z_2\xrightarrow{(1\ e_{12})}Z_1\xrightarrow{\binom{1}{e_{21}}}Z_1\oplus Z_2.$$

证毕! ■

在给出定理证明之前，我们需回顾导出范畴 $D^b(\mathcal{A})$ 中好截断函子的性质，参见例 1.4.9。设 $X^\bullet\in D^b(\mathcal{A})$。则有截断复形 $\tau^{\le n}X^\bullet$ 和 $\tau^{\ge n}X^\bullet$，$n\in\mathbb{Z}$，且有标准正合三角 (参考式 (1.4.7))

$$\tau^{\le n}X^\bullet\longrightarrow X^\bullet\longrightarrow\tau^{\ge n+1}X^\bullet\longrightarrow(\tau^{\le n}X^\bullet)[1].\tag{4.3.1}$$

进一步，设 $a:X^\bullet\longrightarrow Y^\bullet$ 为导出范畴中的态射。则有正合三角间的态射图

$$\begin{tikzcd}
\tau^{\le n}X^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\tau^{\le n}(a)"] & X^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "a"] & \tau^{\ge n+1}X^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\tau^{\ge n+1}(a)"] & (\tau^{\le n}X^\bullet)[1] \arrow[d, "\tau^{\le n}(a)[1]"] \\
\tau^{\le n}Y^\bullet \arrow[r] & Y^\bullet \arrow[r] & \tau^{\ge n+1}Y^\bullet \arrow[r] & (\tau^{\le n}Y^\bullet)[1]
\end{tikzcd}$$

设 $X^\bullet\in D^b(\mathcal{A})$。称数 $hw(X^\bullet):=\#\{i\in\mathbb{Z}\mid H^i(X^\bullet)\neq 0\}$ 为复形 $X^\bullet$ 的**同调宽度**。注意到对于任意 n，有

$$hw(\tau^{\le n}X^\bullet)+hw(\tau^{\ge n+1}X^\bullet)=hw(X^\bullet).$$

注意到，这些概念对于具有有界 t- 结构的三角范畴均适用，参见 [44]，第 133-137 页或 [45]，第 278-286 页。

定理 B 的证明： 设 $e:X^\bullet\longrightarrow X^\bullet$ 为幂等态射。欲证 e 分裂。对复形 $X^\bullet$ 的同调宽度 $hw(X^\bullet)$ 做归纳。若 $hw(X^\bullet)=1$，由注记 1.4.11，可设 $X^\bullet=X[n]$ 为 stalk 复形，其中 $X\in\mathcal{A}$。不妨设 $n=0$。但由命题 1.4.10，可知自然函子 $\mathcal{A}\longrightarrow D^b(\mathcal{A})$ 为满嵌入，而 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 总为幂等可裂的 (应用引理 4.1.1(2))。于是此时，态射 $e:X[0]\longrightarrow X[0]$ 在 $D^b(\mathcal{A})$ 中分裂。

下设 $l \geq 1$ 且对于所有同调宽度小于或等于 l 的复形，其上的幂等态射可裂。设 $X^\bullet$ 满足 $hw(X^\bullet) = l + 1$，$e : X^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ 为幂等态射。取 $n \in \mathbb{Z}$ 使得 $hw(\tau^{\leq n} X^\bullet), hw(\tau^{\geq n+1} X^\bullet) \leq l$。考虑如下正合三角间的态射图

$$\begin{tikzcd}
\tau^{\leq n} X^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\tau^{\leq n}(e)"] & X^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "e"] & \tau^{\geq n+1} X^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\tau^{\geq n+1}(e)"] & (\tau^{\leq n} X^\bullet)[1] \arrow[d, "\tau^{\leq n}(e)[1]"] \\
\tau^{\leq n} X^\bullet \arrow[r] & X^\bullet \arrow[r] & \tau^{\geq n+1} X^\bullet \arrow[r] & (\tau^{\leq n} X^\bullet)[1]
\end{tikzcd}$$

由 $\tau^{\leq n}$ 和 $\tau^{\geq n+1}$ 的函子性，可知上图中的四个竖直态射均为幂等态射。于是由归纳假设，可知 $\tau^{\leq n}(e)$ 和 $\tau^{\geq n+1}(e)$ 均可裂。这样，根据命题 4.3.2 幂等态射 e 也分裂。证毕! ■

参考文献

[1] M. Artin and J. J. Zhang, *Noncommutative projective schemes,* Adv. Math. **109** (1994), 228-287.

[2] M. Auslander, *Coherent functors,* in "Proc. Conf. Categorical Algebra", La Jolla 1965, 189-231, Springer-Verlag, 1966.

[3] M. Auslander, Representation Dimension of Artin Algebras, Lecture Notes, Queen Mary College, London, 1971.

[4] M. Auslander and R. O. Buchweitz, *The homological theory of maximal Cohen-Macaulay approximations,* Memoire de la S.M.F. 2^e serie, tome **38** (1989), 5-37.

[5] M. Auslander and I. Reiten, *Stable equivalence of dualizing R-varieties,* Adv. Math. **12** (1974), 306-366.

[6] M. Auslander and I. Reiten, *Cohen-Macaulay and Gorenstein artin algebras,* in: Representation theory of finite groups and finite-dimensional algebras (Prof. Conf. at Bielefeld, 1991), 221-245, Progress in Math., vol. **95**, Birkhäuser, Basel, 1991.

[7] M. Auslander and I. Reiten, *Applications of contravariantly finite subcategories,* Adv. Math. **86** (1991), 111-152.

[8] M. Auslander, I. Reiten, and S. O. Smalø, Representation Theory of Artin Algebras, Cambridge University Press, 1995.

[9] M. Auslander and S. O. Smalø, *Preprojective modules over artin algebras,* J. Algebra **66** (1980), 61-122.

[10] M. Auslander and S. O. Smalø, *Almost split sequences in subcategories,* J. Algebra **69** (1981), 426-454.

[11] P. Balmer and M. Schlichting, *Idempotent completion of triangulated categories,* J. Algebra **236**(2) (2001), 819-834.

[12] H. Bass, *On the ubiquity of Gorenstein rings,* Math. Z. **82** (1963), 8-28.

[13] A. A. Beilinson, *Coherent sheaves on $\mathbb{P}^n$ and problems of linear algebra,* Func. Anal. Appl. **12** (1978), 214-216.

[14] A. A. Beilinson, *The derived category of coherent sheaves on $\mathbb{P}^n$,* Sel. Math. Sov., vol **3** no.3, 1983/84, 233-237.

[15] A. A. Beilinson, J. Berstein, *Localisation des $\mathcal{G}$- modules,* C. R. Acad. Sci. Ser. I tome **292**(1981), 15-18.

[16] A. A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, Faisceaux Pervers, Astérisque **100**, Societé Mathématique de France, Paris, 1982.

[17] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand and S. I. Gelfand, *Algebraic bundles over $\mathbb{P}^n$ and problems of linear algebra,* Func. Anal. Appl. **12** (1978), 212-214.

[18] A. Beligiannis, *The homological theory of contravariantly finite subcategories: Auslander-Buchweitz contexts, Gorenstein categories and (co)stabilization,* Comm. Algera **28** (2000), 4547-4596.

[19] R. Bocklandt, *Graded Calabi-Yau algebras of dimension 3*, with an appendix by M. Van den Bergh, math.RA/0603558.

[20] M. Bökstedt and A. Neeman, *Homotopy limits in triangulated categories,* Compositio Math. **86** (1993) 209-234.

[21] A. I. Bondal and M. M. Kapranov, *Representable functors, Serre functors, and reconstructions,* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **53** (1989), 1183-1205.

[22] T. Bridgeland, *Stability conditions on triangulated categories,* Annals Math., to appear.

[23] M. Broué, *Blocs isométries parfaites, catégories dérivées,* C. R. Acad. Sci. tome **307** (1988), 13-18.

[24] E. H. Brown, *Cohomology theories,* Annals Math. **75**(1962), 467-484.

[25] J. L. Brylinski, M. Kashiwara, *Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems,* Invent. Math. **64** (1981), 387-410.

[26] A. B. Buan, R. J. Marsh, M. Reineke, I. Reiten, G. Todorov, *Tilting theory and cluster combinatorics,* Adv. Math. **204** (2006) 572-618.

[27] A. B. Buan, R. J. Marsh, I. Reiten, *Cluster-tilted algebras,* Trans. Amer. Math. Soc. **359** (1)(2007), 323-332.

[28] R. O. Buchweitz, Maximal Cohen-Macaulay Modules and Tate-Cohomology over Gorenstein Rings, Unpublished manuscript, 155pp, 1987.

[29] R. O. Buchweitz, D. Eisenbud and J. Herzog, *Cohen-Macaulay modules over quadrics,* in: Singularities, representation of algebras, and vector bundles, Lecture Notes in Math. **1273**, 58-116, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[30] X. W. Chen, *Generalized Serre duality,* math.RT/0610258.

[31] X. W. Chen, Y. Ye and P. Zhang, *Algebras of derived dimension zero,* Comm. Algebra, to appear.

[32] X. W. Chen and P. Zhang, *Quotient triangulated categories,* Manuscipta Math., accepted.

[33] C. Cibils and P. Zhang, *Calabi-Yau objects in triangulated categories,* math.RT/0612689.

[34] E. Cline, B. Parshall, L. L. Scott, *Derived categories and Morita theory,* J. Algebra **104** (2)(1986), 397-409.

[35] K. Costello, *Topological conformal field theories and Calabi-Yau categories,* math.QA/0412149.

[36] P. Dräxler, I. Reiten, S. O. Smalø, O. Solberg and with an appendix by B. Keller, *Exact categories and vector space categories,* Trans. Amer. Math. Soc. **351**(2)(1999), 647–682.

[37] D. Eisenbud, *Homological algebra on a complete intersection, with an application to group representations,* Trans. Amer. Math. Soc. **260** (1980), 36-54.

[38] E. E. Enochs, O. M. G. Jenda, Relative Homological Algebra, de Gruyter Expositions in Math. **30**, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2000.

[39] K. Erdmann, A. Skowroński, *The stable Calabi-Yau dimension of tame symmetric algebras,* J. Math. Soc. Japan **58**(1)(2006), 97-128.

[40] P. Freyd, *Stable homotopy,* in “Proc. Conf. Categorical Algebra”, La Jolla 1965, 121-172, Springer-Verlag, 1966.

[41] P. Freyd, *Splitting homotopy idempotents,* in “Proc. Conf. Categorical Algebra”, La Jolla 1965, 173-176, Springer-Verlag, 1966.

[42] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes,* Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 323-448.

[43] P. Gabriel and A. V. Roiter, Representations of Finite Dimensional Algebras, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1997.

[44] S. I. Gelfand and Yu I. Manin, Homological Algebra, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1999.

[45] S. I. Gelfand and Yu I. Manin, Methods of Homological Algebra, Second Edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2003.

[46] V. Ginzburg, *Calabi-Yau algebras,* math.AG/0612139.

[47] A. Grothendieck, *The cohomology theory of abstract algebraic varieties,* Int. Con. Math. (Edinburgh, 1958), Cambridge Uni. Press, 103-118, 1960.

[48] D. Happel, *On the derived category of a finite-dimensional algebra,* Comment. Math. Helv. **62** (1987), 339-389.

[49] D. Happel, Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras, London Mathematical Society Lecture Note Ser. **119**, Cambridge University Press, 1988.

[50] D. Happel, *Auslander-Reiten triangles in derived categories of finite-dimensional algebras,* Proc. Amer. Math. Soc. **112** (1991), 641-648.

[51] D. Happel, *On Gorenstein algebras,* in: Representation theory of finite groups and finite-dimensional algebras (Prof. Conf. at Bielefeld, 1991), 389-404, Progress in Math., vol. **95**, Birkhäuser, Basel, 1991.

[52] D. Happel, I. Reiten, S. O. Smalø, Tilting in Abelian Categories and Quasitilted Algebras, Memoirs Amer. Math. Soc., vol. **120** no. 575, Province, Rhode Island, 1996.

[53] D. Happel and L. Unger, *Modules of finite projective dimension and cocovers,* Math. Ann. **306** (1996), 445-457.

[54] R. Hartshorne, Residue and Duality, Lecture Notes in Math. **20**, Springer-Verlag, 1966.

[55] A. Heller, *The loop-functor in homological algebra,* Trans. Amer. Math. Soc. **96** (1960), 382-394.

[56] A. Heller, *Stable homotopy category,* Bull. Amer. Math. Soc. **74** (1968), 28-63.

[57] B. Iversen, Cohomology of Sheaves, Springer-Verlag, 1980.

[58] O. Iyama and Y. Yoshino, *Mutations in triangulated categories and rigid Cohen-Macaulay modules,* math.RT/0607736.

[59] A. Kapustin, Y. Li, *D-branes in Landau-Ginzburg models and algebraic geometry,* J. High Energy Phys. **12**:005 (2003), 44pp.

[60] A. Kapustin, Y. Li, *Topological correlators in Landau-Ginzburg models with boundaries,* Adv. Theor. Math. Phys. **7** (2003) 727-749.

[61] M. Kashiwara, *Algebraic study of systems of partial differential equations,* Thesis, Uni. Tokyo, 1970.

[62] M. Kashiwara and P. Schapira, Sheaves on Manifolds, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **292**, Springer, 1990.

[63] M. Kashiware and P. Schapira, Categories and Sheaves, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **332**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

[64] B. Keller, *Chain complexes and stable categories,* Manuscripta Math. **67**(4)(1990), 379-417.

[65] B. Keller, *Derived categories and universal problems,* Comm. Algebra **19** (1991), 379-417.

[66] B. Keller, *Deriving DG categories,* Ann. Sci. École. Norm. Sup. **27** (1994), 63–102.

[67] B. Keller, *Derived categories and their uses,* Handbook of Algebra **1**(1996), North-Holland, Amsterdam, 671-701.

[68] B. Keller, *Triangulated orbit categories,* Documenta Math. **10** (2005), 551-581.

[69] B. Keller, I. Reiten, *Cluster-tilted algebras are Gorenstein and stably Calabi-Yau,* math.RT/0512471.

[70] S. Koenig, A. Zimmermann, Derived Equivalences for Group Rings, Lecture Notes in Math. **1685**, Springer-Verlag, 1998.

[71] M. Kontsevich, *Homological algebra of mirror symmetry,* Proc. ICM (Zurich 1994), 120-139, Basel, Birkhäuser, 1995.

[72] H. Krause, *Auslander-Reiten theory via Brown representability,* K-Theory **20** (2000), 331-344.

[73] H. Krause, *Derived categories, resolutions, and Brown representability,* Summer School Chicago, 2004.

[74] H. Krause, *The stable derived category of a noetherian scheme,* Compositio Math. **141** (2005), 1128-1162.

[75] C. I. Lazariou, *On the structure of open-closed topological field theory in two dimensions,* Nucl. Phy. B **603** (2001), 497.

[76] C. I. Lazariou, *Graded D-branes and skew categories,* hep-th/061204.

[77] J. Le and X. W. Chen, *Karoubianness of a triangulated category*, J. Algebra **310** (2007), 452-457.

[78] J. Lipman, Notes on Derived Categories and Derived Functors, 191pp.

[79] S. MacLane, Categories for the Working Mathematician, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1971.

[80] J. P. May, *The additivity of traces in triangulated categories,* Adv. Math. **163** (2001), 34-73.

[81] V. Mazorchuk and C. Stroppel, *Projective-injective modules, Serre functors and symmetric algebras,* U.U.D.M. Report 2005:26.

[82] D. Miličić, Lectures on Derived Categories, 222pp.

[83] B. Mitchell, Theory of Categories, Academic Press, 1965.

[84] G. W. Moore, *Some comments on branes, G-flux, and K-theory,* Int. J. Mod. Phy. A **16** (2001), 936.

[85] K. de Naeghel and M. Van den Bergh, *Ideal classes of three-dimensional Sklyanin algebras,* J. Algebra **276** (2004), 515-551.

[86] A. Neeman, *The derived category of an exact category,* J. Algebra **135** (1990), 388-394.

[87] A. Neeman, *Some new axioms for triangulated categories,* J. Algebra **139** (1990), 221-255.

[88] A. Neeman, *The connection between the K-theory localization theorem of Thomason, Trobaugh and Yao and the smashing subcategories of Bousfield and Ravenel,* Ann. Sci. École Norm. Sup. **25**(4)(1992), 547-566.

[89] A. Neeman, *The Grothendieck duality theorem via Bousfield's techniques and Brown representability,* J. Amer. Math. Soc. **9**(1996), 205-236.

[90] A. Neeman, Triangulated Categories, Annals of Mathematics Studies, **148**, Princeton University Press, Princeton, 2002.

[91] D. Orlov, *Triangulated categories of singularities and D-branes in Landau-Ginzburg models,* Proc. Steklov Inst. Math. **246** (3) (2004), 227-248.

[92] D. Orlov, *Triangulated categories of singularities and equivalences between Landau-Ginzburg models,* math.AG/0503630.

[93] D. Orlov, *Derived categories of coherent sheaves and triangulated categories of singularities,* math.AG/0503632.

[94] B. J. Parshall and L. L. Scott, Derived Categories, Quasi-hereditary Algebras, and Algebraic Groups, Carlton U. Math **3** (1988), 1-104.

[95] L. G. Peng and J. Xiao, *Triangulated categories and Kac-Moody Lie algebras,* Invent. Math. **140** (2000), 563-603.

[96] D. Puppe, *Stabile homotopietheorie I,* Math. Ann. **169** (1967), 243-274.

[97] D. Quillen, *Higher algebraic K-theory I,* Lecture Notes in Math. **341**, 85-147, Springer-Verlag, 1973.

[98] I. Reiten and M. Van Den Bergh, *Noetherian hereditary abelian categories satisfying Serre duality,* J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 295-366.

[99] J. Rickard, *Morita theory for derived categories,* J. London Math. Soc. (2) **39**(1989), 436-456.

[100] J. Rickard, *Derived categories and stable equivalence,* J. Pure Appl. Algebra **61** (1989), 303-317.

[101] J. Rickard, *Derived equivalences as derived functors,* J. London Math. Soc. (2) **43** (1991), 37-48.

[102] C. M. Ringel, Tame Algebras and Integral Quadratic Forms, Lecture Notes in Math. **1099**, Springer-Verlag, 1984.

[103] C. M. Ringel, *Representation theory of finite-dimensional algebras,* in: Representations of Algebras (Durham, 1985), 7-79, London Math. Soc., Lecture Note Ser. **116**, Cambridge Uni. Press, Cambridge 1986.

[104] R. Rouquier, *Dimensions of triangulated categories,* math.CT/0310134.

[105] M. Sato, *Hyperfunctions and partial differential equations,* Proc. Inter. Conference on Functional analysis and related topics, Tokyo 1969, 91-94, Uni. Tokyo Press, 1969.

[106] R. W. Thomason and T. F. Trobaugh, *Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories,* The Grothendieck Festschrift, vol. **3**, Birkhäuser, 1990, 247-435.

[107] B. Toën, *Derived Hall algebra,* math.QA/0501343.

[108] K. Ueda, *Greaded B-Branes on simple singularites,* math.AG/0508258.

[109] M. Van den Bergh, *Existence theorems for dualizing complexes over non-commutative graded and filtered rings,* J. Algebra **195** (1997), 662-679.

[110] J. L. Verdier, *Catégories dérivées, etat 0,* Springer Lecture Notes **569** (1977), 262-311.

[111] J. L. Verdier, *Des catégories dérivées des catégories abéliennes,* Astérisque **239**, 1996.

[112] C. Weibel, An Introduction to Homological Algebra, Cambridge Studies in Adv. Math. **38**, Cambridge Univ. Press, 1994.

[113] J. Xiao, F. Xu, *Hall algebra in a triangulated category,* math.QA/0608144.

[114] A. Yekutieli, *Dualizing complexes over noncommutative graded algebras,* J. Algebra **153** (1992), 41-84.

[115] A. Zaks, *Injective dimensions of semiprimary rings,* J. Algebra **13** (1969), 73-89.

致 谢

感谢我的导师章璞教授六年来对我的悉心指导和诸多帮助。章老师严谨的治学作风和对数学问题敏锐的洞察力对我影响至深，也令我十分钦佩。感谢章老师引导我来到导出范畴和三角范畴的研究领域中，感谢章老师一直鼓励我同该方向的一流数学家进行直接交流。章老师的精彩讲稿《导出范畴九讲》以及讲稿的行文风格对本论文有着本质性的影响。另外，感谢师母对我生活和学习上的关心并给予很大的帮助。

感谢我的欧洲导师 Fred Van Oystaeyen 教授对我的指导。感谢张印火教授及其家人在我旅比期间给我的帮助和关照。感谢 Asia-Link 项目以及其主持者 Steffen Koenig 教授。

感谢胡森教授对我的关心和对我学习研究的一贯支持，胡老师的讨论班大大拓宽了我的视野。感谢部云教授精彩的课程。感谢师兄叶郁副教授和黄华林副教授，感谢他们有耐心来回答我提出的许多学术问题。感谢讨论班的每个成员，谢谢他们给了我这么良好的研讨氛围。

感谢 Michel Van den Bergh 教授，朱彬教授，方明博士以及何济位博士对本文的建议。在读博期间，本人曾多次受到国际同行在文献方面的帮忙，他们是 Bernhard Keller, David Radford 以及 Mumfred Scheunert 教授等，在此一并感谢。

最后，感谢家人对我的支持，特别是妻子，感谢她为我营造了一个安静舒适的环境，使本文的写作变得十分愉快。

攻读博士学位期间完成论文情况

[1] Xiao-Wu Chen, Hua-Lin Huang, Yu Ye, Pu Zhang, Monomial Hopf algebras, J. Algebra 275 (1) (2004), 212–232.

[2] Xiao-Wu Chen, Hua-Lin Huang, Pu Zhang, Dual Gabriel theorem with applications, Science in China (A) 49(1) (2006), 9-26.

[3] Xiao-Wu Chen, Toukaiddine Petit, Fred Van Oystaeyen, Note on the cohomology of color Hopf and Lie algebras, J. Algebra 299 (2006), 419-442.

[4] Xiao-Wu Chen, Hua-Lin Huang, Yan-Hua Wang, A note on "Modules, comodules and cotensor products over Frobenius algebras", Chinese Annals of Mathematics (B) 27(4) (2006), 419-424.

[5] Xiao-Wu Chen, Sergei D. Silvestrov, Fred Van Oystaeyen, Representations and cocycle twists of color Lie algebras, Algebras and Representation Theory 9(6) (2006), 633-650.

[6] Yu Du, Xiao-Wu Chen, Yu Ye, On graded bialgebra deformations, Algebra Colloq. 14:2 (2007), 301-312.

[7] Xiao-Wu Chen, Duality between quantum symmetric algebras, Letters in Math. Physics 90(1) (2007), 39-50.

[8] Jue Le and Xiao-Wu Chen, Karoubianness of a triangulated category, J. Algebra 310 (2007), 452-457.

[9] Yan-Hua Wang, Xiao-Wu Chen, Construct non-graded bi-Frobenius algebras via quivers, Science in China (A) 50(3) (2007), 450-456.

[10] Xiao-Wu Chen, Yu Ye, Pu Zhang, Algebras of derived dimension zero.
被 Commun. Algebra 接受发表.

[11] Xiao-Wu Chen, Pu Zhang, Quotient triangulated categories.
被 Manuscipta Math. 接受发表.

[12] Xiao-Wu Chen, Pu Zhang, Comodules of $U_q(sl_2)$ and modules of $SL_q(2)$ via quiver methods.
被 J. Pure and Applied Algebra 接受发表.

[**13**] Xiao-Wu Chen, Generalized Serre duality. 已投稿.