对偶 Gabriel 定理及其应用*

陈小伍**

(中国科学技术大学 1. 数学系，合肥 230026; 2. 上海高等研究院数学和理论物理中心，上海 201315)

黄华林

(Mathematical Section, The Abdus Salam ICTP, Strada Costiera 11, Trieste 34014, Italy)

章 璞

(上海交通大学数学系，上海 200240)

摘要 定义了余半单余代数上双余模的箭图，并由此定义任意余代数 C 的 Gabriel 箭图，证明了它和 C 的 Ext 箭图是一致的．对于具有可分余根 C_0 的余代数，得到对偶 Gabriel 定理，这推广了点化余代数的相应结果．对于任意余代数，给出 $C_1 = C_0 \wedge_C C_0$ 的新刻画，这推广了点化余代数的 Taft-Wilson 定理．作为应用，对局部有限余代数和拟余 Frobenius 代数给出了其 Gabriel 箭图的组合刻画．

关键词 箭图 余张量余代数 对偶 Gabriel 定理 拟余 Frobenius 代数

1 引言和基础知识

域 K 上有限维代数 A 称为初等的, 如果 $A/\mathrm{rad}(A)$ 是若干个 K 的直积, 其中 $\mathrm{rad}(A)$ 是 A 的 Jacobson 根；域 K 上有限维代数 A 称为基的, 如果 $A/\mathrm{rad}(A)$ 是 K 上若干个可除代数的直积． Gabriel 定理断言初等代数 A 同构于路代数 $KQ(A)^a$

2005-08-02 收稿

* 国家自然科学基金 (批准号: 10271113, 10301033) 和教育部博士点基金资助项目

** E-mail: xwchen@mail.ustc.edu.cn

关于一个可容许理想的商代数，其中 $Q(A)$ 是 A 的 Gabriel 箭图 (参见文献 [1] 定理 1.9 和文献 [2], p. 43). 因为任意有限维代数 Morita 等价于一个唯一确定的基代数，并且代数闭域上的基代数是初等的，因此代数闭域上任意有限维代数 Morita 等价于路代数关于一个可容许理想的商代数. 而在研究代数的表示中，Auslander-Reiten 箭图是基本的方法.

正如文献 [3] 指出的，根据余代数的基本定理 (即单余代数是有限维的), 箭图的方法对余代数的研究也是重要的.

事实上，过去几年里在此方向上有好几个工作：路代数的构造被对偶，得到了路余代数；引入了任意余代数的 Ext 箭图，并对点化余代数 C 得到了对偶 Gabriel 定理 (这里 C 可以是无限维的 [3]); 利用单子余代数的楔 (wedge) 积引入余代数的链 (link) 箭图；在不计箭向重数的意义下，链箭图和 Ext 箭图是一样的；它们是连通的当且仅当 C 作为余代数不可分解. 利用这些结果, 证明了点化 Hopf 代数总是某一群代数和某一不可分解分支的交叉积 [4]; 而余代数的 Auslander-Reiten 箭图在余代数的余模研究中也是十分有用的 [5].

另一方面，箭图方法对于非交换非余交换的 Hopf 代数的研究也有若干进展：文献 [6] 找出了基本圈的路代数上所有分次 Hopf 结构；文献 [7] 研究了一般路代数上的分次 Hopf 结构；文献 [8] 研究了某些二次代数上的 Hopf 结构；最近，文献 [9] 引进了 Hopf 箭图，并将其上的所有分次 Hopf 结构作了分类；利用箭图的技巧，在文献 [10] 中，我们对所有的单项 (monomial) Hopf 代数作了分类；文献 [11] 构造了一类非 Hopf 代数的双 Frobenius 结构.

上述文献启发我们在余代数研究中进一步发展箭图方法. 首先，注意到对代数而言，除了 Ext 箭图外，Gabriel 箭图还另有定义，这些不同的定义反映了本质的联系. 自然的问题是对余代数而言有无类似的结果. 本文第 2 节引入了余半单余代数上双余模的箭图，将它应用到 C_0-C_0 双余模 C_1/C_0 上，我们得到了任一余代数 C 的 Gabriel 箭图 $Q(C)$ 的新定义，其中 C_0 是 C 的余根，$C_1 = C_0 \wedge_C C_0$, 并证明了箭图 $Q(C)$ 和 C 的 Ext 箭图是一致的.

余代数 C 称为点化的, 如果 C 的每个单子余代数均是一维的 (当 C 为有限维时, 这个概念就是初等代数的对偶); 称 C 是基的，如果其每个单子余代数均是某个有限维可除代数的对偶. 作为 Gabriel 定理的一个对偶，Chin 和 Montgomery[3] 证明了点化余代数 C 同构于 C 的 Ext 箭图的路余代数的一个大 (large) 子余代数 (参见注 3.1). 因为任一余代数 Morita-Takeuchi 等价于一个唯一确定的基余代数，并且在代数闭域上基余代数是点化的，因此，在代数闭域上任一余代数 Morita-Takeuchi 等价于路余代数的一个大子余代数 (参见文献 [3] 定理 4.3). 在定理 3.1 中，我们证明了任意域上具有可分余根 C_0 的余代数 C 总同构于余张量余代数 $\mathrm{Cot}_{C_0}(C_1/C_0)$ 的一个大子余代数. 因为点化余代数的余根总是可分的，并且对点化余代数 C 而言，余张量余代数 $\mathrm{Cot}_{C_0}(C_1/C_0)$ 同构于路余代数 KQ^c, 其中 Q

是 C 的 Gabriel 箭图，所以我们的结果推广了上述点化余代数的对偶 Gabriel 定理.

设 C 是任一余代数，$C_0=\oplus_{i\in I}D^i$ 是其余根，其中 D^i 是 C 的单子余代数. 定理 4.1 证明了

$$C_1=\sum_{i,j\in I}(D^i\wedge_C D^j),$$
$$C_1/C_0\cong\oplus_{i,j\in I}(D^i\wedge_C D^j)/(D^i+D^j).$$

这个结论可看作著名的 Taft-Wilson 定理的推广，见注 4.1. 作为应用，我们统一了 C 的链箭图，Gabriel 箭图和 Ext 箭图，见推论 4.1.

最后两节包含了定理 3.1 和 4.1 的两个应用：证明了具有可分余根的余代数是局部有限的当且仅当它的 Gabriel 箭图是局部有限的 (定理 5.1); 非单的不可分解拟余 Frobenius 代数的 Gabriel 箭图没有源点和汇点，见定理 6.1. 在有限维的情形，定理 6.1 是代数中相应结果的对偶.

本文中所有余代数和张量积都在一个固定的域 K 上. 对于 K 空间 V, 用 V^* 表示 $\mathrm{Hom}_K(V,K)$.

设 $(C,\Delta_C,\varepsilon_C)$ 是余代数. 右 C 余模 (M,ρ) 是一个 K 空间 M 和一个 K 线性映射 ρ: $M\to M\otimes C$, 使得

$$(\rho\otimes Id)\circ\rho=(Id\otimes\Delta_C)\circ\rho,\quad (Id\otimes\varepsilon_C)\circ\rho=Id,$$

其中 Id 表示恒等映射. 左 C 余模类似. 设 D 是余代数. 一个 D-C 双余模 (M,ρ_l,ρ_r) 是指：(M,ρ_l) 是左 D 余模，(M,ρ_r) 是右 C 余模，且满足

$$(Id\otimes\rho_r)\circ\rho_l=(\rho_l\otimes Id)\circ\rho_r.$$

设 (M,ρ) 和 (N,δ) 分别是右 C 余模和左 C 余模. M 和 N 在 C 上的余张量积定义为

$$M\Box_C N=\mathrm{Ker}(\rho\otimes Id-Id\otimes\delta\colon M\otimes N\to M\otimes C\otimes N),$$

它是 $M\otimes N$ 的一个子空间. 如果 M 是一个 D-C 双余模并且 N 是一个 C-D' 双余模，则 $M\Box_C N$ 有一个自然的 D-D' 双余模结构. 余张量运算满足结合律：如果 L 是一个 D'-C' 双余模，则作为 D-C' 余模,

$$(M\Box_C N)\Box_{D'}L\simeq M\Box_C(N\Box_{D'}L).$$

设 $(C,\Delta_C,\varepsilon_C)$ 是余代数，(M,ρ_l,ρ_r) 是 C-C 双余模. 对每个 $m\in M$, 设

$$\rho_l(m)=\sum m_{-1}\otimes m_0,\quad \rho_r(m)=\sum m_0\otimes m_1.$$

定义

$$M^{\Box 0}=C,\quad M^{\Box 1}=M,\quad M^{\Box n}=(M^{\Box(n-1)})\Box_C M,$$

其中 $n\geqslant 2$. 注意到 $M^{\Box n}$ 是 $M^{\otimes n}$ 的子空间. 若 $\sum m^1\otimes\cdots\otimes m^n\in M^{\Box n}$, 则将其记为 $\sum m^1\Box\cdots\Box m^n$. 定义余张量余代数 $\mathrm{Cot}_C(M)$ 如下：作为 K 空间

$$\mathrm{Cot}_C(M)=\oplus_{i=0}^{\infty}M^{\Box i};$$

余单位 ε 满足 $\varepsilon|_{M^{\Box i}}=0$, 对任意 $i\geqslant 1$, 且 $\varepsilon|_{M^{\Box 0}}=\varepsilon_C$; 余乘 Δ 定义为

$$\Delta|_{M^{\Box 0}}=\Delta_C,$$
$$\Delta(m)=\rho_l(m)+\rho_r(m)=\sum m_{-1}\otimes m_0+m_0\otimes m_1,\quad \forall\, m\in M;$$

一般地，若 $\sum m^1\Box\cdots\Box m^n\in M^{\Box n}$ $(n\geqslant 1)$, 则

$$\begin{aligned}
&\Delta\Big(\sum m^1\Box\cdots\Box m^n\Big)\\
&=\sum (m^1)_{-1}\otimes((m^1)_0\Box\cdots\Box m^n)+\sum_{i=1}^{n-1}(m^1\Box\cdots\Box m^i)\otimes(m^{i+1}\Box\cdots\Box m^n)\\
&\quad+\sum(m^1\Box\cdots\Box(m^n)_0)\otimes(m^n)_1\\
&\in(C\otimes M^{\Box n})\oplus\oplus_{i=1}^{n-1}(M^{\Box i}\otimes M^{\Box(n-i)})\oplus(M^{\Box n}\otimes C)\\
&\subseteq \mathrm{Cot}_C M\otimes\mathrm{Cot}_C(M).
\end{aligned}$$

可以验证 Δ 是定义合理的，且 $(\mathrm{Cot}_C(M),\Delta,\varepsilon)$ 是一个余代数.

注 1.1 如果 C 是余半单的, 则余代数 $\mathrm{Cot}_C(M)$ 是余根分次的, 即 $\{\oplus_{i\leqslant n}M^{\Box i}\,|n=0,1,\cdots\}$ 是它的余根滤链，参见文献 [12] 第 2 节.

箭图 Q 是指一个有向图 $Q=(Q_0,Q_1,s,t)$, 其中 Q_0 是顶点集，Q_1 是箭向集，若 $\alpha\in Q_1$, 则 $s(\alpha)$ 和 $t(\alpha)$ 分别是箭向 α 的始点和终点．这里 Q_0 和 Q_1 可以是无限集.

箭图 Q 的路余代数 KQ^c 是以 Q 的所有道路为基的 K 空间，其余乘由下式确定：

$$\Delta(p)=\alpha_l\cdots\alpha_1\otimes s(\alpha_1)+\sum_{i=1}^{l-1}\alpha_l\cdots\alpha_{i+1}\otimes\alpha_i\cdots\alpha_1+t(\alpha_l)\otimes\alpha_l\cdots\alpha_1,$$

其中 $p=\alpha_l\cdots\alpha_1$ 是 Q 中的道路，每个 $\alpha_i\in Q_1$, 其余单位定义为：若 $l\geqslant 1$, 则 $\varepsilon(p)=0$, 否则 $\varepsilon(p)=1$. 注意到 KQ^c 是点化的，它的余根滤链是 $\{C_n\}$, 其中

$$C_n=KQ_0\oplus\cdots\oplus KQ_n,$$

Q_n 表示 Q 中长度为 n 的道路的集合.

注 1.2 路余代数是余张量余代数的特例．事实上，有余代数同构

$$KQ^c\simeq\mathrm{Cot}_{KQ_0}(KQ_1),$$

其中 KQ_1 的 KQ_0-KQ_0 双余模结构如下：

$$\rho_l(\alpha):=t(\alpha)\otimes\alpha,\quad \rho_r(\alpha):=\alpha\otimes s(\alpha)\quad(\alpha\in Q_1).$$

另一方面，如果 C 是点化的，则 C_1/C_0 成为一个 C_0-C_0 双余模，且有余代数同构

$$\mathrm{Cot}_{C_0}(C_1/C_0)\simeq KQ(C)^c,$$

其中 $Q(C)$ 是 C 的 Gabriel 箭图，参见 2.2 和注 3.1.

2　余代数的 Gabriel 箭图

2.1　余半单余代数上双余模的箭图

设 $D=\oplus_{i\in I}D^i$ 是余半单余代数，其中 D^i 均是 D 的单子余代数，(M,ρ_l,ρ_r) 是一 D-D 双余模．对任意 $i,j\in I$, 令

$$^iM^j=\{\,m\in M\mid \rho_l(m)\in D^i\otimes M,\ \rho_r(m)\in M\otimes D^j\},$$

则 $M=\oplus_{i,j\in I}{}^iM^j$, 每个 $^iM^j$ 有自然的 D^i-D^j 双余模结构，因此是一个 $(D^j)^*$-$(D^i)^*$ 双模．因为 $(D^i)^*$ 均是单余代数，所以

$$(D^i)^*\simeq M_{n_i}(\Delta_i),$$

其中 Δ_i 是有限维可除 K 代数．对于每个 i, 固定 $(D^i)^*$ 的一个本原幂等元 e_i. 令

$$t_{ij}=\dim_K(e_i.{}^jM^i.e_j),$$

其中的点表示模作用，$i,j\in I$. 注意到 $M_{n_i}(\Delta_i)$ 中的本原幂等元是互相共轭的，因此 t_{ij} 与 e_i 的选取无关.

定义 D-D 双余模 M 的箭图 $Q(D,M)$ 如下：顶点集为 I, 对于任意 $i,j\in I$, 有 t_{ij} 条箭向从 i 到 j.

注 2.1　(i) I 可以是无限集，t_{ij} 也可以是无穷的，即 $Q(D,M)$ 可以是无限箭图.

(ii) 如果 D 是群样的 (即 D 的群样元集合 $G=G(D)$ 是 D 的一组基，或等价地，D 是余半单并且点化的), 则 $Q(D,M)$ 可以如下简单地描述：顶点集为 G, 对任意 $g,h\in G$, 有 t_{gh} 条箭向从 g 到 h, 其中 $t_{gh}=\dim_k{}^hM^g$, 这里

$$^hM^g=\{m\in M\mid \rho_l(m)=h\otimes m,\ \rho_r(m)=m\otimes g\}.$$

2.2　余代数的 Gabriel 箭图

设 (C,Δ) 是一个余代数，$\{C_n\}$ 是它的余根滤链．令 π_0: $C\to C/C_0$ 是典范投射．定义映射

$$\tilde\rho_l=(Id\otimes\pi_0)\circ\Delta\colon\ C\to C\otimes(C/C_0),$$

$$\tilde\rho_r=(\pi_0\otimes Id)\circ\Delta\colon\ C\to (C/C_0)\otimes C.$$

因为

$$\tilde\rho_l(C_0)=0,\quad \tilde\rho_r(C_0)=0,$$

并且

$$\Delta(C_1)\subseteq C_0\otimes C_1+C_1\otimes C_0,$$

故 $\tilde\rho_l$ 和 $\tilde\rho_r$ 分别诱导映射

$$\rho_l\colon\ C_1/C_0\to C_0\otimes(C_1/C_0),\quad \rho_r\colon\ C_1/C_0\to (C_1/C_0)\otimes C_0.$$

容易验证 $(C_1/C_0,\rho_l,\rho_r)$ 是 C_0-C_0 双余模.

定义 2.1 余代数 C 的 Gabriel 箭图 $Q(C)$ 定义为 C_0-C_0 双余模 C_1/C_0 的箭图 $Q(C_0, C_1/C_0)$.

详细一点，设 $C_0 = \oplus_{i\in I} D^i$, 其中 D^i 是单子余代数，e_i 是 $(D^i)^*$ 的一个本原幂等元，则箭图 $Q(C)$ 的顶点集是 I, 并且从顶点 i 到顶点 j 有

$$t_{ij} = \dim_K e_i.{}^j(C_1/C_0)^i.e_j$$

条箭向.

2.3 余代数的 Ext 箭图

设 C 是余代数. 回顾文献 [3] 引入的 Ext 箭图. 设 $\{S_i|i \in I\}$ 是单右 C 余模的同构类的一个完全代表集，则余代数 C 的 Ext 箭图的顶点集是 I, 并且有 $\dim_K \mathrm{Ext}^1(S_i, S_j)$ 条箭向从 i 到 j.

在文献 [13] 中，上述 Ext 箭图亦称为 Gabriel 箭图. 文献 [4] 利用单子余代数的楔积定义了余代数 C 的链箭图. 在不计箭向重数的意义下，链箭图和 Ext 箭图是相同的，参见文献 [4] 定理 1.7. 进一步，C 的 Ext 箭图是连通的当且仅当 C 是不可分解余代数 (参见文献 [4] 定理 2.2).

本节的主要结论为

定理 2.1 余代数 C 的 Gabriel 箭图和 Ext 箭图是相同的.

为了证明上述结论，需要做一些准备.

对于右 C 余模 M, 记 $E(M)$ 为 M 的内射包. 注意到内射包总存在并且 (见文献 [14] 或文献 [15] 第 2 章)

$$\mathrm{soc}(M) = \mathrm{soc}(E(M)).$$

设 $\{S_i \mid i \in I\}$ 是单右 C 余模的同构类的一个完全代表集，则作为右 C 余模，有

$$D^i \simeq n_i S_i, \quad C \simeq \oplus_{i\in I} E(D^i) \simeq \oplus_{i\in I} n_i E(S_i).$$

注意到 $(D^i)^* \simeq M_{n_i}(\Delta_i)$, 其中 Δ_i 是一个有限维可除 K 代数.

引理 2.1 假设 $\dim_K \Delta_i = d_i$ $(i \in I)$, 则有

$$\mathrm{soc}(E(D^i)/D^i) \simeq \oplus_{j\in I} \frac{n_i t_{ji}}{d_j} S_j, \quad \mathrm{soc}(E(S_i)/S_i) \simeq \oplus_{j\in I} \frac{t_{ji}}{d_j} S_j.$$

证 回顾 $(C_1/C_0, \rho_l, \rho_r)$ 是 C_0-C_0 双余模. 令

$${}^i(C_1/C_0) = \{x \in C_1/C_0 \mid \rho_l(x) \in D^i \otimes (C_1/C_0)\},$$

则 ${}^i(C_1/C_0)$ 有自然的左 D^i 余模结构.

将 C 和 $\oplus_{i\in I} E(D^i)$ 等同. 作为右 C 余模，

$$C_1 = \oplus_{i\in I}(E(D^i) \cap C_1).$$

事实上，设 $c \in C_1$, 则 $c = \sum c_i$, 其中 $c_i \in E(D^i)$. 因为 $\Delta(c_i) \in E(D^i) \otimes C$, 所以有 $\Delta(c_i) = \sum_j d_{ij} \otimes c_{ij}$, 其中 $d_{ij} \in E(D^i)$ 且 $\{d_{ij}\}$ 是线性无关的 $(i \in I)$, 故

$$\Delta(c) = \sum_{i,j} d_{ij} \otimes c_{ij} \in C_1 \otimes C_1.$$

注意到 $\{d_{ij}\}$ 是线性无关的，推出 c_{ij} 均在 C_1 中，于是根据余单位性，c_i 均包含在 C_1 中.

由此，作为右 C_0 余模

$$C_1/C_0 = \oplus_{i\in I}(E(D^i)\cap C_1)/D^i,$$

这表明 $(E(D^i)\cap C_1)/D^i$ 是余半单 C 余模，进而

$$(E(D^i)\cap C_1)/D^i \subseteq \mathrm{soc}(E(D^i)/D^i).$$

注意到 $\mathrm{soc}(C/C_0) = C_1/C_0$ (见文献 [16], p. 64), 我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{soc}(C/C_0) &= \mathrm{soc}((\oplus_{i\in I}E(D^i))/(\oplus_{i\in I}D^i))\\ &= \oplus_{i\in I}\,\mathrm{soc}(E(D^i)/D^i) = C_1/C_0\\ &= \oplus_{i\in I}\,(E(D^i)\cap C_1)/D^i,\end{aligned}$$

故得

$$\mathrm{soc}(E(D^i)/D^i) = (E(D^i)\cap C_1)/D^i.$$

我们断言

$$\mathrm{soc}(E(D^i)/D^i) \subseteq {}^i(C_1/C_0).$$

这样，根据

$$C_1/C_0 = \oplus_{i\in I}{}^i(C_1/C_0),$$

可推出

$$\mathrm{soc}(E(D^i)/D^i) = {}^i(C_1/C_0).$$

为了证明这个断言，注意到

$$\tilde\rho_l(E(D^i)) \subseteq E(D^i)\otimes C, \quad \tilde\rho_l(C_1)\subseteq C_0\otimes C_1,$$

于是

$$\tilde\rho_l(E(D^i)\cap C_1) \subseteq (E(D^i)\cap C_0)\otimes C_1.$$

又注意到

$$E(D^i)\cap C_0 \subseteq \mathrm{soc}(E(D^i)) = D^i,$$

得

$$\tilde\rho_l(E(D^i)\cap C_1)\subseteq D^i\otimes C_1,$$

因此

$$\rho_l(\mathrm{soc}(E(D^i)/D^i)) = \rho_l((E(D^i)\cap C_1)/D^i) \subseteq D^i\otimes (C_1/C_0),$$

由此即得断言的结论.

回顾 ${}^i(C_1/C_0)^j$ 是 D^i-D^j 双余模, 因此是 $(D^j)^*$-$(D^i)^*$ 双模. 于是 ${}^i(C_1/C_0)^j.e_i$ 是一左 $(D^j)^*$ 模，因此是一右 D^j 余模，其中 e_i 是 $(D^i)^*$ 的本原幂等元. 于是作为右 D^j 余模,

$${}^i(C_1/C_0)^j.e_i = m_jS_j,$$

其中 m_j 是待定的非负整数. 因为

$$t_{ji} = \dim_K(e_j.{}^i(C_1/C_0)^j.e_i), \quad \dim_K S_j = n_j d_j,$$

所以

$$m_j n_j d_j = \dim_K {}^i(C_1/C_0)^j.e_i = \dim_K n_j(e_j.{}^i(C_1/C_0)^j.e_i) = n_j t_{ji},$$

因此 $m_j = t_{ji}/d_j$, 最终我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{soc}(E(D^i)/D^i) &= {}^i(C_1/C_0) = \oplus_{j\in I}{}^i(C_1/C_0)^j \\ &= \oplus_{j\in I} n_i\, {}^i(C_1/C_0)^j e_i = \oplus_{j\in I}\frac{n_i t_{ji}}{d_j} S_j.\end{aligned}$$

2.4 定理 2.1 的证明

因为 $D^j \simeq n_j S_j$, 故只需要计算 $\mathrm{Ext}^1(S_i, D^j)$. 取 D^j 的一个内射分解 [17]

$$0 \to D^j \xrightarrow{d_0} E_0 \xrightarrow{d_1} E_1 \xrightarrow{d_2} E_2 \to \cdots,$$

其中 $E_0 = E(D^j)$ 且 $E_1 = E(E_0/D^j)$. 因为

$$\mathrm{Im}(d_0) = \mathrm{soc}(E_0), \quad \mathrm{Im}(d_1) \supseteq \mathrm{soc}(E_1),$$

所以对于任意余模同态 g: $S_i \to E_0$, 有 $d_1 \circ g = 0$; 对于任意余模同态 f: $S_i \to E_1$, 有 $d_2 \circ f = 0$. 于是有

$$\mathrm{Ext}^1(S_i, D^j) = \mathrm{Hom}_C(S_i, E_1) = \mathrm{Hom}_C(S_i, \mathrm{soc}(E_0/D^j)),$$

这里用到了 $\mathrm{soc}(E_1) = \mathrm{soc}(E_0/D^j)$. 根据引理 2.1,

$$\mathrm{soc}(E_0/D^j) = \oplus_{i\in I}\frac{n_j t_{ij}}{d_i} S_i.$$

再注意到 $\mathrm{Hom}_C(S_i, S_i) = \Delta_i$, 得到

$$t_{ij} = \frac{1}{n_j}\dim_K \mathrm{Ext}^1(S_i, D^j) = \dim_K \mathrm{Ext}^1(S_i, S_j).$$

定理得证.

注 2.2 回顾两个余代数 C 和 D 称为 Morita-Takeuchi 等价, 如果 C 余模范畴和 D 余模范畴是等价的 [18]. 根据定理 2.1, 两个 Mortia-Takeuchi 等价的余代数有相同的 Gabriel 箭图.

3 对偶 Gabriel 定理

设 L 是 K 的扩域, C 是 K 余代数, 则 $C \otimes L$ 自然地视为 L 余代数. C 称为是可分的, 如果对 K 的任一扩域 L, $C \otimes L$ 是余半单 L 余代数. 注意到 C 可分当且仅当 $C \otimes C^{\mathrm{cop}}$ 余半单 (事实上, 因余半单余代数是单余代数的直和, 故这个结论可通过对偶 (见文献 [19] 定理 6.1.2) 得到). 例如, 群样的余代数是可分的; 若 K 的特征是零, 则任一余半单 K 余代数都是可分的. 注意到若 C 是点化的, 或者 K 是代数闭的, 则 C 的余根 C_0 是可分的.

下述定理是本节的主要结果:

定理 3.1　设余代数 C 的余根 C_0 是可分的，则存在余代数的嵌入 i: $C \hookrightarrow \mathrm{Cot}_{C_0}(C_1/C_0)$, 使得 $i(C_1) = C_0 \oplus (C_1/C_0)$.

注 3.1　余代数 C 的子余代数 D 称为大的 (large), 如果 D 包含 C_1. 根据 Gabriel 箭图的定义，C 的一个大子余代数 D 与 C 有一样的 Gabriel 箭，因此定理 3.1 表明任意具有可分余根 C_0 的余代数 C (不一定是有限维的) 总可以同构于余张量余代数的一个大子余代数.

回顾代数中的 Gabriel 定理：任意有限维初等代数 A 同构于 A 的 Gabriel 箭图的路代数关于某个容许理想的商代数 (见文献 [1] 定理 1.9 或文献 [2], p. 43). 注意到大的条件恰好对偶于代数中的容许条件，因此它的对偶就是：点化余代数总可以嵌入到它的 Gabriel 箭图的路余代数中去 (见文献 [3] 定理 4.3, 也可见文献 [20] 推论 1).

而如果 C 是点化的，则余张量余代数 $\mathrm{Cot}_{C_0}(C_1/C_0)$ 同构于路余代数 KQ^c, 其中 Q 是 C 的 Gabriel 箭图 (为了看出这一点，只要注意到 KQ^c 和 $\mathrm{Cot}_{C_0}(C_1/C_0)$ 都具有一样的泛性质，于是这个断言可由下述引理 3.1 得到), 因此定理 3.1 就是点化余代数的对偶 Gabriel 定理的一个推广.

为了证明定理 3.1, 需要下面的基本引理，它给出了余张量余代数的泛性质.

设 C 和 D 是余代数，f: $D \to C$ 是余代数的映射，则 D 通过 f 成为 C-C 双余模，映射 $(f \otimes Id) \circ \Delta_D$ 和 $(Id \otimes f) \circ \Delta_D$ 分别给出其左余模和右余模的结构映射.

引理 3.1　设 C 和 D 是余代数，M 是 C-C 双余模．给定任意余代数映射 f_0: $D \to C$ 和 C-C 双余模的映射 f_1: $D \to M$, 使得 f_1 在 D 的余根 D_0 上的限制是 0, 其中 D 的 C-C 双余模结构是由 f_0 给出的，则存在唯一的余代数映射

$$F\colon\ D \to \mathrm{Cot_C(M)},$$

使得 $\pi_i \circ F = f_i$ $(i = 0, 1)$, 其中 π_i: $\mathrm{Cot}_C(M) \to M^{\square i}$ 是典范投射.

证　令 Δ_0 是 D 的恒等映射，$\Delta_1 = \Delta_D$, 对任意 $n \geqslant 1$, 定义

$$\Delta_{n+1} = (\Delta_n \otimes Id) \circ \Delta_n,$$

其中 Id 表示 $D^{\otimes n}$ 的恒等映射．易知

$$\Delta_n(D) \subseteq D^{\square(n+1)}, \quad f_1^{\otimes(n+1)} \circ \Delta_n(D) \subseteq M^{\square(n+1)}, \quad n \geqslant 1.$$

断言映射

$$F\colon D \to \mathrm{Cot}_C(M),$$
$$F(d) = f_0(d) + \sum_{n=0}^{\infty} f_1^{\otimes(n+1)} \circ \Delta_n(d)$$

是合理定义的.

事实上，我们有 $\cup_{n\geqslant 0} D_n = D$, 其中 $\{D_n\}$ 是 D 的余根滤链 (见文献 [16] 定

理 5.2.2). 于是对任意 $d \in D_n$ 和任意 $m \geqslant n$, $f_1^{\otimes(m+1)}\Delta_m(d) = 0$. 这是因为

$$\Delta_m(D_n) \subseteq \sum_{i_0+i_1+\cdots+i_m=n} D_{i_0} \otimes \cdots \otimes D_{i_m},$$

且 f_1 在 D_0 上是 0, 于是 F 是合理定义的. 容易验证 F 是余代数映射且 $\pi_i \circ F = f_i$, $i = 0, 1$.

剩下只要证明满足上述要求的映射 F 是唯一的. 令 $f_n = \pi_n \circ F$, $n \geqslant 0$. 只要证对任意 $n \geqslant 1$, $f_n = f_1^{\otimes n} \circ \Delta_{n-1}$. 对 n 进行归纳. 假设 $f_m = f_1^{\otimes m} \circ \Delta_{m-1}$, $m \geqslant 1$, 考虑 f_{m+1}. 对于任意 $d \in D$, 令 $\Delta_D(d) = \sum_{(d)} d_1 \otimes d_2$. 因为 F 是余代数的映射, 所以有 $\Delta(F(d)) = (F \otimes F)\Delta_D(d)$. 将两边都显式地写出来，得到

$$\Delta(F(d)) = \sum_n \Delta(f_n(d)),$$

其中

$$\Delta(f_n(d)) \in (C \otimes M^{\square n}) \oplus (M \otimes M^{\square(n-1)}) \oplus \cdots \oplus (M^{\square(n-1)} \otimes M) \oplus (M^{\square n} \otimes C);$$

$$(F \otimes F)\Delta_D(d) = \sum_{(d)} F(d_1) \otimes F(d_2) = \sum_n \sum_{(d),i+j=n} f_i(d_1) \otimes f_j(d_2),$$

其中

$$\begin{aligned} &\sum_{(d),i+j=n} f_i(d_1) \otimes f_j(d_2) \\ &\in (C \otimes M^{\square n}) \oplus (M \otimes M^{\square(n-1)}) \oplus \cdots \oplus (M^{\square(n-1)} \otimes M) \oplus (M^{\square n} \otimes C). \end{aligned}$$

于是我们推出

$$\Delta(f_n(d)) = \sum_{(d),i+j=n} f_i(d_1) \otimes f_j(d_2), \quad \forall\, n \geqslant 2.$$

注意到 $f_n(d) \in M^{\square n}$, 且 $f_i(d_1) \otimes f_j(d_2) \in M^{\square i} \otimes M^{\square j}$, 根据 $\mathrm{Cot}_C(M)$ 余乘的定义，比较上面两个式子中属于 $M^{\square i} \otimes M^{\square j}$ 的项，其中 $i \neq 0 \neq j$ 且 $i + j = n$, 得到

$$f_n(d) = \sum_{(d)} f_i(d_1) \otimes f_j(d_2).$$

特别地，由归纳有

$$\begin{aligned} f_{m+1}(d) &= \sum_{(d)} f_m(d_1) \otimes f_1(d_2) \\ &= \sum_{(d)} f_1^{\otimes m} \circ \Delta_{m-1}(d_1) \otimes f_1(d_2) \\ &= f_1^{\otimes m+1} \circ \Delta_m(d). \end{aligned}$$

引理得证.

为了完成定理 3.1 的证明, 需要下述两个引理 (分别见文献 [21] 定理 2.3.11(或文献 [16] 定理 5.4.2) 和文献 [22](或文献 [16] 定理 5.3.1)):

引理 3.2 (对偶 Wedderburn-Malcev 定理) 设余代数 C 具有可分余根 C_0, 则存在一个余理想 I, 使得 $C = C_0 \oplus I$, 即存在一个余代数的投影 π: $C \to C_0$, 使得 $\pi|_{C_0} = Id$.

引理 3.3 (Heyneman-Radford) 设 f: $C \to D$ 是余代数映射，则 f 是单射当且仅当 $f|_{C_1}$ 是单射.

定理 3.1 的证 根据对偶 Wedderburn-Malcev 定理，存在一个 C 的余理想 I, 使得 $C = C_0 \oplus I$. 于是有余代数投影 f_0: $C \to C_0$, 使得 $f_0|_{C_0} = Id$. 注意到 C 通过 f_0 成为一个 C_0-C_0 双余模，并且 I 是 C 的 C_0-C_0 子双余模. 令 $C_{(1)} = C_1 \cap I$, 则 $C_1 = C_0 \oplus C_{(1)}$. 注意到 $C_{(1)}$ 是 I 的 C_0-C_0 子双余模, 且典范同构 θ: $C_{(1)} \to C_1/C_0$ 是一个 C_0-C_0 双余模同态.

视 I 为右 $C_0 \otimes C_0^{\rm cop}$ 余模，且 $C_{(1)}$ 为它的一个子余模. 因为 C_0 是可分的，所以有 $C_0 \otimes C_0^{\rm cop}$ 余模的分解 $I = C_{(1)} \oplus J$. 换句话说，存在 C_0-C_0 双余模的投射 p: $I \to C_{(1)}$, 使得 $p|_{C_{(1)}} = Id$. 定义映射

$$f_1 = \theta \circ p \circ f_0': C \to C_1/C_{(0)},$$

其中 f_0': $C \to I$ 是典范投影. 明显地，f_1 是 C_0-C_0 双余模映射，且在 C_0 上为 0. 于是根据引理 3.1, 我们得到唯一的余代数映射 i: $C \to \mathrm{Cor}_{C_0}(C_1/C_0)$, 使得 $\pi_0 \circ i = f_0$ 和 $\pi_1 \circ i = f_1$. 明显地，$i(C_1) = C_0 \oplus C_1/C_0$. 再根据引理 3.3, i 是单射. 定理得证.

4 C_1 的新刻画

设 C 是余代数，C 的两个子空间 V 和 W 的楔积 [23] 定义为

$$V \wedge_C W := \{c \in C \mid \Delta_C(c) \in V \otimes C + C \otimes W\}.$$

设 C_0 是 C 的余根, 即 C_0 是 C 的所有单子余代数的和, 定义 $C_n = C_0 \wedge_C C_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$, $\{C_n\}$ 称为 C 的余根滤链. C_n 是 C 的子余代数, $C_n \subseteq C_{n+1}$, $C = \cup_{n\geqslant 0} C_n$, 且

$$\Delta(C_n) \subseteq \sum_{0\leqslant i\leqslant n} C_i \otimes C_{n-1}$$

(参见文献 [16], 5.2.2). 楔积的性质可以在文献 [23] 第 9 章和文献 [22] 第 2 节找到.

设 (C, Δ, ε) 是余代数，C^* 是其对偶代数. 设 $c \in C$ 和 $f \in C^*$, 定义

$$f \rightharpoonup c = \sum c_1 f(c_2), \quad c \leftharpoonup f = \sum f(c_1) c_2,$$

其中 $\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2$, 则 C 成为 C^*-C^* 双模，且 $c = \varepsilon \rightharpoonup c = c \leftharpoonup \varepsilon$ (见文献 [16], 1.6.5).

下述结果给出了 C_1 的新刻画，下一节要用到这个结果：

定理 4.1 设 C 是余代数，$C_0 = \oplus_{i\in I} D^i$ 是其余根，其中 D^i 是 C 的单子余代数，则

(i) $C_1 = \sum_{i,j\in I}(D^i \wedge_C D^j)$;
(ii) $(D^i \wedge_C D^j) \cap C_0 = D^i + D^j$, $\forall\, i,j \in I$;
(iii) $C_1/C_0 \cong \oplus_{i,j\in I}(D^i \wedge_C D^j)/(D^i + D^j)$;
(iv) $(D^i \wedge_C D^j)/(D^i + D^j) \cong {}^i(C_1/C_0)^j$, $\forall\, i,j \in I$.

注 4.1 回顾余代数 C 的群样元集合为

$$G(C) := \{\, 0 \neq c \in C \mid \Delta(c) = c \otimes c \,\},$$

且 C 称为点化的，如果其单子余代数均是一维的．注意到余代数 C 是点化的当且仅当 $C_0 = KG(C)$. 对于任意 $g,h \in G(C)$, 记

$$P_{g,h}(C) := \{c \in C \mid \Delta(c) = c \otimes g + h \otimes c\}$$

为所有 (g,h)- 本原元组成的集合. (g,h)- 本原元 c 称为非平凡的, 如果 $c \notin K(g-h)$.

设 $P'_{g,h}(C)$ 是 $P_{g,h}(C)$ 的子空间，使得

$$P_{g,h}(C) = P'_{g,h}(C) \oplus K(g-h).$$

余代数的 Taft-Wilson 定理的第 1 部分就是说，如果 C 是点化的，则

$$C_1 = KG(C) \oplus (\oplus_{g,h} P'_{g,h}(C)),$$

进而得到

$$C_1/C_0 = \oplus_{g,h} P'_{g,h}(C) = \oplus_{g,h}(Kh \wedge_C Kg)/(Kg + Kh)$$

(最后的等式也可参见文献 [24] 引理 4.2). 从这个观点看，定理 4.1 (iii) 可看成 Taft-Wilson 定理的第 1 部分的推广.

定理 4.1 的证 (i) 一方面，我们有

$$C_1 = C_0 \wedge_C C_0 = \left(\sum_{i\in I} D^i\right) \wedge_C \left(\sum_{j\in I} D^j\right) \supseteq \sum_{i,j\in I}(D^i \wedge_C D^j).$$

另一方面，利用线性代数，知 $C = C_0 \oplus V$, 其中 V 满足 $\varepsilon(V) = 0$. 取 $\varepsilon_i \in C^*$, 使得

$$\varepsilon_i|_{D^i} = \varepsilon, \quad \varepsilon_i|_{D^j \oplus V} = 0 \quad (j \neq i).$$

于是

$$\varepsilon(c) = \sum_{i\in I} \varepsilon_i(c), \quad \forall\, c \in C,$$

因此根据余单位性，有

$$c = \sum_{i,j\in I}(\varepsilon_j \rightharpoonup c \leftharpoonup \varepsilon_i), \quad \forall\, c \in C.$$

欲证 (i), 只要证明如下的断言：对 $c \in C_1$, 有

$$\varepsilon_j \rightharpoonup c \leftharpoonup \varepsilon_i \in D^i \wedge_C D^j.$$

为证明上述断言，设 $c \in C_1$, 考虑

$$\Delta^3(c) = (\Delta \otimes Id \otimes Id)(Id \otimes \Delta)\Delta(c).$$

为简单起见，下面省去求和符号．设

$$\Delta(c) = c_1 \otimes c_2 \in \sum_s C_1 \otimes D^s + \sum_t D^t \otimes C_1,$$

$$\begin{aligned}\Delta^2(c) &= (Id \otimes \Delta)\Delta(c) = c_1 \otimes c_{21} \otimes c_{22}\\ &\in \sum_s C_1 \otimes D^s \otimes D^s + \sum_{t,k} D^t \otimes C_1 \otimes D^k + \sum_{t,k} D^t \otimes D^k \otimes C_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta^3(c) &= (\Delta \otimes Id \otimes Id)(Id \otimes \Delta)\Delta(c) = c_{11} \otimes c_{12} \otimes c_{21} \otimes c_{22}\\ &\in \sum_s C_1 \otimes C_0 \otimes D^s \otimes D^s + \sum_s C_0 \otimes C_1 \otimes D^s \otimes D^s\\ &\quad + \sum_{t,k} D^t \otimes D^t \otimes C_1 \otimes D^k + \sum_{t,k} D^t \otimes D^t \otimes D^k \otimes C_1.\end{aligned}$$

根据定义有

$$\Delta(\varepsilon_j \rightharpoonup c \leftharpoonup \varepsilon_i) = \varepsilon_i(c_{11})\varepsilon_j(c_{22})c_{12} \otimes c_{21}.$$

如果

$$c_{11} \otimes c_{12} \otimes c_{21} \otimes c_{22} \in \sum_s C_1 \otimes C_0 \otimes D^s \otimes D^s,$$

则

$$\varepsilon_i(c_{11})\varepsilon_j(c_{22})c_{12} \otimes c_{21} \in C_0 \otimes D^j;$$

如果

$$c_{11} \otimes c_{12} \otimes c_{21} \otimes c_{22} \in \sum_s C_0 \otimes C_1 \otimes D^s \otimes D^s,$$

则

$$\varepsilon_i(c_{11})\varepsilon_j(c_{22})c_{12} \otimes c_{21} \in C_1 \otimes D^j;$$

如果

$$c_{11} \otimes c_{12} \otimes c_{21} \otimes c_{22} \in \sum_{t,k} D^t \otimes D^t \otimes C_1 \otimes D^k,$$

则

$$\varepsilon_i(c_{11})\varepsilon_j(c_{22})c_{12} \otimes c_{21} \in D^i \otimes C_1;$$

如果

$$c_{11} \otimes c_{12} \otimes c_{21} \otimes c_{22} \in \sum_{t,k} D^t \otimes D^t \otimes D^k \otimes C_1,$$

则

$$\varepsilon_i(c_{11})\varepsilon_j(c_{22})c_{12} \otimes c_{21} \in D^i \otimes C_0.$$

于是对所有的情形，都有

$$\varepsilon_i(c_{11})\varepsilon_j(c_{22})c_{12} \otimes c_{21} \in D^i \otimes C + C \otimes D^j.$$

这就证明了 $\varepsilon_j \rightharpoonup c \leftharpoonup \varepsilon_i \in D^i \wedge_C D^j$.

(ii) 直接可证，或可由文献 [22] 引理 2.3.1 给出.

(iii) 和 (iv) 根据 (ii) 有 $(D^i \wedge_C D^j) \cap C_0 = D^i + D^j$, 进而有余代数的嵌入

$$(D^i \wedge_C D^j)/(D^i + D^j) \cong ((D^i \wedge_C D^j) + C_0)/C_0 \hookrightarrow C_1/C_0.$$

根据 C_1/C_0 的 C_0-C_0 双余模的结构，容易观察到

$$(D^i \wedge_C D^j)/(D^i + D^j) \hookrightarrow {}^i(C_1/C_0)^j,$$

所以由 (i) 得到

$$\begin{aligned} C_1/C_0 &= \Big(\sum_{i,j\in I}(D^i \wedge_C D^j)\Big)/C_0 \\ &= \sum_{i,j\in I}((D^i \wedge_C D^j) + C_0)/C_0 \\ &\hookrightarrow \sum_{i,j\in I} {}^i(C_1/C_0)^j \\ &= \oplus_{i,j\in I}\, {}^i(C_1/C_0)^j. \end{aligned}$$

这就迫使嵌入 $((D^i \wedge_C D^j) + C_0)/C_0 \hookrightarrow {}^i(C_1/C_0)^j$ 是同构，故

$$\begin{aligned} C_1/C_0 &= \sum_{i,j\in I}((D^i \wedge_C D^j) + C_0)/C_0 \\ &= \oplus_{i,j\in I}\, ((D^i \wedge_C D^j) + C_0)/C_0 \\ &\cong \oplus_{i,j\in I}\, (D^i \wedge_C D^j)/(D^i + D^j). \end{aligned}$$

证毕.

由定理 4.1, 我们可以对文献 [4] 中定义的链箭图做一个改进，即允许多重箭向. 当然如果仅考虑基余代数，下述定义和以前的定义是一样的：

定义 4.1[4] 设 C 是余代数, C 的链箭图定义如下：顶点就是 C 的单子余代数的等价类；对两个单子余代数 D^i 和 D^j, 有

$$l_{ij} := \frac{1}{n_i n_j}\dim_K (D^j \wedge_C D^i)/(D^i + D^j)$$

条箭向从 i 到 j, 其中 n_i 是正整数，使得 $(D^i)^* \simeq M_{n_i}(\Delta_i)$, 且 Δ_i 是 K 上的可除代数.

推论 4.1 余代数 C 的链箭图和 Gabriel 箭图是一样的.

证 由定理 4.1 (iv), 得到

$$\begin{aligned} l_{ij} &= \frac{1}{n_i n_j}\dim_K (D^j \wedge_C D^i)/(D^i + D^j) \\ &= \frac{1}{n_i n_j}\dim_K {}^j(C_1/C_0)^i \\ &= \dim_K e_i.{}^j(C_1/C_0)^i.e_j \\ &= t_{ij}. \end{aligned}$$

5　局部有限余代数

作为定理 3.1 和 4.1 的应用，本节给出局部有限余代数的一个新刻画.

根据定义，余代数 C 称为局部有限的，如果其任何有限维子空间 V 和 W 的楔积 $V \wedge_C W$ 还是有限维的. 由余代数基本定理 (即 C 的每个有限维子空间都可以包含在一个有限维子余代数里面), 我们知道余代数 C 是局部有限的当且仅当对于任意有限维子余代数 D, $D \wedge_C D$ 还是有限维的.

Heyneman-Radford 证明了自反余代数是局部有限的 (文献 [22], 3.2.4); 反过来，如果 C 是局部有限的并且 C_0 是有限维的，则 C 是自反的 (参见文献 [22], 4.2.6).

回顾 C 的子余代数 D 称为饱和的，如果 $D \wedge_C D = D$.

设余代数 $C = C' \oplus C''$, 且 (M, ρ_l, ρ_r) 是一个 C-C 双余模. 令

$$N' = \{m \in M \mid \rho_l(m) \in C' \otimes M,\ \rho_r(m) \in M \otimes C'\},$$

则 N 是一个 C'-C' 双余模.

引理 5.1　引用上面的记号，则 $\mathrm{Cot}_{C'}(N')$ 是 $\mathrm{Cot}_C(M)$ 的一个饱和子余代数.

证　令 $\widetilde{C} := \mathrm{Cot}_C(M)$. 根据余代数 $\mathrm{Cot}_{C'}(N)$ 的构造，我们有

$$\mathrm{Cot}_{C'}(N) = \cup_{n \geq 1} \wedge^n_{\widetilde{C}} C',$$

其中

$$\wedge^n_{\widetilde{C}} C' = C' \wedge_{\widetilde{C}} C' \wedge_{\widetilde{C}} \cdots \wedge_{\widetilde{C}} C'$$

(n 次楔积), 因此 $\mathrm{Cot}_C(M)$ 是饱和的 (参见文献 [22], 2.1.1). 证毕.

本节的主要结果是

定理 5.1　局部有限余代数的 Gabriel 箭图是局部有限的 (即任意两顶点间仅有有限条箭向).

反过来，如果余代数 C 的 Gabriel 箭图是局部有限的且 C_0 是可分的，则 C 是局部有限的.

证　由余代数基本定理，任意单余代数是有限维的，于是必要性可从推论 4.1 得到.

反过来, 设 C 的 Gabriel 箭图是局部有限的并且 C_0 是可分的, 为了证明 C 是局部有限的，根据定理 3.1, 只要证余张量余代数 $\mathrm{Cot}_{C_0}(C_1/C_0)$ 是局部有限的. 这是因为局部有限余代数的子余代数总是局部有限的 (参见文献 [22], 2.3.2). 下面我们用 $\widetilde{C}$ 表示 $\mathrm{Cot}_{C_0}(C_1/C_0)$.

设 D 是 $\widetilde{C}$ 的任意有限维子余代数，则 D 的余根 D_0 是 C_0 的直和项. 令

$$M := \{x \in C_1/C_0 \mid \rho_l(x) \in D_0 \otimes (C_1/C_0),\ \rho_r(x) \in (C_1/C_0) \otimes D_0\},$$

则 M 有一个自然的 D_0-D_0 双余模结构. 我们断言 M 是有限维的.

事实上，设 $C_0=\oplus_{i\in I}D^i$, 其中 D^i 均是 C_0 的单子余代数. 回顾

$$^i(C_1/C_0)^j=\{x\in C_1/C_0 \mid \rho_l(x)\in D^i\otimes(C_1/C_0),\ \rho_r(x)\in(C_1/C_0)\otimes D^j\},$$

其中 $i,j\in I$. 因为 C 的 Gabriel 箭图是局部有限的，故根据定理 4.1 (iv) 和推论 4.1, 知 $^i(C_1/C_0)^j$ 均是有限维的. 注意到 D_0 是有限维的，即 $D_0=\oplus_{i\in J}D^i$, 其中 $J\subseteq I$ 是一有限子集，根据定义可以看出 $M\subseteq\oplus_{i,j\in J}{}^i(C_1/C_0)^j$. 这样，$M$ 是有限维的.

根据定理 3.1, 有

$$D\subseteq \mathrm{Cot}_{D_0}(D_1/D_0)\subseteq \mathrm{Cot}_{D_0}(M).$$

由引理 5.1，$\mathrm{Cot}_{D_0}(M)$ 是 $\widetilde{C}$ 的饱和子余代数. 于是

$$D\wedge_{\widetilde{C}}D\subseteq \mathrm{Cot}_{D_0}(M)\wedge_{\widetilde{C}}\mathrm{Cot}_{D_0}(M)=\mathrm{Cot}_{D_0}(M).$$

因为 D 是有限维的，可设 $D\subseteq\oplus_{i\leqslant n}M^{\square i}$, 其中 n 是某一正整数. 现在可以看出 $D\wedge_{\widetilde{C}}D$ 是包含在 $\oplus_{i\leqslant 2n}M^{\square i}$ 中的 (见注 1.1), 当然 $\oplus_{i\leqslant 2n}M^{\square i}$ 是有限维的. 定理得证.

6 拟余 Frobenius 代数

余代数 C 称为左拟余 Frobenius 代数, 如果存在从 C 到 C^* 的 C^* 模单同态, 其中 C 的左 C^* 模结构如第 4 节定义, 而 C^* 是左自由 C^* 模. 类似地, 定义右拟余 Frobenius 代数. 一个余代数称为拟余 Frobenius 的，如果它既是左拟余 Frobenius 的也是右拟余 Frobenius 的. 注意到余代数 C 是左拟余 Frobenius 的当且仅当每个内射右 C 余模是投射的 (文献 [15] 定理 3.3.4); 如果 C 是左拟余 Frobenius 的，那么其对偶代数 C^* 是右拟 Frobenius 的 (文献 [15] 推论 3.3.9). 也注意到如果 C 是有限维的，那么 C 是左拟余 Frobenius 的，当且仅当 C 是右拟余 Frobenius 的，当且仅当 C^* 是拟 Frobenius 代数.

我们需要下面的结论：

引理 6.1 设 C 是余代数，则 C 作为余代数是不可分解的当且仅当其对偶代数 C^* 是不可分解的.

证 注意到这里的 C 可以是无限维的. 充分性是平凡的, 我们来证必要性. 如果有代数的分解 $C^*\simeq A_1\times A_2$, 则作为余代数，$C^{*\circ}\simeq A_1^\circ\oplus A_2^\circ$, 其中 A° 表示代数 A 的有限对偶. 我们有自然的嵌入 ϕ: $C\to C^{**}$, 则 ϕ 的像是包含在 $C^{*\circ}$ 中的 (参见文献 [15] 命题 1.5.12). 将 $\phi(C)$ 与 C 等同，则作为余代数，

$$C\simeq(A_1^\circ\cap C)\oplus(A_2^\circ\cap C).$$

注意到 $A_i^\circ\cap C\neq\{0\}$ (否则，若 $A_1^\circ\cap C=\{0\}$, 则 $C=A_2^\circ\cap C$, 即 C 是包含在 A_2° 中的，这样我们可以得到 A_1 在 C 上的值为零，也就是说 $A_1=0$). 引理得证.

本节的主要结论是

定理 6.1 设 C 是不可分解的非单余代数，如果 C 是左拟余 Frobenius 代数，则 C 的 Gabriel 箭图没有源点.

于是，非单的不可分解拟余 Frobenius 代数的 Gabriel 箭图既无源点也无汇点.

证　否则，假设 C 的 Gabriel 箭图有一个源点 $i \in I$. 设 S_i 是相应的右单余模，则由引理 2.1, 我们有

$$\mathrm{soc}(E(S_i)/S_i) \simeq \oplus_{j \in I} \frac{t_{ji}}{d_j} S_j.$$

因为 i 是源点，即所有的 $t_{ji} = 0$, 因此 $E(S_i) = S_i$.

对于任意 $j \neq i$, 有

$$\mathrm{Hom}_C(E(S_i), E(S_j)) = \mathrm{Hom}_C(S_i, E(S_j)) = \mathrm{Hom}_C(S_i, S_j) = 0,$$

这里用到 $\mathrm{soc}(E(S_j)) = S_j$ 和 Schur 引理.

另一方面, 因为 C 是左拟余 Frobenius 的, 所以 $E(S_i) = S_i$ 是投射的. 于是, 对任意 $j \neq i \in I$, 有

$$\mathrm{Hom}_C(E(S_j), E(S_i)) = 0$$

(否则，设 f: $E(S_j) \to E(S_i) = S_i$ 是一个非零 C 余模映射，则 f 是满射. 于是由 S_i 的投射性，$E(S_j) \simeq S_i \oplus \mathrm{Ker}(f)$, 矛盾).

注意到 C 通过 Δ_C 成为右 C 余模，且有代数同构 $\mathrm{End}_C(C) \simeq C^*$ 将 f 映到 $\varepsilon_c \circ f$ (见文献 [15] 命题 3.1.8). 因为作为右 C 余模，$C \simeq \oplus_{j \in I} n_j E(S_j)$, 所以我们有

$$C^* \simeq \mathrm{End}_C(C) \simeq \mathrm{End}_C(n_i E(S_i)) \oplus \mathrm{End}_C(\oplus_{j \neq i}(n_j E(S_j))).$$

可是，由引理 6.1 知 C^* 是不可分解的，从而导出矛盾.

参　考　文　献

1 Auslander M, Reiten I, Smalϕ S O. Representation Theory of Artin Algebras. Cambridge Studies in Adv Math 36. Cambridge: Cambridge University Press, 1995
2 Ringel C M. Tame Algebras and Integral Quadratic Forms. Lecture Notes in Math, Vol 1099. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer-Verlag, 1984
3 Chin W, Montgomery S. Basic Coalgebras, Modular Interfaces (Reverside, CA, 1995). 41∼47; AMS/IP Stud Adv Math 4. Providence: Amer Math Soc, 1997
4 Montgomery S. Indecomposable coalgebras, simple comodules and pointed Hopf algebras. Proc Amer Math Soc, 1995, 123: 2343∼2351
5 Chin W, Kleiner M, Quinn D. Almost split sequences for comodules. J Algebra, 2002, 249(1): 1∼19
6 Cibils C. A quiver quantum group. Comm Math Phys, 1993, 157: 459∼477
7 Cibils C, Rosso M. Algebres des chemins quantique. Adv Math, 1997, 125: 171∼199
8 Green E L, Solberg O. Basic Hopf algebras and quantum groups. Math Z, 1998, 229: 45∼76
9. Cibils C, Rosso M. Hopf quivers. J Algebra, 2002, 254(2): 241∼251
10 Chen X W, Huang H L, Ye Y, et al. Monomial Hopf algebras. J Algebra, 2004, 275: 212∼232
11 Wang Y H, Zhang P. Construct bi-Frobenius algebras via quivers. Tsukuba J Math, 2004, 28(1): 215∼221
12 Chin W, Musson I. The coradical filtration of quantum envoloping algebras. J London Math Soc, 1996, 53(2): 50∼62

13 Simson D. On coalgebras of tame comodule type. Proc of the Ninth ICRA, Vol 2. Beijing Normal University, 2000
14 Green J A. Locally finite representations. J Algebra, 1976, 41: 137∼171
15 Dăscălescu S, Năstăsescu C, Raianu S. Hopf Algebras: An Introduction. New York: Marcel Dekker, 2000
16 Montgomery S. Hopf Algebras and Their Actions on Rings. CBMS Regional Conf Series in Math, 82. Providence: Amer Math Soc, 1993
17 Doi Y. Homological coalgebras. J Math Soc Japan, 1981, 33(1): 31∼50
18 Takeuchi M. Morita theorems for categories of comodules. J Fac Sci Univ Tokyo Sect. IA, 1977, 24: 629∼644
19 Drozd Yu A, Kirichenko V V. Finite Dimensional Algebras. New York: Springer-Verlag, 1993
20 Radford D E. On the structure of pointed coalgebras. J Algebra, 1982, 77(1): 1∼14
21 Abe E. Hopf Algebras. Cambridge: Cambridge University Press, 1980
22 Heyneman R G, Radford D E. Reflexivity and coalgebras of finite type. J Algebra, 1974, 28(2): 215∼246
23 Sweedler M E. Hopf Algebras. New York: Benjamin, 1969
24 van Oystaeyen F, Zhang P. Quiver Hopf algebras. J Algebra, 2004, 280: 577∼589