中国科学 A 辑: 数学 2008 年 第 38 卷 第 2 期: 128～134
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

用箭图构造非分次的双 Frobenius 代数

王艳华 ①, 陈小伍 ②

① 上海财经大学应用数学系, 上海 200433
② 中国科学技术大学数学系, 合肥 230026
E-mail: yhw@mail.shufe.edu.cn, xwchen@mail.ustc.edu.cn

收稿日期: 2006-03-09; 接受日期: 2006-07-18
国家自然科学基金 (批准号: 10726039), 上海市优秀青年教师科研专项基金和全国博士后科学基金 (批准号: 20070420125) 资助项目

摘要 利用箭图构造了一类非分次的双 Frobenius 代数, 并根据结构常数分类出一种给定类型的双 Frobenius 代数.

关键词 箭图 双 Frobenius 代数 分次代数

MSC(2000) 主题分类 16W30, 16G20

1 引言

Frobenius 代数是一类重要的有限维代数, 有限维半单代数和有限维 Hopf 代数都是 Frobenius 代数. 近年来, 人们发现 Frobenius 代数还和 Yang-Baxter 方程的解以及拓扑量子场论有着密切的关系 (参见文献 [1] 及其列出的参考文献). 双 Frobenius 代数的概念是由 Doi 和 Takeuchi 在文献 [2] 中提出的, 它是有限维 Hopf 代数的自然推广. 简单地说, 双 Frobenius 代数是一类既有 Frobenius 代数结构又有 Frobenius 余代数结构, 并具有一个 (代数和余代数的) 反自同构的代数.

除文献 [2, 2.5] 和文献 [3, 2.1] 以外, 已知的双 Frobenius 代数但非 Hopf 代数的例子很少. 众所周知, 代数表示论中的箭图是构造和研究代数和余代数的基本工具 [4, 5]. 近来, 人们开始把箭图应用到对 Hopf 代数和量子群的研究中去 [5−7]. 鉴于双 Frobenius 代数但非 Hopf 代数的例子很少, 一个很自然的问题就是: 是否也可以利用箭图构造双 Frobenius 代数? 事实上, 这一想法已经得以实现, 文献 [8] 首次利用箭图构造出了一类分次的非 Hopf 代数的双 Frobenius 代数. 受到文献 [6, 1.7] 的启发, 在域特征为 2 的情形下, 本文利用箭图中的基本圈构造了一类非分次的双 Frobenius 代数 (见定理 2.5). 值得一提的是, 定理 2.5 所得到的双 Frobenius 代数是文献 [8] 得到的双 Froebenius 代数的某种变形, 其中这种变形是一种保持余代数结构的分次代数的变形, 参见文献 [9, 10].

最近, Hopf 代数的分类是 Hopf 代数研究领域中十分活跃的课题, 见文献 [11]. 利用箭图, 一些具体的 Hopf 代数可以得到分类, 见文献 [6, 12]. 在本文的第 3 节, 我们对基本圈上给定的余代数结构给出了一类分次的双 Frobenius 代数的分类. 我们的分类结果是一组关于结构常数的方程组 (见定理 3.1).

本文中, $\mathbb{K}$ 是域. 所有的代数和余代数都是域 $\mathbb{K}$ 上的. 设 V 是 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 记 $V^*=\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\mathbb{K})$ 为其对偶空间.

2 非分次的双 Frobenius 代数

设 A 是有限维代数, $A^*=\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A,\mathbb{K})$ 为其对偶空间. 则 A^* 有如下的 A-A- 双模结构 $(af)(b)=f(ba)$, $(fa)(b)=f(ab)$, $\forall f\in A^*$, a, $b\in A$. 若有左 A- 模同构 ${}_AA\cong(A_A)^*$, 或等价地, 有右 A- 模同构 $A_A\cong({}_AA)^*$, 则称 A 为 Frobenius 代数.

设 A 是 Frobenius 代数. 固定一左 A- 模同构 $\Phi:{}_AA\cong(A_A)^*$, 则 $\varphi:=\Phi(1_A)$ 是左模 ${}_AA^*$ 的生成元. 注意到 φ 也是右模 A^*_A 的生成元. 当 φ 需指明时, 也称 (A,φ) 为 Frobenius 代数, 其中 φ 称为 Frobenius 态射. 关于 Frobenius 代数, 请参考文献 [1, 2, 4].

设 C 是有限维余代数, 其余乘和余单位分别记为 $\triangle$ 和 ε. 记 C^* 为 C 的对偶代数. 则 C 有如下的 C^*-C^*- 双模结构:

$$fc=\sum c_1f(c_2),\quad cf=\sum f(c_1)c_2,\quad \forall f\in C^*,\quad c\in C.$$

若 $C=tC^*$, 或等价地, $C=C^*t$, 则称 $(C,\ t)$ 为 Frobenius 余代数, 其中 $t\in C$. 关于余代数的内容, 请参考文献 [13].

下面回顾双 Frobenius 代数的定义, 参见文献 [2, 14].

定义 2.1 设 A 为有限维代数和余代数, 且 $t\in A$ 和 $\varphi\in A^*$. 假设

(i) 余单位 $\varepsilon:A\longrightarrow\mathbb{K}$ 是代数同态, 且单位元 1_A 是群样元;

(ii) $(A,\ \varphi)$ 是 Frobenius 代数, 且 $(A,\ t)$ 是 Frobenius 余代数, 其余乘记为 $\triangle$;

(iii) 存在线性映射 $\psi:A\longrightarrow A$, 使得对任意 $a\in A$ 有,

$$\psi(a)=\sum\varphi(t_1a)t_2,\tag{1}$$

且 ψ 反代数同态和反余代数同态.

则 $(A,\ \varphi,\ t,\ \psi)$ 称为双 Frobenius 代数, 映射 ψ 称为对极.

设 $(A,\ \varphi,\ t,\ \psi)$ 是双 Frobenius 代数, 则对极 ψ 是双射 [2]. 下面的结论来自于文献 [14].

引理 2.2[14, 引理1.2] 设 A 为有限维代数和余代数, 且余单位 ε 是代数同态, 单位元 1_A 是群样元. 若存在 $\varphi\in A^*$ 和 $t\in A$, 使得如上定义的映射 ψ 是反代数和反余代数的自同构, 则 $(A,\ \varphi,\ t,\ \psi)$ 是双 Frobenius 代数.

在文献 [8] 中, 我们利用箭图构造了一类分次的双 Frobenius 代数. 记 Z_n 是长度为 n 的基本圈, 即 Z_n 是具有 n 个顶点 $e_0,\dots,e_{n-1}$ 的有向箭图, 使得从顶点 e_i 到 e_{i+1} 有且仅有一条箭向 $a_i, 0\leqslant i\leqslant n-1$. 注意到, 这里我们认为其顶点的指标集为商群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. 记 $\gamma_i^l:=a_{i+l-1}\cdots a_{i+1}a_i$ 为从顶点 e_i 出发的长度为 l 的道路. 注意到 $\gamma_i^0=e_i$ 和 $\gamma_i^1=a_i$.

设 $n,\ d\in\mathbb{N}$ 且 $d\geqslant 2$. 记 $C_d(n)$ 为路余代数 $\mathbb{K}Z_n^c$ 的 (由长度严格小于 d 的道路线性张成

的) 子余代数. 因此, 余代数 $C_d(n)$ 的基为 $\{\gamma_i^l, i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, 0 \leqslant l < d\}$, 余乘为

$$\triangle(\gamma_i^l) = \sum_{s=0}^{l} \gamma_{i+s}^{l-s} \otimes \gamma_i^s, \qquad \varepsilon(\gamma_i^l) = \delta_{0,\ l},$$

其中 δ 为 Kronecker 记号. 记 $(\gamma_i^l)^*$ 为 $C_d(n)$ 的对偶基.

下面的结论来自文献 [8].

引理 2.3 $(C_d(n),\ \varphi,\ t,\ \psi)$ 是 (非 Hopf 代数的) 双 Frobenius 代数, 其中 $\varphi = (\gamma_0^{d-1})^*$, $t = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i^{d-1}$, $\psi(\gamma_i^l) = \gamma_{-i-l}^l$ 且其代数结构为

$$\begin{cases} \gamma_i^l \gamma_j^s = \gamma_{i+j}^{l+s}, & l+s<d, \\ \gamma_i^l \gamma_j^s = 0, & l+s \geqslant d. \end{cases}$$

注意到上面的乘法是按长度分次的. 本文将对其进行 "变形", 从而得到一类新的双 Frobenius 代数.

设 $\mu \in \mathbb{K}$. 定义乘法 $\widetilde{m}:\ C_d(n) \otimes C_d(n) \longrightarrow C_d(n)$ 为

$$\begin{cases} \gamma_i^l \gamma_j^s = \gamma_{i+j}^{l+s}, & l+s<d, \\ \gamma_i^l \gamma_j^s = \mu(\gamma_{i+j}^{l+s-d} + \gamma_{i+j+d}^{l+s-d}), & l+s \geqslant d. \end{cases}$$

注意到若 $\mu = 0$, 则乘法 $\widetilde{m}$ 和引理 2.3 中的乘法一样.

引理 2.4 $(C_d(n),\ \widetilde{m})$ 是 Frobenius 代数.

证明 首先, 如上定义的乘法 $\widetilde{m}$ 是满足结合律的. 事实上, 对于 $C_d(n)$ 中的元 $\gamma_i^l,\ \gamma_j^s,\ \gamma_k^m$, $i,\ j,\ k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $0 \leqslant l,\ s,\ m \leqslant d-1$, 有

$$\begin{aligned} &\widetilde{m}(\widetilde{m} \otimes \mathrm{Id})(\gamma_i^l \otimes \gamma_j^s \otimes \gamma_k^m) \\ &\quad = \begin{cases} \widetilde{m}(\gamma_{i+j}^{l+s} \otimes \gamma_k^m), & l+s<d, \\ \widetilde{m}(\mu(\gamma_{i+j}^{l+s-d} + \gamma_{i+j+d}^{l+s-d}) \otimes \gamma_k^m), & l+s \geqslant d, \end{cases} \\ &\quad = \begin{cases} \gamma_{i+j+k}^{l+s+m}, & l+s+m<d, \\ \mu(\gamma_{i+j+k}^{l+s+m-d} + \gamma_{i+j+k+d}^{l+s+m-d}), & l+s<d \text{ 且 } l+s+m \geqslant d, \\ \mu(\gamma_{i+j+k}^{l+s+m-d} + \gamma_{i+j+k+d}^{l+s+m-d}), & l+s \geqslant d \text{ 且 } l+s+m < 2d, \\ \mu^2(\gamma_{i+j+k}^{l+s+m-2d} + 2\gamma_{i+j+k+d}^{l+s+m-2d} + \gamma_{i+j+k+2d}^{l+s+m-2d}), & l+s+m \geqslant 2d. \end{cases} \end{aligned}$$

另一方面, 有

$$\begin{aligned} &\widetilde{m}(\mathrm{Id} \otimes \widetilde{m})(\gamma_i^l \otimes \gamma_j^s \otimes \gamma_k^m) \\ &\quad = \begin{cases} \widetilde{m}(\gamma_i^l \otimes \gamma_{j+k}^{s+m}), & s+m<d, \\ \widetilde{m}(\gamma_i^l \otimes \mu(\gamma_{j+k}^{s+m-d} + \gamma_{j+k+d}^{s+m-d})\gamma_k^m), & s+m \geqslant d, \end{cases} \\ &\quad = \begin{cases} \gamma_{i+j+k}^{l+s+m}, & l+s+m<d, \\ \mu(\gamma_{i+j+k}^{l+s+m-d} + \gamma_{i+j+k+d}^{l+s+m-d}), & s+m<d \text{ 且 } l+s+m \geqslant d, \\ \mu(\gamma_{i+j+k}^{l+s+m-d} + \gamma_{i+j+k+d}^{l+s+m-d}), & s+m \geqslant d \text{ 且 } l+s+m < 2d, \\ \mu^2(\gamma_{i+j+k}^{l+s+m-2d} + 2\gamma_{i+j+k+d}^{l+s+m-2d} + \gamma_{i+j+k+2d}^{l+s+m-2d}), & l+s+m \geqslant 2d. \end{cases} \end{aligned}$$

则 $\widetilde{m}$ 满足结合律. 注意到 γ_0^0 是其单位元.

另外, $(C_d(n),\ \widetilde{m},\ 1 = \gamma_0^0)$ 是 Frobenius 代数. 对于 $\gamma_i^l, \gamma_j^s \in C_d(n)$, 我们注意到

$$\begin{aligned}(\gamma_i^l(\gamma_0^{d-1})^*)(\gamma_j^s) &= (\gamma_0^{d-1})^*(\gamma_j^s\gamma_i^l) = \begin{cases}(\gamma_0^{d-1})^*(\gamma_{i+j}^{l+s}), & l+s<d\\ \mu(\gamma_0^{d-1})^*(\gamma_{i+j}^{l+s-d}+\gamma_{i+j+d}^{i+j-d}), & l+s\geqslant d,\end{cases}\\ &= \delta_{s+l,\ d-1}\bar{\delta}_{i+j,\ 0},\end{aligned}$$

其中 $\bar{\delta}_{i,j}$ 为商群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上的 Kronecker 记号. 因此, 我们得到 $\gamma_i^l(\gamma_0^{d-1})^* = (\gamma_{n-i}^{d-1-l})^*$, 于是 $(C_d(n))^* = C_d(n)(\gamma_0^{d-1})^*$. 这样 $C_d(n)$ 是 Frobenius 代数, 其 Frobenius 态射为 $(\gamma_0^{d-1})^*$. 证毕.

下面仍沿用引理 2.4 中的记号. 本文的主结果如下:

定理 2.5 设 $\mathbb{K}$ 是特征为 2 的域, 则 $(C_d(n),\ \varphi=(\gamma_0^{d-1})^*,\ t=\sum_{u=0}^{n-1}\gamma_u^{d-1},\ \psi)$ 是双 Frobenius 代数, 其乘法为 $\widetilde{m}$.

证明 首先注意到余单位 ε 是代数同态. 事实上,

$$\begin{aligned}\varepsilon(\gamma_i^l\gamma_j^s) &= \begin{cases}\varepsilon(\gamma_{i+j}^{l+s}), & l+s<d,\\ \varepsilon(\mu(\gamma_{i+j}^{l+s-d}+\gamma_{i+j+d}^{l+s-d})), & l+s\geqslant d,\end{cases}\\ &= \begin{cases}\delta_{l+s,\ 0}, & l+s<d,\\ \mu(\delta_{l+s-d,\ 0}+\delta_{l+s-d,\ 0}), & l+s\geqslant d,\end{cases}\\ &= \delta_{l,\ 0}\delta_{s,\ 0} = \varepsilon(\gamma_i^l)\varepsilon(\gamma_j^s),\end{aligned}$$

其中 $\gamma_i^l,\ \gamma_j^s\in C_d(n)$. 注意到这里 $\mathbb{K}$ 的特征为 2. 显然, $1=\gamma_0^0$ 是 $C_d(n)$ 的群样元.

由引理 2.2 知, 欲证 $(C_d(n),\ \varphi=(\gamma_0^{d-1})^*,\ t=\sum_{u=0}^{n-1}\gamma_u^{d-1},\ \psi)$ 为双 Frobenius 代数, 只需证明映射 ψ 是反代数和反余代数同构. 由 (1) 式有

$$\begin{aligned}\psi(\gamma_i^l) &= \sum\varphi(t_1\gamma_i^l)t_2\\ &= (\gamma_0^{d-1})^*\left(\sum_{u=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{d-1}\gamma_{u+s}^{d-1-s}\gamma_i^l\right)\gamma_u^s\\ &= (\gamma_0^{d-1})^*\left(\sum_{u=0}^{n-1}\sum_{l\leqslant s}\gamma_{u+s+i}^{d-1-s+l}+\sum_{u=0}^{n-1}\sum_{l>s}\mu(\gamma_{u+s+i}^{l-s-1}+\gamma_{u+s+i+d}^{l-s-1})\right)\gamma_u^s\\ &= \gamma_{-l-i}^l,\end{aligned}$$

其中 $0\leqslant l\leqslant d-1$. 这样, 对极 $\psi(\gamma_i^l)=\gamma_{-i-l}^l$. 显然, 它是双射.

其次, 证明 ψ 是反代数和反余代数的同态. 对于 $i,j\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ 0\leqslant l,\ s\leqslant d-1$, 有

$$\begin{aligned}\psi(\gamma_i^l\gamma_j^s) &= \begin{cases}\psi(\gamma_{i+j}^{l+s}), & l+s<d,\\ \mu(\psi(\gamma_{i+j}^{l+s-d})+\psi(\gamma_{i+j+d}^{l+s-d})), & l+s\geqslant d,\end{cases}\\ &= \begin{cases}\gamma_{-i-j-l-s}^{l+s}, & l+s<d,\\ \mu(\gamma_{-i-j-l-s+d}^{l+s-d}+\gamma_{-i-j-l-s}^{l+s-d}), & l+s\geqslant d,\end{cases}\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\psi(\gamma_j^s)\psi(\gamma_i^l) &= \gamma_{-j-s}^s\gamma_{-i-l}^l\\ &= \begin{cases}\gamma_{-j-s-i-l}^{s+l}, & s+l<d,\\ \mu(\gamma_{-j-s-i-l}^{s+l-d}+\gamma_{-j-s-i-l+d}^{s+l-d}), & s+l\geqslant d.\end{cases}\end{aligned}$$

则 ψ 是反代数同态.

注意到

$$\triangle(\psi(\gamma_i^l)) = \triangle(\gamma_{-i-l}^l) = \left(\sum_{s=0}^{l} \gamma_{-i-l+s}^{l-s} \otimes \gamma_{-i-l}^{s}\right)$$

和

$$(\psi\otimes\psi)T\triangle(\gamma_i^l) = \sum_{s=0}^{l}(\psi\otimes\psi)(\gamma_i^s\otimes\gamma_{i+s}^{l-s}) = \sum_{s=0}^{l}(\gamma_{-i-s}^{s}\otimes\gamma_{-i-l}^{l-s}),$$

其中 T 为扭映射 (twist). 这样 ψ 也是反余代数同态.

3 一类分次的双 Frobenius 代数

根据文献 [6, 8] 中, 我们知道余代数 $C_d(n)$ 上可以有多个乘法结构, 使之成为双 Frobenius 代数. 于是自然产生一个有趣的问题: 对于给定的余代数, 能否确定其上所有的乘法结构使之成为双 Frobenius 代数? 本节将考虑这一问题.

给定余代数 $C_d(n)$, 并设 γ_0^0 是其单位元. 本节将分类出其上的一类分次的代数结构, 使得 $(C_d(n),\ \varphi=(\gamma_0^{d-1})^*,\ t=\sum_{i=0}^{n-1}\gamma_i^{d-1},\ \psi(\gamma_i^l)=\gamma_{-i-l}^l)$ 是双 Frobenius 代数. 注意到 $C_d(n)$ 是按道路长度分次的, 参见第 2 节.

设 $\mathbb{K}$ 为任意域, 记 $A=C_d(n)$. 设 A 的分次代数结构为

$$\gamma_i^l\gamma_j^s = P(i,l,j,s)\gamma_{F(i,l,j,s)}^{l+s},$$

其中 $i,\ j\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ \ 0\leqslant l,\ s\leqslant d-1,\ P(i,l,j,s)\in\mathbb{K},\ F(i,l,j,s)\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, (这里假设如果 $l+s\geqslant d$, 则 $\gamma_i^l\gamma_j^s=0$, 即, 如果 $l+s\geqslant d$, 则 $P(i,l,j,s)=0$).

由于 $1=\gamma_0^0$ 为 A 的单位元, 则有

$$\gamma_i^l\gamma_0^0 = P(i,l,0,0)\gamma_{F(i,l,0,0)}^l = \gamma_0^0\gamma_i^l = P(0,0,i,l)\gamma_{F(0,0,i,l)}^l = \gamma_i^l.$$

于是得到

$$F(i,l,0,0) = F(0,0,i,l) = i, \tag{2}$$

和

$$P(i,l,0,0) = P(0,0,i,l) = 1. \tag{3}$$

由于 A 的乘法是结合的, 即

$$\begin{aligned}(\gamma_i^l\gamma_j^s)\gamma_h^m &= P(i,l,j,s)\gamma_{F(i,l,j,s)}^{l+s}\gamma_h^m\\ &= P(i,l,j,s)P(F(i,l,j,s),l+s,h,m)\gamma_{F(F(i,l,j,s),l+s,h,m)}^{l+s+m}\\ &= \gamma_i^l(\gamma_j^s\gamma_h^m)\\ &= \gamma_i^lP(j,s,h,m)\gamma_{F(j,s,h,m)}^{s+m}\\ &= P(j,s,h,m)P(i,l,F(j,s,h,m),s+m)\gamma_{F(i,l,F(j,s,h,m),s+m)}^{l+s+m}.\end{aligned}$$

于是有

$$F(F(i,l,j,s),l+s,h,m) = F(i,l,F(j,s,h,m),s+m), \tag{4}$$

和

$$P(i,l,j,s)P(F(i,l,j,s),l+s,h,m) = P(j,s,h,m)P(i,l,F(j,s,h,m),s+m). \tag{5}$$

由 ψ 的定义, 我们有

$$\begin{aligned}\gamma^l_{-i-l} &= \psi(\gamma^l_i) = \varphi(t_1\gamma^l_i)t_2 = (\gamma_0^{d-1})^*\left(\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{d-1}\gamma_{j+m}^{d-1-m}\gamma^l_i\right)\gamma^m_j\\ &= (\gamma_0^{d-1})^*\left(\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{d-1}P(j+m,d-1-m,i,l)\gamma^{d-1-m+l}_{F(j+m,d-1-m,i,l)}\right)\gamma^m_j\\ &= \sum_{j=0}^{n-1}P(j+l,d-1-l,i,l)\delta_{0,F(j+l,d-1-l,i,l)}\gamma^l_j,\end{aligned}$$

因此, 有

$$F(-i,d-1-l,i,l)=0,\quad P(-i,d-1-l,i,l)=1, \tag{6}$$

和

$$F(-i',d-1-l,i,l)\neq 0,\quad P(-i',d-1-l,i,l)\neq 1,\quad \forall\, i'\neq i. \tag{7}$$

再由 ψ 是反代数映射, 有

$$\begin{aligned}\psi(\gamma^l_i\gamma^s_j) &= P(i,l,j,s)\psi(\gamma^{l+s}_{F(i,l,j,s)}) = P(i,l,j,s)\gamma^{l+s}_{-l-s-F(i,l,j,s)}\\ &= \psi(\gamma^s_j)\psi(\gamma^l_i) = \gamma^s_{-j-s}\gamma^l_{-i-l} = P(-j-s,s,-i-l,l)\gamma^{s+l}_{F(-j-s,s,-i-l,l)}.\end{aligned}$$

由此得到

$$-l-s-F(i,l,j,s) = F(-j-s,s,-i-l,l), \tag{8}$$

和

$$P(i,l,j,s) = P(-j-s,s,-i-l,l). \tag{9}$$

综上得到

$$\text{(i)}\ \begin{cases}F(i,l,0,0)=F(0,0,i,l)=i,\\ F(F(i,l,j,s),l+s,h,m)=F(i,l,F(j,s,h,m),s+m),\\ F(-i,d-1-l,i,l)=0,\\ F(-i',d-1-l,i,l)\neq 0,\quad \forall\, i'\neq i,\\ -l-s-F(i,l,j,s)=F(-j-s,s,-i-l,l),\end{cases}$$

和

$$\text{(ii)}\ \begin{cases}P(i,l,0,0)=P(0,0,i,l)=1,\\ P(i,l,j,s)P(F(i,l,j,s),l+s,h,m)\\ \qquad = P(j,s,h,m)P(i,l,F(j,s,h,m),s+m),\\ P(-i,d-1-l,i,l)=1,\\ P(-i',d-1-l,i,l)\neq 1,\quad \forall\, i'\neq i,\\ P(i,l,j,s)=P(-j-s,s,-i-l,l),\end{cases}$$

其中 $i,j,h\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $0\leqslant l,s,m\leqslant d-1$. 注意到映射 ψ 总是反余代数自同构, 参见定理 2.5 的证明. 由此, 我们得到本节的主要定理.

定理 3.1 设余代数 $C_d(n)$ 的乘法结构为

$$\gamma_i^l\gamma_j^s = P(i,l,j,s)\gamma_{F(i,l,j,s)}^{l+s}, \quad \forall i,\ j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ 0 \leqslant l,\ s \leqslant d-1,$$

其中 $P(i,l,j,s) \in \mathbb{K}$, $F(i,l,j,s) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 且满足: 只要 $l+s \geqslant d$, 就有 $P(i,l,j,s) = 0$, 则 $(C_d(n),\ \varphi = (\gamma_0^{d-1})^*,\ t = \sum_{i=0}^{n-1}\gamma_i^{d-1},\ \psi(\gamma_i^l) = \gamma_{-i-l}^l)$ 是分次双 Frobenius 代数当且仅当 F 和 P 分别满足方程组 (i) 和 (ii).

注记 3.2 1. 注意到 $F(i,l,j,s) = i+j$, $P(i,l,j,s) = 1$ (其中 $i,\ j,\ h \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $0 \leqslant l,\ s, m \leqslant d-1, l+s < d$) 是方程组 (i) 和 (ii) 的一组解 [8].

2. 设 $\mathrm{char}\mathbb{K} = 0$, q 是阶为 d 的单位根且 $d|n$. 记 $\binom{m}{l}_q = \frac{m!_q}{(m-l)!_q l!_q}$ 为 Gauss 系数, 则 $F(i,l,j,s) = i+j$, $P(i,l,j,s) = q^{lj}\binom{m}{l}_q$ 也是方程组 (i) 和 (ii) 的一组解 [6]. 这里注意到有限维 Hopf 代数是双 Frobenius 代数.

3. 由类似的论证, 我们可以得到余代数 $C_d(n)$ 上的非分次的双 Frobenius 代数结构的一些分类. 当然, 这些分类结果也将依赖于结构常数的方程组.

参考文献

1 Chen X W, Huang H L, Wang Y H. A note on “Modules, Comodules, and Cotensor Products over Frobenius Algebras”. *Chin Ann Math Ser B*, **27**(4): 419–424 (2006)

2 Doi Y, Takeuchi M. Bi-Frobenius Algebras. In: Contemp Math, Vol 267. Provindence, RI: AMS, 2000, 67–97

3 Doi Y. Bi-Frobenius algebras and group-like algebras, Hopf algebras. In: Lecture Notes in Pure and Appl Math, Vol 237. New York: Dekker, 2004, 143–155

4 Auslander M, Reiten I, Smalϕ S O. Representation Theory of Artin Algebras. In: Cambridge Studies in Adv Math 36. Cambridge: Cambridge University Press, 1995

5 Chin W, Montgomery S. Basic coalgebras, Modular interfaces (Reverside, CA, 1995). In: AMS/IP Stud Adv Math 4. Providence, RI: Amer Math Soc, 1997, 41–47

6 Chen X W, Huang H L, Ye Y, et al. Monomial Hopf algebras. *J Algebra*, **275**: 212–232 (2004)

7 Chen X W, Huang H L, Zhang P. Dual Gabriel theorem with applications. *Sci Chin Ser A-Math*, **49**(1): 9–26 (2006)

8 Wang Y H, Zhang P. Construct bi-Frobenius algebras via quivers. *Tsukuba J Math*, **28**(1): 215–221 (2004)

9 Braverman A, Gaitsgory D. Poincaré-Birkhoff-Witt theorem for quadratic algebras of Koszul type. *J Algebra*, **181**: 315–328 (1996)

10 Gerstenhaber M. Deformations of rings and algebras. *Ann Math*, **79**(2): 59–103 (1964)

11 Schneider H J. Lectures on Hopf algebras. Córdoba: University of Argentina, 1995, 52

12 Liu G X, Ye Y. Monomial Hopf algebras over fields of positive characteristic. *Sci Chin Ser A-Math*, **49**(3): 320–329 (2006)

13 Dăscălescu S, Năstăsescu C, Raianu S. Hopf Algebras: An Introduction, New York: Marcel Dekker, 2000

14 Doi Y. Substructures of bi-Frobenius algebras. *J Algebra*, **256**: 568–582 (2002)