中国科学: 数学 2018 年 第 48 卷 第 11 期: 1527～1534
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

综 述

标准导出等价与 D- 标准 Abel 范畴

献给刘绍学教授 90 华诞

陈小伍
中国科学技术大学数学科学学院, 合肥 230026
E-mail: xwchen@mail.ustc.edu.cn

收稿日期: 2017-10-10; 接受日期: 2018-05-09; 网络出版日期: 2018-10-19
国家自然科学基金 (批准号: 11522113 和 11671245) 和德国洪堡基金会 (Renewed Research Stay 项目) 资助项目

摘要 1991 年, Rickard 提出如下猜想: 模范畴之间的导出等价总是标准的, 即为双边倾斜复形的导出张量函子. 本文引入 **D**- 标准 Abel 范畴的概念, 并猜想模范畴总是 **D**- 标准的. 这个猜想等价于 Rickard 猜想. 本文综述这些猜想的相关进展.

关键词 Morita 理论 导出 Morita 理论 标准导出等价 **D**- 标准 Abel 范畴 **K**- 标准加法范畴

MSC (2010) 主题分类 18E30, 16G10, 18G35, 16E05

1 引言

模范畴的 Morita 理论 [1,2] 是代数学中最重要的理论之一, 其核心结论断言: 模范畴之间的等价均由某个可逆双模的张量函子给出. 受到经典倾斜理论 [3,4] 的启发, 模范畴的导出 Morita 理论由文献 [5] 提出. 此时, 可逆双模被双边倾斜复形替代. 具体来讲, 若两个代数导出等价, 则总存在双边倾斜复形使其对应的导出张量函子成为导出等价 (参见文献 [6]). 但与模范畴 Morita 理论不同的是, 我们并不知道是否任何导出等价均由双边倾斜复形给出. 事实上, Rickard 提出如下猜想 (参见文献 [6]): 代数之间的导出等价均为标准的, 即同构于双边倾斜复形的导出张量函子.

本文将综述该猜想的相关进展. 我们引入导出范畴上伪单位的概念, 从而给出 **D**- 标准 Abel 范畴的概念. 事实上, 上述猜想等价于如下猜想: 模范畴总是 **D**- 标准的. 类似地, 我们引入同伦范畴上伪单位和 **K**- 标准加法范畴等概念. 注意到, 若投射模的范畴是 **K**- 标准的, 则相应的模范畴是 **D**- 标准的. 上述猜想的研究归结于 **D**- 标准 Abel 范畴和 **K**- 标准加法范畴的研究. 这为研究 Rickard 猜想提供了新的视角.

本文结构如下. 第 2 节回顾模范畴的 Morita 理论和导出 Morita 理论. 第 3 节引入导出范畴上伪单位和 **D**- 标准 Abel 范畴等概念, 并指出它们与 Rickard 猜想之间的关系. 第 4 节引入同伦范畴上伪单位和 **K**- 标准加法范畴等概念, 并综述相关猜想的最新进展. 最后一节总结全文.

英文引用格式: Chen X W. Standard derived equivalences and **D**-standard abelian categories (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1527–1534, doi: 10.1360/N012017-00220

本文中设 k 为域. 我们所考虑的代数、范畴和函子均为 k- 线性的. 这里的代数特指有限维结合代数. 事实上, 若 k 为交换环, 代数为双边 Noether 环且为平坦 k- 模, 则部分结论也成立.

2 标准导出等价

本节将回顾导出 Morita 理论以及关于标准导出等价的猜想. 为了完整性, 首先回顾经典 Morita 理论.

设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 为加法范畴. 记 $\mathrm{Eq}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 为由从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的等价函子组成的范畴, 其态射为自然变换. 若 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 均为 Abel 范畴, 记 $\mathrm{Rex}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 为右正合函子的范畴.

设 A 为有限维代数, A-mod 为有限生成左 A- 模范畴. 记 A-proj 为由有限生成投射模组成的全子范畴. 设 M 为左 A- 模, 记 $\mathrm{add}M$ 为由 M 的有限直和的直和项组成的全子范畴. 右 A- 模视为左 A^{op}-模, 其中 A^{op} 为 A 的反代数. 设 B 为代数, 则 A-B- 双模视为左 $A\otimes B^{\mathrm{op}}$- 模, 其中 $\otimes$ 表示关于 k- 模的张量.

2.1 Morita 理论

经典 Morita 理论研究代数上模范畴之间的等价问题. 主要定理如下, 参见文献 [1, 第 3 节].

定理 1 [1] 设 A 和 B 为有限维代数, 则以下命题等价:

(1) 存在范畴等价 $A\text{-mod} \xrightarrow{\sim} B\text{-mod}$;

(2) 存在范畴等价 $A\text{-proj} \xrightarrow{\sim} B\text{-proj}$;

(3) 存在 B-mod 中的投射生成子 P, 使得有代数同构 $\mathrm{End}_B(P)\simeq A^{\mathrm{op}}$.

若 A 和 B 满足上述条件之一, 则称代数 A 与 B 互为 Morita 等价, 而 (1) 中的等价函子称为它们之间的 Morita 等价. 通过上述代数同构, P 成为 B-A- 双模, 记为 ${}_BP_A$. 事实上, 上述等价均为双模的张量函子.

称 B-A- 双模 ${}_BM_A$ 为可逆的 [2], 若存在 A-B- 双模 N 使得有双模同构 $M\otimes_A N\simeq B$ 和 $N\otimes_B M\simeq A$. 此时, 张量函子 $M\otimes_A -\colon A\text{-mod}\xrightarrow{\sim} B\text{-mod}$ 成为范畴等价, 其拟逆由 $N\otimes_B -$ 给出. 作为单边模, ${}_BM$ 和 M_A 均为投射生成子. 将 B-A- 双模范畴记为 $(B\otimes A^{\mathrm{op}})$-mod. 记由可逆双模组成的全子范畴为 (B,A)-inv.

注意到范畴等价

$$\mathrm{Eq}(A\text{-mod},B\text{-mod})\xrightarrow{\sim}\mathrm{Eq}(A\text{-proj},B\text{-proj}),\quad F\mapsto F|_{A\text{-proj}},\tag{2.1}$$

这里 $F|_{A\text{-proj}}$ 表示函子 F 在 A-proj 上的限制.

定理 2 设 A 和 B 为有限维代数, 则有范畴等价

$$(B\otimes A^{\mathrm{op}})\text{-mod}\xrightarrow{\sim}\mathrm{Rex}(A\text{-mod},B\text{-mod}),\quad M\mapsto M\otimes_A -,$$

其限制为如下的范畴等价: $(B,A)\text{-inv}\xrightarrow{\sim}\mathrm{Eq}(A\text{-mod},B\text{-mod})$, $M\mapsto M\otimes_A -$.

2.2 导出 Morita 理论

设 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}'$ 为三角范畴, 其平移函子分别记为 Σ 和 Σ'. 我们知道三角函子 $(F,\omega)\colon\mathcal{T}\to\mathcal{T}'$ 由加法函子 F 和自然同构 $\omega\colon F\Sigma\to\Sigma' F$ 给出, 并将 $\mathcal{T}$ 中三角映为 $\mathcal{T}'$ 中三角. 为了方便起见, 简记三角函子 (F,ω) 为 F.

记 $\mathrm{Ex}(\mathcal{T},\mathcal{T}')$ 为由从 $\mathcal{T}$ 到 $\mathcal{T}'$ 的三角函子组成的范畴. 我们强调: 三角函子之间的自然变换必须与相应的自然同构是相容的. 记 $\mathrm{Eq}(\mathcal{T},\mathcal{T}')$ 为三角等价组成的全子范畴.

设 $\mathcal{A}$ 为加法范畴. 记 $\mathbf{K}^b(\mathcal{A})$ 为其有界同伦范畴. 若 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴, 记 $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ 为其有界导出范畴. 它们的平移函子均记为 Σ. 对于整数 n, 记 Σ^n 为 Σ 的 n 次幂.

倾斜复形的概念是由 Rickard 提出的. 他受到经典倾斜理论 [3, 4] 的启发.

设 A 为有限维代数. 我们视 $\mathbf{K}^b(A\text{-proj})$ 为 $\mathbf{D}^b(A\text{-mod})$ 的三角子范畴. 复形 $P\in\mathbf{D}^b(A\text{-mod})$ 称为倾斜复形, 若对于任意非零整数 n, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^b(A\text{-mod})}(P,\Sigma^n(P))=0$ 且 $\mathrm{thick}\langle P\rangle=\mathbf{K}^b(A\text{-proj})$, 这里 $\mathrm{thick}\langle P\rangle$ 表示包含 P 且对直和项封闭的最小三角子范畴.

下述定理是导出 Morita 理论中最重要的定理之一, 参见文献 [5].

定理 3 设 A 和 B 为有限维代数, 则以下命题等价:

(1) 存在三角范畴等价 $\mathbf{D}^b(A\text{-mod})\xrightarrow{\sim}\mathbf{D}^b(B\text{-mod})$;

(2) 存在三角范畴等价 $\mathbf{K}^b(A\text{-proj})\xrightarrow{\sim}\mathbf{K}^b(B\text{-proj})$;

(3) 存在 $\mathbf{D}^b(B\text{-mod})$ 中的倾斜复形 P, 使得有代数同构 $\mathrm{End}_{\mathbf{D}^b(B\text{-mod})}(P)\simeq A^{\mathrm{op}}$.

此时, 我们称代数 A 与 B 是导出等价的, 且 (1) 中的三角等价称为它们之间的导出等价.

这里有个值得注意的问题: 通过 (3) 中的代数同构, 倾斜复形 P 并不能成为 B-A- 双模复形. 事实上, A 中元素仅能 "同伦" 地作用在复形 P 的每个分支上. 这就大大增加了 (1) 和 (2) 中三角函子构造的难度. 通过引入双边倾斜复形, 文献 [6] 解决了该问题. 可以说, 双边倾斜复形是可逆双模的导出版本.

称 B-A- 双模复形 P 为双边倾斜复形, 若存在 A-B- 双模复形 Q 使得分别在 $\mathbf{D}^b((B\otimes B^{\mathrm{op}})\text{-mod})$ 和 $\mathbf{D}^b((A\otimes A^{\mathrm{op}})\text{-mod})$ 中有同构 $P\otimes^{\mathbb{L}}_A Q\simeq B$ 和 $Q\otimes^{\mathbb{L}}_B P\simeq A$. 此时, 导出张量函子 $P\otimes^{\mathbb{L}}_A -\colon \mathbf{D}^b(A\text{-mod})\xrightarrow{\sim}\mathbf{D}^b(B\text{-mod})$ 为三角等价, 其拟逆由 $Q\otimes^{\mathbb{L}}_B -$ 给出. 作为单边模的复形, ${}_BP$ 和 P_A 均为倾斜复形. 记

$$(B,A)\text{-tilt}\subseteq\mathbf{D}^b(B\otimes A^{\mathrm{op}})$$

为双边倾斜复形组成的全子范畴.

类似于 (2.1), 我们有限制函子

$$\mathrm{Eq}(\mathbf{D}^b(A\text{-mod}),\mathbf{D}^b(B\text{-mod}))\longrightarrow\mathrm{Eq}(\mathbf{K}^b(A\text{-proj}),\mathbf{K}^b(B\text{-proj})),\quad F\mapsto F|_{\mathbf{K}^b(A\text{-proj})}.\tag{2.2}$$

与之前不同的是, 我们有如下的基本问题.

问题 1 限制函子 (2.2) 是稠密的么? 是忠实满的么?

若代数 A 和 B 均具有有限整体维数, 则该限制函子显然是范畴等价.

考虑三角子范畴

$$\mathbf{D}^b_{-A}((B\otimes A^{\mathrm{op}})\text{-mod})=\{X\in\mathbf{D}^b((B\otimes A^{\mathrm{op}})\text{-mod})\mid X_A\in\mathbf{K}^b(A^{\mathrm{op}}\text{-proj})\}.$$

如下命题对应于定理 2.

命题 1 设 A 和 B 为有限维代数, 则有加法函子

$$\mathbf{D}^b_{-A}((B\otimes A^{\mathrm{op}})\text{-mod})\longrightarrow\mathrm{Ex}(\mathbf{D}^b(A\text{-mod}),\mathbf{D}^b(B\text{-mod})),\quad X\mapsto X\otimes^{\mathbb{L}}_A -,\tag{2.3}$$

其限制函子为

$$(B,A)\text{-tilt}\longrightarrow\mathrm{Eq}(\mathbf{D}^b(A\text{-mod}),\mathbf{D}^b(B\text{-mod})),\quad P\mapsto P\otimes^{\mathbb{L}}_A -.\tag{2.4}$$

一般来讲, 函子 (2.3) 不是稠密的, 参见文献 [7]. 函子 (2.4) 一般不是满的 (考虑 $A=B$ 和正则双模, 注意到代数的中心可能真包含于代数的零次导出中心, 参见文献 [8]).

问题 2 函子 (2.4) 是稠密的么?

事实上, 文献 [6] 首次提出了上述稠密性问题. 下面的定义来自文献 [6, 定义 3.4].

定义 1 导出等价 $F\colon \mathbf{D}^b(A\text{-mod}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}^b(B\text{-mod})$ 称为标准的, 若存在双边倾斜复形 ${}_BX_A$ 使得有三角函子的同构 $F \simeq X\otimes_A^{\mathbb{L}} -$.

类似地, 称同伦等价 $F'\colon \mathbf{K}^b(A\text{-proj}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{K}^b(B\text{-proj})$ 为标准的, 若存在标准导出等价 F 以及三角函子的同构 $F' \simeq F|_{\mathbf{K}^b(A\text{-proj})}$.

于是, 问题 2 中的稠密性等价于下述猜想, 参见文献 [6, 第 43 页].

猜想 1 代数间的导出等价均为标准的.

根据 Orlov 的著名定理[9], 光滑射影代数簇之间的导出等价均是 Fourier-Mukai 型的, 而 Fourier-Mukai 型导出等价与标准导出等价很类似. 因此, Orlov 定理是 Rickard 猜想的有力佐证.

下面的结果是这个猜想的另一重要证据, 参见文献 [6, 推论 3.5].

命题 2 设 $F\colon \mathbf{D}^b(A\text{-mod}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}^b(B\text{-mod})$ 为代数 A 与 B 间的导出等价, 则存在标准导出等价 $F'\colon \mathbf{D}^b(A\text{-mod}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}^b(B\text{-mod})$ 使得对于任意 A- 模复形 M, 均有同构 $F(M)\simeq F'(M)$.

此时, 我们并不知道这个同构是否关于 M 是自然的. 该命题的简略证明如下.

命题 2 的证明 我们注意到 B- 模复形 $F(A)$ 是倾斜复形. 根据文献 [6, 命题 3.1] 或 [10], 存在双边倾斜复形 ${}_BX_A$ 使得在 $\mathbf{D}^b(B\text{-mod})$ 中有同构 ${}_BX \simeq F(A)$. 令 $F' = X\otimes_A^{\mathbb{L}} -$, 则 $F(A)\simeq F'(A)$. 根据文献 [11, 命题 3.7], 我们得出函子 F 与 F' 在对象上作用一致. □

我们指出微分分次代数导出 Morita 理论的新发展 (参见文献 [12]), 其主要工具为同伦范畴和拓扑方法; 比较文献 [13]. 但这些发展似乎与 Rickard 猜想并无直接关联.

3 D- 标准 Abel 范畴

对于 Abel 范畴的导出范畴, 我们引入伪单位和 **D**- 标准性等概念. 事实上, Rickard 猜想等价于模范畴是 **D**- 标准的.

3.1 伪单位与 D- 标准 Abel 范畴

设 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴, $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ 为其有界导出范畴. 将 $\mathcal{A}$ 对象 M 视为集中在零处的茎复形, 仍记为 M. 于是, $\mathcal{A}\subseteq \mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ 为全子范畴. 更一般地, 对于任意整数 n, $\Sigma^n(\mathcal{A})$ 表示形如 $\Sigma^n(M)$, 即集中在 $-n$ 处的茎复形组成的全子范畴.

下述定义属于文献 [11, 第 5 节].

定义 2 三角自函子 $F\colon \mathbf{D}^b(\mathcal{A}) \to \mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ 称为伪单位, 若满足如下两个条件:

(1) 对于任意复形 M, 有 $F(M)=M$;

(2) 对于任意整数 n, 其限制 $F|_{\Sigma^n(\mathcal{A})}\colon \Sigma^n(\mathcal{A}) \to \Sigma^n(\mathcal{A})$ 等于恒等函子.

注意到, 伪单位一定是三角自同构. 可以证明, 三角自函子 G 同构于伪单位当且仅当它是自等价且满足 $G(\mathcal{A})\subseteq\mathcal{A}$ 以及限制函子 $G|_{\mathcal{A}}\colon \mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 同构于恒等函子, 参见文献 [11, 推论 3.9].

我们可以加强命题 2, 参见文献 [11, 命题 5.8].

命题 3 设 $F\colon \mathbf{D}^b(A\text{-mod}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}^b(B\text{-mod})$ 为两代数 A 与 B 之间的导出等价, 则存在 $\mathbf{D}^b(A\text{-mod})$ 上的伪单位 $F_1\colon \mathbf{D}^b(A\text{-mod}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}^b(A\text{-mod})$ 和标准导出等价 $F_2\colon \mathbf{D}^b(A\text{-mod}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}^b(B\text{-mod})$ 使得有分解 $F \simeq F_2F_1$. 更进一步地, 函子 F 的这种分解是唯一的.

下述定义归功于文献 [11, 定义 5.1], 对于其等价定义的讨论参见文献 [11, 引理 5.2].

定义 3 称 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 为 **D-** 标准的, 若 $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ 上的任何伪单位均同构于恒等函子.

下述概念源于文献 [9]. Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的对象序列 $\{P_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 称为丰富的 (ample), 若对于任意对象 X, 存在整数 $i(X)$ 使得对于任意 $i \leqslant i(X)$, 下列条件成立:

(1) 存在满同态 $P_i^n \to X$, 其中正整数 $n = n(i)$ 取决于 i;

(2) 对任意 $j \geqslant 1$, 有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, P_i) = 0$ 且 $\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{A}}(P_i, X) = 0$.

下列结论属于文献 [9, 命题 2.16], 它是研究代数簇导出范畴的重要工具; 比较文献 [11, 命题 5.7].

定理 4 如果 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 具有丰富的序列, 则 $\mathcal{A}$ 是 **D-** 标准的. 特别地, 射影代数簇上的凝聚层范畴是 **D-** 标准的.

3.2 模范畴的 D- 标准性

下述定理建立了 **D-** 标准 Abel 范畴与 Rickard 猜想的联系, 参见文献 [11, 定理 5.10 和引理 5.12].

定理 5 设 A 和 B 为有限维代数, 则以下断言成立:

(1) A-mod 是 **D-** 标准的当且仅当任何导出等价 $F\colon \mathbf{D}^b(A\text{-mod}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}^b(B\text{-mod})$ 均为标准的;

(2) 若代数 A 与 B 导出等价, 则 A-mod 是 **D-** 标准的当且仅当 B-mod 是 **D-** 标准的.

于是, 猜想 1 等价于如下猜想.

猜想 2 任何代数 A 的模范畴 A-mod 均为 **D-** 标准的.

事实上, 我们猜想任何 Abel 范畴均为 **D-** 标准的.

基于定理 5 中的第二个断言, 我们提出如下问题.

问题 3 设 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 导出等价. 以下断言是否成立: $\mathcal{A}$ 是 **D-** 标准的当且仅当 $\mathcal{B}$ 也是 **D-** 标准的?

对于遗传代数, 下述命题正面回答了猜想 1; 它归功于文献 [14, 定理 1.8]; 比较文献 [11, 推论 5.6].

定理 6 设 $\mathcal{A}$ 为遗传 Abel 范畴, 则 $\mathcal{A}$ 为 **D-** 标准的. 特别地, 对于遗传代数 A, 其上的任何导出等价 $F\colon \mathbf{D}^b(A\text{-mod}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}^b(B\text{-mod})$ 总是标准的.

4 K- 标准加法范畴

类似于 **D-** 标准 Abel 范畴, 我们引入 **K-** 标准加法范畴. 为此, 我们将研究有界同伦范畴上的伪单位和标准等价.

4.1 伪单位与 K- 标准性

设 $\mathcal{A}$ 为加法范畴, $\mathbf{K}^b(\mathcal{A})$ 为其有界同伦范畴. 仍视 $\mathcal{A}$ 中对象 M 为集中在零次的茎复形. 于是, 对于任意整数 n, $\Sigma^n(\mathcal{A}) \subseteq \mathbf{K}^b(\mathcal{A})$ 表示由形如 $\Sigma^n(M)$ 的茎复形组成的全子范畴.

定义 4 三角自函子 $F\colon \mathbf{K}^b(\mathcal{A}) \to \mathbf{K}^b(\mathcal{A})$ 称为伪单位, 若以下两条成立:

(1) 对于任意复形 M, 有 $F(M) = M$;

(2) 对于任意整数 n, 其限制 $F|_{\Sigma^n(\mathcal{A})}\colon \Sigma^n(\mathcal{A}) \to \Sigma^n(\mathcal{A})$ 等于恒等函子.

加法范畴 $\mathcal{A}$ 称为 **K**- 标准的, 若 $\mathbf{K}^b(\mathcal{A})$ 上的伪单位均同构于恒等函子.

下述结论类似于定理 5.

命题 4 设 A 和 B 为有限维代数, 则以下断言成立:

(1) 范畴 A-proj 是 **K**- 标准的当且仅当任何同伦等价 $F\colon \mathbf{K}^b(A\text{-proj}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{K}^b(B\text{-proj})$ 为标准的.

(2) 若代数 A 与 B 导出等价, 则 A-proj 是 **K**- 标准的当且仅当 B-proj 是 **K**- 标准的.

证明 这个命题的证明类似于定理 5, 即我们将导出等价适当地换成同伦等价. 对于 (2), 我们只需注意到: 导出等价的存在性蕴含了某个标准同伦等价 $\mathbf{K}^b(A\text{-proj}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{K}^b(B\text{-proj})$. □

猜想 3 对于任何有限维代数 A, 范畴 A-proj 总是 **K**- 标准的.

由于投射模范畴是有限范畴, 故猜想 3 似乎比猜想 2 更好处理. 然而, 猜想 3 却蕴含了猜想 2. 对于整体维数有限的代数, 这两个猜想是等价的, 参见文献 [11, 第 6 节].

定理 7 设 $\mathcal{A}$ 为具有充分多投射对象的 Abel 范畴, 记 $\mathcal{P}$ 为全体投射对象组成的全子范畴, 则下面断言成立:

(1) 若加法范畴 $\mathcal{P}$ 为 **K**- 标准的, 则 $\mathcal{A}$ 为 **D**- 标准的.

(2) 设 $\mathcal{A}$ 中对象均有有限投射维数. 若 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 为 **D**- 标准的, 则加法范畴 $\mathcal{P}$ 为 **K**- 标准的.

下述事实可由定理 7(1) 直接得出: 考虑函子 (2.4) 和 (2.2) 的复合

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Eq}(\mathbf{D}^b(A\text{-mod}), \mathbf{D}^b(B\text{-mod})) \arrow[dr, "(2.2)"] & \\
(B,A)\text{-tilt} \arrow[ur, "(2.4)"] \arrow[rr, "\Phi"] & & \mathrm{Eq}(\mathbf{K}^b(A\text{-proj}), \mathbf{K}^b(B\text{-proj})),
\end{tikzcd}$$

则函子 Φ 是稠密的当且仅当 (2.4) 和 (2.2) 同时稠密.

4.2 关于猜想 3 的进展

设 $\mathcal{A}$ 为 Krull-Schmidt 范畴. 记 $\mathrm{ind}\mathcal{A}$ 为其不可分解对象同构类的完全代表元系.

下述概念属于文献 [15, 第 4 节]. 称 $\mathcal{A}$ 为 Orlov 范畴, 若其不可分解对象的自同态代数均为可除代数, 且存在次数函数 $\deg\colon \mathrm{ind}\mathcal{A} \to \mathbb{Z}$ 使得 $\deg S \leqslant \deg S'$ 且 $S \neq S'$ 蕴含着 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(S, S') = 0$.

有限维代数 A 称为三角的, 若其 Gabriel 箭图不含定向圈. 此时, 范畴 A-proj 自然成为 Orlov 范畴, 参见文献 [16, 引理 2.1].

下述结论属于文献 [15, 定理 4.7]; 比较文献 [11, 命题 4.6].

定理 8 Orlov 范畴总是 **K**- 标准的. 特别地, 猜想 3 对于三角代数 A 成立.

结合定理 7 和 8, 我们得出 Rickard 猜想对三角代数成立, 参见文献 [16]. 特别地, 这类代数包含了 Ringel 意义下的典范代数; 比较文献 [17, 引理 6.6].

设 A 为有限维代数, 则 $DA = \mathrm{Hom}_k(A, k)$ 自然成为 A-A- 双模; 若 A 的整体维数有限, 则对于任意整数 d, $\Sigma^d(DA)$ 为双边倾斜复形.

下述概念源于文献 [18]. 设 $d \geqslant 0$. 称 A 为 d-Fano 代数, 若它的整体维数有限且 $\Sigma^{-d}(DA)$ 为反丰富的双边倾斜复形; 称 A 为 d-anti-Fano 代数, 若它的整体维数有限且 $\Sigma^d(DA)$ 为丰富的.

下述定理属于文献 [18, 定理 4.5], 其论证依赖于文献 [9].

定理 9 设 A 为 d-Fano 或者 d-anti-Fano 代数, 则范畴 A-proj 是 **K**- 标准的.

设 $1 \leqslant r \leqslant N$. 令 $A(r,N)$ 为由以下箭图:

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[r, "\alpha_1"] & \cdots \arrow[r, "\alpha_{r-2}"] & r-1 \arrow[dr, "\alpha_{r-1}"] & \\
0 \arrow[ur, "\alpha_0"] & & & & r \arrow[dl, "\alpha_r"] \\
 & N-1 \arrow[ul, "\alpha_{N-1}"] & \cdots \arrow[l, "\alpha_{N-2}"'] & r+1 \arrow[l, "\alpha_{r+1}"'] &
\end{tikzcd}$$

以及关系 $\{\alpha_0\alpha_{N-1}, \alpha_1\alpha_0, \ldots, \alpha_{r-1}\alpha_{r-2}\}$ 给出的代数, 这里箭向的连接从右往左进行. 注意到, $A(1,1)$ 为对偶数代数.

下述定理属于文献 [19], 其证明需要对同伦范畴 $\mathbf{K}^b(A(r,N)\text{-proj})$ 中不可分解对象之间的态射做细致的分析.

定理 10 设 $1 \leqslant r \leqslant N$, 则范畴 $A(r,N)$-proj 是 **K**- 标准的.

5 结论

本文引入了 **D**- 标准 Abel 范畴和 **K**- 标准加法范畴等概念. 相关的猜想 2 和 3 与 Rickard 猜想紧密联系. 然而, 这些猜想对于大多数代数仍未知.

我们将已知结果概括如下.

定理 11 设 A 和 B 为有限维代数. 若 A 导出等价于以下任何一类代数:

(1) 三角代数;

(2) d-Fano 代数或 d-anti-Fano 代数, 其中 $d \geqslant 0$;

(3) $A(r,N)$, 其中 $1 \leqslant r \leqslant N$,

则任何导出等价 $F\colon \mathbf{D}^b(A\text{-mod}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}^b(B\text{-mod})$ 均为标准的.

以下设域 k 为代数封闭的.

导出离散代数由文献 [20] 提出, 是代数表示论中重要的代数类. 称代数 A 为导出离散的, 若对于任何给定的自然数向量 $\boldsymbol{n} = (n_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{D}^b(A\text{-mod})$ 中仅有有限个不可分解对象满足其同调维数向量为 $\boldsymbol{n}$, 这里对于复形 X, 其同调维数向量是指 $(\dim H^i(X))_{i\in\mathbb{Z}}$. 导出离散代数类对导出等价封闭.

根据如下推论, 文献 [21, 第 9 节] 和 [22, 第 5 节] 中计算的标准导出自等价群与整个导出自等价群恰是一致的.

推论 1 设 A 为整体维数有限的导出离散代数, 则任何导出等价 $F\colon \mathbf{D}^b(A\text{-mod}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}^b(B\text{-mod})$ 均为标准的.

证明 文献 [23] 给出了导出离散代数的导出等价分类. 根据文献 [23, 证明 2.4(h)], A 导出等价于某个三角代数或者 $A(r,N)$, 其中 $1 \leqslant r < N$. 故推论由上述定理 11 得出. □

最后, 我们指出, 文献 [24] 引入了加强的三角范畴, 用以研究 Rickard 猜想; 文献 [25,26] 分别利用双范畴和滤过三角范畴的观点研究了 Rickard 猜想; (强) **K**- 标准加法范畴在群作用方面有应用, 参见文献 [27, 附录 B].

致谢 感谢章璞教授一直以来的关心和支持, 感谢合作者叶郁教授以及章超副教授的学术探讨, 感谢审稿人的建议.

参考文献

1 Morita K. Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition. Sci Rep Tokyo Kyoiku Daiguku Sect A, 1958, 6: 83–142
2 Bass H. The Morita Theorems. Eugene: University of Oregon, 1962
3 Happel D. On the derived category of a finite-dimensional algebra. Comment Math Helv, 1987, 62: 339–389
4 Cline E, Parshall B, Scott L. Derived categories and Morita theory. J Algebra, 1986, 104: 397–409
5 Rickard J. Morita theory for derived categories. J Lond Math Soc (2), 1989, 39: 436–456
6 Rickard J. Derived equivalences as derived functors. J Lond Math Soc (2), 1991, 43: 37–38
7 Rizzardo A, Van den Bergh M. An example of a non-Fourier-Mukai functor between derived categories of coherent sheaves. ArXiv:1410.4039, 2015
8 Krause H, Ye Y. On the centre of a triangulated category. Proc Edinb Math Soc (2), 2011, 54: 443–466
9 Orlov D O. Equivalences of derived categories and K_3 surfaces. J Math Sci, 1997, 84: 1361–1381
10 Keller B. A remark on tilting theory and DG algebras. Manuscripta Math, 1993, 79: 247–252
11 Chen X W, Ye Y. The **D**-standard and **K**-standard categories. Adv Math, 2018, 333: 159–193
12 Toën B. The homotopy theory of *dg*-categories and derived Morita theory. Invent Math, 2007, 167: 615–667
13 Tabuada G. Homotopy theory of *dg* categories via localizing pairs and Drinfeld's *dg* quotient. Homology Homotopy Appl, 2010, 12: 187–219
14 Miyachi J I, Yekutieli A. Derived Picard groups of finite-dimensional hereditary algebras. Compos Math, 2001, 129: 341–368
15 Achar P N, Riche S. Koszul duality and semisimplicity of Frobenius. Ann Inst Fourier (Grenoble), 2013, 63: 1511–1612
16 Chen X W. A note on standard equivalences. Bull Lond Math Soc, 2016, 48: 797–801
17 Barot M, Kussin D, Lenzing H. The cluster category of a canonical algebra. Trans Amer Math Soc, 2010, 362: 4313–4330
18 Minamoto H. Ampleness of two-sided titling complexes. Inter Math Res Not IMRN, 2012, 1: 67–101
19 Chen X W, Zhang C. The derived-discrete algebras and standard equivalences. ArXiv:1705.05111, 2017
20 Vossieck D. The algebras with discrete derived category. J Algebra, 2001, 243: 168–176
21 Koenig S, Yang D. Silting objects, simple-minded collections, *t*-structures and co-*t*-structures for finite-dimensional algebras. Doc Math, 2014, 19: 403–438
22 Broomhead N, Pauksztello D, Ploog D. Discrete derived categories, I: Homomorphisms, autoequivalences and *t*-structures. Math Z, 2017, 285: 39–89
23 Bobiński G, Geiß C, Skowroński A. Classification of discrete derived categories. Cent Eur J Math, 2004, 2: 19–49
24 Neeman A. Some new axioms for triangulated categories. J Algebra, 1991, 139: 221–255
25 Johnson N. Morita theory for derived categories: A bicategorical perspective. ArXiv:0805.3673, 2008
26 Psaroudakis C, Vitória J. Realisation functors in tilting theory. Math Z, 2018, 288: 965–1028
27 Chen J, Chen X W, Ruan S. The dual actions, autoequivalences and stable tilting objects. ArXiv:1708.08222, 2017

Standard derived equivalences and D-standard abelian categories

Xiaowu Chen

Abstract In 1991, Rickard raised the following conjecture: Any derived equivalence between module categories is standard, i.e., isomorphic to the derived tensor functor by a two-sided tilting complex. We introduce the notion of a **D**-standard Abelian category, and conjecture that any module category is **D**-standard. We survey recent progress on these conjectures.

Keywords **Morita theory, derived Morita theory, standard derived equivalence, D-standard abelian category, K-standard additive category**

MSC(2010) **18E30, 16G10, 18G35, 16E05**

doi: 10.1360/N012017-00220