近世代数之五

陈小伍
中国科学技术大学

xwchen@mail.ustc.edu.cn

内容梗概

1. 分式域
2. 商域

分式域

1. 回顾从$\mathbb{Z}$到$\mathbb{Q}$的构造
2. 设R为整环。记$R^\times = R\backslash\{0\}$。考虑集合$R \times R^\times$上的关系
$$(a, x) \simeq (b, y) \text{ 当且仅当} ay = bx$$
3. 相应的等价类记为，称为**分式**：
$$\frac{a}{x} = \{(b, y) \in R \times R^\times \mid (b, y) \simeq (a, x)\}$$
4. 分式的全体$\mathrm{Frac}(R) = R \times R^\times / \simeq$

分式域，续

1. $\mathrm{Frac}(R)$上自然定义加法和乘法
$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{ay+bx}{xy},\quad \frac{a}{x}\cdot\frac{b}{y}=\frac{ab}{xy}$$
2. 定义合理性!
3. $\mathrm{Frac}(R)$是域，称为R的**分式域**

泛性质

考虑典范同态$\mathrm{can}_R\colon R \hookrightarrow \mathrm{Frac}(R), \quad r \mapsto \frac{r}{1_R}$，单射；
can_R 是同构当且仅当R是域。

定理

设R为整环，K为域。考虑环的单同态$\phi\colon R \to K$。则存在唯一的域嵌入$\tilde{\phi}\colon \mathrm{Frac}(R) \to K$使得下图交换

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, hook, "\mathrm{can}_R"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathrm{Frac}(R) \arrow[dl, dotted, "\tilde{\phi}"] \\ K & \end{tikzcd}$$

进一步，$\tilde{\phi}$是同构 $\Leftrightarrow$ 任意$w \in K$均可表达为$w = \phi(a)\phi(x)^{-1}$，某些$a, x \in R$。

例子

1. $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$诱导$\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Q}$
2. $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ 诱导$\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]) \simeq \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$
3. 设F为域。则$\mathrm{char}(F) = 0 \quad \Leftrightarrow \mathbb{Q} \subseteq F$；故，$F$自然成为$\mathbb{Q}$-线性空间
4. $\mathrm{char}(F) = p \quad \Leftrightarrow \mathbb{F}_p \subseteq F$；故，$F$自然成为$\mathbb{F}_p$-线性空间

思考：一般来说，很难确定等价关系$\simeq$的完全代表元系，故，集合$\mathrm{Frac}(R)$难以琢磨....

素理想

定义

设R为环。真理想$\mathfrak{p} \lhd R$称为**素理想**，若$ab \in \mathfrak{p}$蕴含着$a \in \mathfrak{p}$或$b \in \mathfrak{p}$。

1. 设$p \geq 1$。理想$p\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$当且仅当$p$为素数
2. $\mathfrak{p} \lhd R$为素理想当且仅当$R/\mathfrak{p}$为整环
3. 零理想$\{0_R\}$为素理想当且仅当R为整环
4. 环R的**素谱**$\mathrm{Spec}(R)$

极大理想与商域

定义

设R为环。真理想$\mathfrak{m} \lhd R$称为**极大理想**，若$\mathfrak{m} \subseteq I \lhd R$ 蕴含$\mathfrak{m} = I$或$I = R$。

商域如下：

命题

真理想$\mathfrak{m} \lhd R$是极大理想当且仅当$R/\mathfrak{m}$为域。特别地，极大理想是素理想。

1. $\emptyset \neq \mathrm{Max}(R) \subseteq \mathrm{Spec}(R)$
2. $\mathrm{Max}(\mathbb{Z}) = \{p\mathbb{Z} \mid p \text{ 为素数}\}$

素元与不可约元

设R为整环。$a\neq 0_R$，整除的记号$a|b \Leftrightarrow b\in(a)$

定义

1. 非零元$a\in R$称为**素元**，若(a)为素理想，等价地，$a|xy$蕴含$a|x$或$a|y$
2. 非零元$a\in R$称为**不可约元**，若a非单位，且$a=bc$蕴含着b或c是单位。

1. 素元总不可约。
2. 在$\mathbb{Z}$中，素元=不可约元=$\pm p$，p为素数
3. 在$\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$中，$4=2\cdot 2=(1+\sqrt{-3})\cdot(1-\sqrt{-3})$，2不可约，但非素

课程展望

1. 设k为域。考虑一元多项式环$k[x]$。
2. $k[x]$中的素元=不可约元，称为**不可约多项式**
3. 不可约多项式$f(x)$生成的主理想$(f(x)) \lhd k[x]$是极大的
4. 自然域同态$k \to k[x]/(f(x)) = K$，域扩张
5. $f(x)$在k中无根，但$f(x) \in K[x]$在K却有根，即$\bar{x}$。**添根构造**，参见L. Kronecker 1887
6. 构造有限域E. Galois 1830

部分练习

1. 设$f: K \to L$为域之间的同态。则f是单同态。
2. 证明：$\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]) \simeq \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$。
3. 设域K的特征为零。则存在唯一的域嵌入$\mathbb{Q} \to K$。思考，何时存在同态$K \to \mathbb{Q}$?
4. 设域K的特征为p。则存在唯一的域嵌入$\mathbb{F}_p \to K$。思考：何时存在同态$K \to \mathbb{F}_p$? 有限域的阶是否一定是素数幂?