近世代数之四

陈小伍
中国科学技术大学

xwchen@mail.ustc.edu.cn

内容梗概

1. 环同态
2. 商环
3. 同态基本定理

环同态

定义

设R, S为环。映射$\theta \colon R \to S$称为**环同态**，若满足以下条件

1. θ保持加法和乘法
2. $\theta(1_R) = 1_S$

双射的环同态称为**环同构**。

1. 我们强烈要求环同态保持单位元（比较课本）！
2. 同态的存在意味着“具有某种相同的性质和形态”。
   例：$\mathbb{Q}$与$\mathbb{Z}_n$之间无环同态；θ诱导群同态$\theta \colon U(R) \to U(S)$
3. 同态的复合；环同态的逆为环同构；环自同构群$\mathrm{Aut}(R)$
4. 同构的环“本质一样”，即具有相同的性质！

例子

1. 恒等同态$\mathrm{Id}_R\colon R \to R$
2. 设有子环$S \subseteq R$。则包含映射$\mathrm{inc}\colon S \to R$
3. 对于任何环R，存在唯一的环同态$\mathbb{Z} \to R$，称为**特征同态**

环同态的像与等价关系

考虑环同态$\theta\colon R \to S$

1. 像$\mathrm{Im}\ \theta \subseteq S$为子环
2. 相应的等价关系$\overset{\theta}{\sim}$分析如下: $a \overset{\theta}{\sim} b$ 当且仅当$\theta(a) = \theta(b)$
3. 这等价于$a - b \in \theta^{-1}(0_R) = \mathrm{Ker}\ \theta$，称为$\theta$的**核**
4. 相应的等价类$[a] = \theta^{-1}(\theta(a)) = a + \mathrm{Ker}\ \theta$，核的“平移”
5. 故，商集$R/\overset{\theta}{\sim}$ 等于 $\{\mathrm{Ker}\ \theta$ 的平移$\}$

核的特性

1. 核Ker θ完全确定了等价关系$\overset{\theta}{\sim}$
2. Ker $\theta \subseteq R$对加法、减法和乘法封闭，但不是子环！！
3. **重要观察**：$x \in \text{Ker } \theta$，任意$a \in R \quad \Rightarrow \quad ax \in \text{Ker } \theta$
4. 核对于R中求“倍元”封闭（远强于：乘法封闭性）

理想

定义 (R. Dedekind 1871；E.E. Kummer的ideal number 1846)

子集$I \subseteq R$称为**理想**，若I对加、减法以及倍元封闭。记号$I \lhd R$

1. 虽然$R \lhd R$，但我们通常仅考虑真理想（理想I为真当且仅当$1_R \notin I$）。
2. 平凡理想$\{0_R\}$以及R
3. 任意元素$a \in R$给出**主理想** $(a) = aR = \{a \text{ 的倍元}\}$
4. 环R为域当且仅当R仅有平凡理想

同态核=理想

1. 如上，环同态的核是真理想
2. 给定$I \lhd R$，定义**商环**R/I如下：
   （1）给出同余等价关系$a \equiv b \bmod I$以及等价类$\bar{a} = a + I$
   （2）其商集$R/\equiv$记为R/I，自然定义其加法和乘法（重点：验证其定义合理性，即，与代表元选取无关）
3. 这完全模仿同余类环$\mathbb{Z}_n$的构造，
   即$n\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$且$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$!（想法归于C. Gauss 1801）
4. 练习：分类（即，不遗漏不重复地罗列出）$\mathbb{Z}$的所有理想。

典范同态的泛性质

考虑理想$I \lhd R$。典范同态$\mathrm{can}\colon R \to R/I, \quad a \mapsto \bar{a}$。则有$\mathrm{Ker}\ can = I$。

命题

设$\theta\colon R \to S$为环同态。则$I \subseteq \mathrm{Ker}\ \theta$ 当且仅当$\theta = \theta' \circ \mathrm{can}$，其中$\theta'\colon R/I \to S$为某个环同态。
此时，同态θ'是唯一的，由θ诱导的。

环同态基本定理

定理

设$\theta\colon R \to S$为环同态。则唯一存在环同构

$$\bar{\theta}\colon R/\mathrm{Ker}\ \theta \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}\ \theta$$

使得下图交换

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\mathrm{can}"'] & S \\ R/\mathrm{Ker}\ \theta \arrow[r, dotted, "\bar{\theta}"] & \mathrm{Im}\ \theta \arrow[u, hook, "\mathrm{inc}"'] \end{tikzcd}$$

注：$\bar{\theta}(\bar{a}) = \theta(a)$，并比较之前的映射基本定理！

应用I

1. 设θ: $R \to S$是单的。则有环同构$R \simeq \mathrm{Im}\ \theta$，即，$R$“等同于”$S$的子环。（单的环同态又称为环嵌入）
2. 设θ: $R \to S$是满的。则有环同构$R/\mathrm{Ker}\ \theta \simeq S$，即，$S$“等同于”$R$的商环。
3. 特征映射$\mathbb{Z} \to R$，其核为$n\mathbb{Z}$，其中$n = 0$或$n \geq 2$。记$n = \mathrm{char}(R)$，称为环R 的**特征**
4. 整环的特征为0或素数p

应用II

1. 考虑R的两个理想$I \subseteq J$以及典范同态

$$R/I \to R/J, \quad a + I \mapsto a + J.$$

2. 其核为$J/I = \{a + I \mid a \in J\}$，且有诱导的环同构

$$(R/I)/(J/I) \simeq R/J, \quad \bar{a} + J/I \mapsto \bar{a}.$$

3. 存在双射

$$\{J \lhd R \mid I \subseteq J\} \longleftrightarrow \{R/I \text{ 的理想}\}, \quad J \mapsto J/I$$

4. 分类$\mathbb{Z}_n$的理想！

思考题

设R为环，$S \subseteq R$为子环，$I \lhd R$ 为理想。则

1. $S + I = \{a + x \mid a \in S, x \in I\}$为子环。
2. $S \cap I$为S的理想。
3. 环同构$S/(S \cap I) \simeq (S + I)/I,\ a + (S \cap I) \mapsto a + I$。

部分练习

1. 不存在环同态$\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Q}$;
2. 验证：$\mathbb{Z} \to R$, $n \mapsto n1_R$，是环同态。
3. 若环R仅有平凡理想，则R为域。
4. 设$I \lhd R$。则I为子环当且仅当$I = R$, 当且仅当$1_R \in I$。
5. 设$\theta: R \to S$为同构, $a \in R$。则a可逆当且仅当$\theta(a)$可逆。
6. 刻画自同构群$\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}[\sqrt{-1}])$。