近世代数之二

陈小伍
中国科学技术大学

xwchen@mail.ustc.edu.cn

内容梗概

集合

1. 当代数学的基石 — 集合
2. 数学的研究对象=带有“特定结构”的集合
3. 环= 可以加和乘的集合；域= 可以四则运算的集合

映射

1. 定义：两映射$f\colon X\to Y$ 与$f'\colon X'\to Y'$ 相等，若$X=X'$, $Y=Y'$且$f(x)=f'(x)$ 对任何$x\in X$成立。
2. 映射的复合，恒等映射
3. 映射f的像$\mathrm{Im}\ f$、单射、满射、双射
4. 单射的内蕴刻画？满射的内蕴刻画？双射的内蕴刻画？（element-free, that is, categorical!）
5. 典范分解：$f=i\circ\pi$，其中π为满射，i为单射。

基本构造

设X, Y为集合。

1. 无交并$X \coprod Y$ (若X, Y恰均为某个集合的子集，这区别于正常的并$X \cup Y$)
2. 笛卡尔积$X \times Y$
3. 映射集合$\mathrm{Map}(X, Y)$
4. 例: 存在双射$\mathrm{Map}(X, \{0, 1\}) \simeq \mathcal{P}(X)$，其中$\mathcal{P}(X)$为$X$的幂集。

典范双射

设X, Y, Z为集合。

1. 典范双射$\mathrm{Map}(X \coprod Y, Z) \simeq \mathrm{Map}(X, Z) \times \mathrm{Map}(Y, Z)$
2. 典范双射$\mathrm{Map}(X, Y \times Z) \simeq \mathrm{Map}(X, Y) \times \mathrm{Map}(X, Z)$
3. **伴随双射**：存在典范双射

$$\mathrm{Map}(X \times Y, Z) \simeq \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z))$$

等价关系

设X为集。

1. X上的等价关系$R \subseteq X \times X$：满足自反性、对称性、传递性。
2. 记号: $a \overset{R}{\sim} b \Leftrightarrow (a, b) \in R$
3. 等价类$[a]$、等价类的代表元以及商映射$X \to X/\overset{R}{\sim}$
4. 关于R的完全代表元系（研究等价关系的最核心内容！！！）
5. 例：奇偶性，模3剩余...

等价关系=分拆=满射

设X为集。

1. X的分拆是指其幂集某个子集$\{X_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{P}(X)$满足：非空、无交、覆盖。
2. 等价关系=分拆（hint：等价类）
3. 分拆=满射(的左等价类)（hint：考虑元素y的逆像$f^{-1}(y)$）

映射基本定理

定理

设$f: X \to Y$为映射，$\overset{f}{\sim}$为X上相应的等价关系。则f诱导双射

$$\bar{f}: X/\overset{f}{\sim} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}\, f, \quad [x] \mapsto f(x).$$

特别地，若f为满射，则Y“本质上”是X的商集。

映射的典范分解

设$f: X \to Y$为映射。则有交换图。

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\pi_f"'] & Y \\
X/\overset{f}{\sim} \arrow[r, dotted, "\bar{f}"] & \mathrm{Im}(f) \arrow[u, hook, "\mathrm{inc}"']
\end{tikzcd}
$$

也就说，我们有等式

$$f = \mathrm{inc} \circ \bar{f} \circ \pi_f.$$

注：满足上式的$\bar{f}$是唯一的！

二元运算

设S为集。

1. 二元运算ψ: $S \times S \to S, (x, y) \mapsto \psi(x, y)$
2. 结合律$\psi(\psi(x, y), z) = \psi(x, \psi(y, z))$
3. 记号约定：$\psi(x, y) = x \cdot y$（later, even as xy）
4. WARNING: 运算结果$x \cdot y$中不能恢复出x或y，因为ψ一般不是单射！

广义结合律

定理

设$(S,\cdot)$如上，满足结合律。则对于任意$n\geq 1$，唯一存在n元运算

$$[-,-,\cdots,-]: S\times S\times\cdots\times S\longrightarrow S$$

满足下列条件：

1. $[x]=x$
2. $[x,y]=x\cdot y$
3. $[x_1,x_2,\cdots,x_n]=[x_1,\cdots,x_i]\cdot[x_{i+1},\cdots,x_n]$，任意$1\leq i\leq n-1$.

部分习题

- （选）自学范畴的概念，验证Set是范畴。
- 验证单射、满射和双射的（范畴）内蕴刻画。
- 验证关于Map的三个典范双射。
- 验证关于完全代表元系的刻画。
- （选）补充广义结合律的证明。