近世代数之一

陈小伍
中国科学技术大学

xwchen@mail.ustc.edu.cn

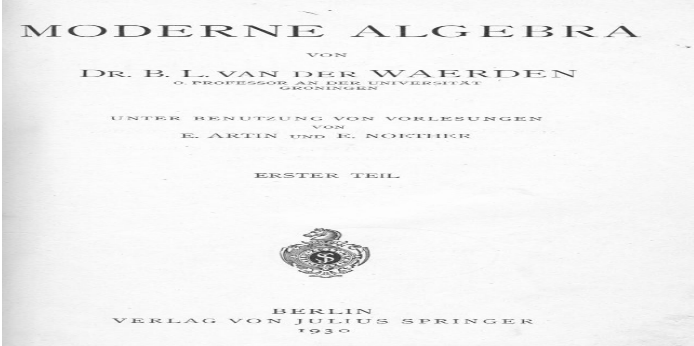
http://home.ustc.edu.cn/~xwchen

教材

1. 《近世代数引论》，科大出版社，第四版
2. M. Artin, 《Algebra》
3. J. Rotman, 《Galois Theory》

近世代数

1. B. L. Van Der Waerden, Moderne Algebra, 1930
2. 1955，德文第四版改为Algebra
3. 英文版1949题为Modern Algebra; 1970重版，改为Algebra



MODERNE ALGEBRA

VON

DR. B. L. VAN DER WAERDEN

O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT
GRONINGEN

UNTER BENUTZUNG VON VORLESUNGEN
VON
E. ARTIN UND E. NOETHER

ERSTER TEIL

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1930

何为代数？

1. 解（研究）线性方程组 — 线性代数
2. 解（研究）一元高次方程 — 近世代数
3. 解（研究）多元高次方程组 — 代数几何、代数表示论

1. 求根以及求根公式
   ⇒ 系数与（重）根的运算（域扩张）
   ⇒ 域的自同构群（Galois群）
2. 系数域通常是**无限**域，而Galois群是**有限**群！
3. Galois大定理（1831）：方程根式可解 $\Leftrightarrow$ Galois群可解
4. “求根公式”不再是核心问题！

Galois理论

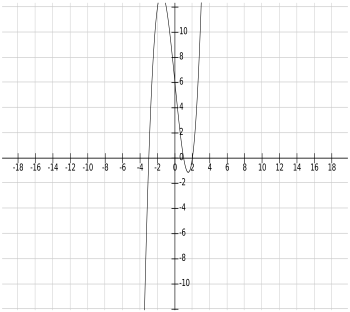
1. 求根以及求根公式
   $\Rightarrow$ 系数与（重）根的运算（域扩张）
   $\Rightarrow$ 域的自同构群（Galois群）
2. 系数域通常是**无限域**，而Galois群是**有限群**!
3. Galois大定理（1831）：方程根式可解 $\Leftrightarrow$ Galois群可解
4. “求根公式”不再是核心问题！（谁还记得1545年《Ars Magna》的Cardano公式、Ferrari公式呢？）

例子之一:$x^3 - 7x + 6 = 0$

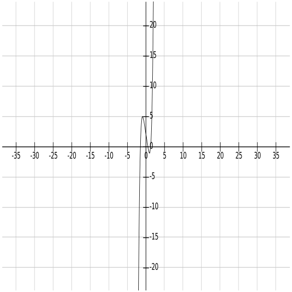
1. 令 $t_0 = \sqrt[3]{\frac{-6+\sqrt{6^2+\frac{4\times(-7)^3}{27}}}{2}}$; 注意单位根!
2. Cardano公式 $x = t_0 + \frac{7}{3t_0}$; 请猜一猜 $x =$?

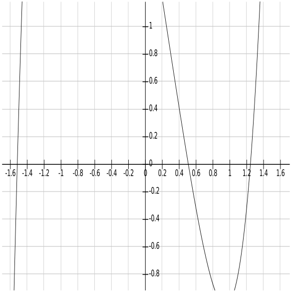
例子之一:$x^3-7x+6=0$

1. 令$t_0=\sqrt[3]{\frac{-6+\sqrt{6^2+\frac{4\times(-7)^3}{27}}}{2}}$; 注意单位根!
2. Cardano公式$x=t_0+\frac{7}{3t_0}$; 请猜一猜$x=?$



例子之二:$x^5 - 4x + 2 = 0$





此方程不根式可解!

意大利的故事

Figure 1: Nicolo Tartaglia 1499 - 1557

Figure 2: Girolamo Cardano 1501-1576

Figure 3: Lodovico Ferrari 1522-1565

五次一般方程

Figure 4: Paolo Ruffini 1765-1822

Figure 5: Niels Henrik Abel 1802-1829

本课程主角

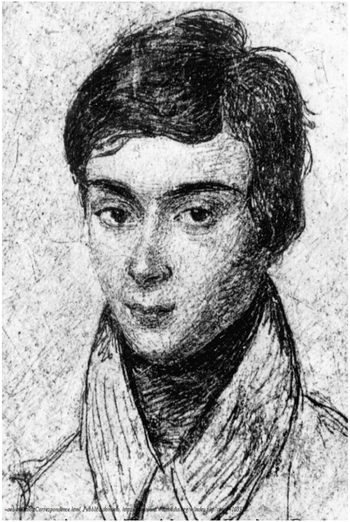


Figure 6: Évariste Galois, Oct. 25, 1811- May 31, 1832

相关网站

1. Évariste Galois档案 http://www.galois-group.net
2. Alexander Grothendieck 《Long March Through Galois Theory》, pp.1600, 1978-82.
3. https://grothendieck.umontpellier.fr/archives-grothendieck/
4. 预印本网站 arxiv.org (Algebraic Geometry, Quantum Algebra, Representation Theory, Rings and Algebras ...)

课程计划

1. 环论（重点：整环、商域与域扩张）
2. 有限群论（重点：循环群与低阶对称群）
3. Galois理论与Galois大定理（重点：子域与子群的对应）