近世代数之二十二

陈小伍
中国科学技术大学

xwchen@mail.ustc.edu.cn

内容梗概

1. 有限生成Abel群
2. 整数矩阵相抵

加法群

1. Abel群A记为加法群：$a+b$，幺元为0_A，负元$-a$
2. 两加法群的直积通常记为直和$A \oplus B = A \times B$
3. （有限生成）**自由Abel群** $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$, 其元素通常记为列向量
4. $\mathbb{Z}^n$有**标准基**; aha, we are doing linear algebra over $\mathbb{Z}$!

自由Abel群

可以定义**基**

命题

有限生成Abel群A是自由的当且仅当A有一组基!

子群就是"子空间"!

命题

任何有限生成Abel群均同构于$\mathbb{Z}^n/K$，其中$K \leq \mathbb{Z}^n$为子群。

不平凡的结论!

命题

$\mathbb{Z}^n$的任何子群K为有限生成的。

提示：对n归纳!

矩阵

考虑$M_{n\times m}(\mathbb{Z})$。

命题

存在双射

$$M_{n\times m}(\mathbb{Z}) \longleftrightarrow \{\text{群同态}\mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n\}, \quad A \mapsto \phi_A \text{ 左乘矩阵}$$

思考：$\mathbb{Z}^n \simeq \mathbb{Z}^m$是否得出$n = m$?

可定义ϕ_A的**余核**$\mathrm{Cok}(\phi_A) = \mathbb{Z}^n/\mathrm{Im}(\phi_A)$.

推论

任何有限生成*Abel*群均同构于$\mathrm{Cok}(\phi_A)$!

相抵标准型

考虑可逆整方阵的群$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$，定义相抵。

命题

相抵的矩阵有一样的余核!

定理

设$A \in M_{n\times m}(\mathbb{Z})$。则存在$P, Q$可逆使得

$$P^{-1}AQ = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_r, 0, \cdots, 0)$$

使得正整数$d_1|d_2|\cdots|d_r$.

推论

推论

考虑方阵$A \in M_n(\mathbb{Z})$。则$\mathrm{Cok}(\phi_A)$有限当且仅当$\det(A) \neq 0$。此时，$|\mathrm{Cok}(\phi_A)| = |\det(A)|$.

推论

考虑$K \leq \mathbb{Z}^n$。则有:

1. 存在$\mathbb{Z}^n$的一组基$\{e_1, \cdots, e_n\}$，以及$d_1|d_2|\cdots|d_r$，使得$\{d_1e_1, \cdots d_re_r\}$恰为$K$的基。特别地，$K$自由！
2. $\mathbb{Z}^n/K \simeq \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_r} \oplus \mathbb{Z}^{n-r}$.

有限生成Abel群结构定理

Abel 群G的**扭子群**$t(G)=\{g\in G \mid g$ 有限阶$\}$，是子群!

定理

设G为有限生成$Abel$群。则存在群同构

$$G \simeq \mathbb{Z}^r \oplus t(G),$$

其中$r=\mathrm{rank}(G)$，群G的**秩**, $t(G)$为有限群，同构于$\mathbb{Z}_{d_1}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{d_r}$, d_i 称为G 的**不变因子**。

注：有限p-群必同构于$\mathbb{Z}_{p^{s_1}}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{p^{s_t}}$, p^{s_i}为**初等因子**。