

近世代数之二十一

陈小伍
中国科学技术大学

xwchen@mail.ustc.edu.cn

- ① 自由群
- ② 群的表现

字母与字

- ① 考虑集合 X ，添加形式逆 $X^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in X\}$
- ② 字母集合 $X \cup X^{-1}$
- ③ 定义字 $w = x_1 x_2 \cdots x_n$, $x_i \in X \cup X^{-1}$
- ④ 既约字：不存在 $x_i = x_{i+1}^{-1}$ ；每个字均能约化为唯一的既约字！
- ⑤ 空字记为1

自由群

定义

集合 X 上的自由群

$$F(X) = \{ \text{所有既约字的全体} \}$$

乘法为字的连接（以及约化）。若 X 为有限集，则 $F(X)$ 称为有限生成自由群。

验证：乘法结合律？

问题：若 $X = \{a\}$ ， $F(X)$ 是什么？

自由群的范性质

命题

设 G 为群以及任何映射 $f: X \rightarrow G$ 。则 f 唯一延拓为群同态 $F(X) \rightarrow G$ 。

命题

任何群均为自由群的商群。

群的表现

定义

群 G 的(有限)表现是指

$$G = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, r_2, \dots, r_m \rangle, \quad r_i \in F(x_1, \dots, x_n)$$

其中, 右边是指

$$F(x_1, \dots, x_n) / N(r_1, r_2, \dots, r_n)$$

这里, $N(r_1, r_2, \dots, r_m)$ 为包含这些 r_i 的最小正规子群。称 x_i 为生成元, r_i 为生成关系。

问题: 子群 $N(r_1, r_2, \dots, r_m)$ 由哪些元素生成?

命题

设 $G = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, r_2, \dots, r_m \rangle$ 以及 H 为群。则映射 $f: X = \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow H$ 可延拓至群同态 $G \rightarrow H$ 当且仅当元素 $f(x_i) \in H$ “满足” 关系 r_i 。

The Word Problem (困难!!): G 中的元素? 或, $F(X)/N$ 的陪集代表元系?

记号: $G = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, r_2, \dots, r_m \rangle$, $r_i \in F(x_1, \dots, x_n)$ 常记为

$$G = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1 = 1, r_2 = 1, \dots, r_m = 1 \rangle$$

例子

例子

证明: $\mu_n \simeq \langle g \mid g^n = 1 \rangle$

例子

证明: $S_3 \simeq \langle s_1, s_2 \mid s_1^2 = 1 = s_2^2, s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2 \rangle$

例子

例子

考虑 $\mathbb{R}^2$ 的正 n 形，其对称群为 D_n ，二面体群，阶为 $2n$ ： n 个旋转以及 n 个发射。

试证明： $D_n \simeq \langle x, y \mid x^n = y^2 = 1, (xy)^2 = 1 \rangle$

表现不唯一： $D_n \simeq \langle s, t \mid s^2 = t^2 = 1, (st)^n = 1 \rangle$.

问题：无限二面体群

$$D_\infty = \langle x, y \mid y^2 = 1 = (xy)^2 \rangle \simeq \langle s, t \mid s^2 = 1 = t^2 \rangle$$

是无限群？

四元数群

例子

考虑四元数代数 $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$, 为可除环。

考虑子群 $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \subseteq \mathbb{H}^\times$ 。

试证明: $Q_8 \simeq \langle a, b \mid a^4 = 1, b^2 = a^2, ba = a^3b \rangle$

问题: Q_8 与 D_4 同构么?

口号: 每个“具体群”都有自己的“故事”!