

近世代数之二十

陈小伍
中国科学技术大学

xwchen@mail.ustc.edu.cn

内容梗概

- ① Sylow子群
- ② 例子与应用

Sylow子群

设 $|G| = p^r \cdot m$, 其中 $p \nmid m$ 。

定义

子群 $P \leq G$ 称为**Sylow p -子群**, 若 $|P| = p^r$ 。

定理 (Sylow 1872)

设 $|G| = p^3 \cdot m$ 如上。则下列断言成立:

- ① 存在Sylow p -子群。
- ② Sylow p -子群之间相互共轭; 故, 均同构!
- ③ Sylow p -子群的个数: 是 m 的因子, 其形如 $kp + 1$ 。
- ④ 任何 p -子群 $B \leq G$, 存在Sylow p -子群 P 满足 $B \leq P \leq G$ 。

例子 S_4

例子

- ① $|S_4| = 3^1 \cdot 2^3$
- ② Sylow 2-子群恰有3个! 分别为 $(K_4, (12)), (K_4, (13)), ((K_4, (14)))$
- ③ Sylow 3-子群恰有4个。
- ④ S_4 的4-阶子群不一定相互共轭! 2-阶子群呢?

例子 A_4

例子

- ① $|A_4| = 3^1 \cdot 2^2$
- ② $Sylow$ 2-子群仅有一个，为正规子群 K_4 。
- ③ $Sylow$ 3-子群有4个。

35阶群

命题

35阶群必同构于 $\mathbb{Z}_{35}$ 。

hint: 考虑Sylow 5-子群 P 以及Sylow 7-子群 Q ; 它们都是正规子群!

命题

108阶群总不是单群。

hint: $|G| = 2^2 \cdot 3^3$ 。考虑Sylow 3-子群 P ，考虑 G 左诱导作用于 G/P 。则有同态

$$\rho: G \longrightarrow S(G/P)$$

应用：有限Abel群

命题

设 G 为Abel群，满足 $|G| = p_1^{s_1} \cdots p_r^{s_r}$ 。则其Sylow p_i -子群 P_i 唯一，且有

$$G = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_r.$$

故，归结于Abel p -群结构问题！

应用：最小单群

定理

设 G 为非 $Abel$ 单群。则 $|G| \geq 60$ 。且，60阶单群必同构于 A_5 。

部分证明

- ① 考虑 $X = \{U \leq G \mid |U| = p^r\}$ 。则 $G \curvearrowright X$ 如下 $g.U = gU$ 。
- ② 注意到 $p \nmid |X|$ (试比较 i 以及 $m \cdot p^r - p^r + i$ 的 p -次数)
- ③ 存在 $U \in X$ 使得 $p \nmid |\mathcal{O}_U|$ 。考虑稳定化子 G_U ，
故 $|G_U| = p^r \cdot m'$ 。
- ④ 但, $G_U \curvearrowright U$ freely, 这样 $|G_U|$ 整除 p^r 。故有, $|G_U| = p^r$, 为所求!