近世代数之十九

陈小伍
中国科学技术大学

xwchen@mail.ustc.edu.cn

内容梗概

1. 群作用
2. 共轭作用

群作用

定义

群G（左边）作用于集X，记为$G\curvearrowright X$，是指映射

$$\psi\colon G\times X\to X,\quad (g,x)\mapsto\psi(g,x)=g.x$$

满足：

1. $1.x=x$
2. $h.(g.x)=(hg).x$

此时，称X，或(X,ψ)，为（左）G-集。

注：G-集(X,ψ)诱导群同态

$$\rho\colon G\to S(X),\quad g\mapsto\rho(g)$$

使得$\rho(g)(x)=g.x$. 反之，给定ρ，亦可定义G-集。

群作用，右边

1. 定义群的右作用$Y \curvearrowleft G$
2. 右作用等同于群同态$G \to S(Y)^{\mathrm{op}}$
3. 右G-集本质上等同于左G-集

例子

1. 设$H \leq G$，考虑$G/H = \{aH \mid a \in G\}$。则$G \curvearrowright (G/H)$，左诱导作用。
2. 特别地，$G \curvearrowright G$，左正则作用
3. 对偶的，$(H \backslash G) \curvearrowleft G$，以及$G \curvearrowleft G$ 右正则作用
4. $S(X) \curvearrowright X$
5. 设K/k。则$\mathrm{Aut}(K/k) \curvearrowright K$。考虑$f(x) \in k[x]$以及根集$\mathrm{Root}_K(f)$。则有作用

$$\mathrm{Aut}(K/k) \curvearrowright \mathrm{Root}_K(f)$$

注：Galois群本质上是根的置换群!

更多的例子

1. $GL_2(\mathbb{F}_2) \curvearrowright V = \mathbb{F}_2^{\oplus 2}$
2. $\Sigma(\square) \curvearrowright \mathrm{Vect}(\square)$
3. 若$G \curvearrowright X$，则G自然作用于$\mathcal{P}(X)$，X的幂集。

轨道

给定$G\curvearrowright X$, $x\in X$。

1. x的G-轨道$\mathcal{O}_x = G.x = \{g.x \mid g\in G\}$
2. 可定义X上的等价关系：轨道为其等价类
3. 有无交并
$$X = \bigsqcup_{x\in I} \mathcal{O}_x,$$
称为X的**轨道分解**，I为轨道的完全代表元系
4. 称群作用$G\curvearrowright X$**可迁的**，若只有一个轨道
5. 例如: 对于任何$x\in X$，总有限制的作用$G\curvearrowright \mathcal{O}_x$；它总是可迁的。

稳定化子

定义

考虑$G \curvearrowright X$以及$x \in X$。则x的**稳定化子**

$$G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\} \leq G$$

.

引理

设$x = h.y$。则$G_x = hG_y h^{-1}$。故，同一轨道中的稳定化子是互相共轭的。

轨道-稳定化子定理

定理

考虑$G \curvearrowright X$以及$x \in X$。则存在双射

$$G/G_x \longrightarrow \mathcal{O}_x, \quad gG_x \mapsto g.x$$

且与G-作用相容。特别地，我们有**轨道-稳定化子公式**

$$|\mathcal{O}_x| = |G/G_x| = [G : G_x]!$$

Burnside 引理

定理 (Cauchy 1845/Frobenius 1887/Burnside 1897)

考虑$G \curvearrowright X$，以及轨道集合G/X。对于$g \in G$，考虑$X^g = \{x \in X \mid g.x = x\}$。则有：

$$|G| \cdot |X/G| = \sum_{g \in G} |X^g|$$

hint: 计数$\{(g, x) \in G \times X \mid g.x = x\}$!

忠实作用

作用$G\curvearrowright X$的核$N=\cap_{x\in X}G_x$。若$N=1_G$，则$G\curvearrowright X$为**忠实的**，等价地，$\rho\colon G\to S(X)$是单同态。

例子

1. 左正则作用$G\curvearrowright G$是忠实的，故，$G\hookrightarrow S(G)$（*Cayley*定理，*1878*）
2. **右正则作用**$G\curvearrowright G$定义如下：$g_\circ h=hg^{-1}$，亦为忠实的。

自由作用

作用$G \curvearrowright X$称为**自由的**，若任何$x \in X$满足$G_x = \{1_G\}$，等价地，$|\mathcal{O}_x| = |G|$。特别地，$|G|$整除$|X|$!

例如：左右正则作用均为自然作用。

例如：$H \leq G$，则乘法诱导的作用$H \curvearrowright G$也是自由的。

平凡作用

作用$G\curvearrowright X$称为**平凡的**，若$g.x=x$，任何$g\in G$以及$x\in X$，等价地，$G_x=G$。

例子

设$G\curvearrowright X$。则X的**不动点集**$X^G=\{x\in X\mid g.x=x,任何g\in G\}$。若$X^G$非空，则$G\curvearrowright(X^G)$是平凡的。

共轭作用

考虑共轭作用$G \curvearrowright X = G$如下：$g_\circ x = gxg^{-1}$

1. 轨道为共轭类C_x
2. $C_x = \{x\}$当且仅当$x \in Z(G)$
3. 稳定化子为$Z(x) = \{g \in G \mid gx = xg\}$，包含$(x)$
4. $|C_x| = \frac{|G|}{Z(x)}$

命题 (类等式)

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{|C_x|>1} |C_x|$$

例子

例子

回顾：A_4的共轭类？

p-群

有限群G称为p-**群**，若$|G| = p^n$。

命题

p-群均有非平凡中心。

命题

p^2阶群均为$Abel$群，且同构于$\mathbb{Z}_{p^2}$或$\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$。

例子一

例子

S_4共轭作用于共轭类

$$X = \{A = (12)(34), B = (13)(24), C = (14)(23)\}$$

考虑相应的群同态

$$S_4 \longrightarrow S(X)$$

例子二

例子

设$H \leq G$。则G共轭作用于

$$X_H = \{H' \leq G \mid H' \text{ 共轭于} H\}$$

则：

$$|G| = |N_G(H)| \cdot |X_H|$$

其中，正规化子$N_G(H) = \{g \in G \mid gH = Hg\}$.

应用

命题

设子群$N \leq G$满足$[G:N]=p$为G的最小素因子。则N为正规子群。

hint：考虑$G \curvearrowright G/N$，其核K属于N。考虑$[G:K]!$