近世代数之十八

陈小伍
中国科学技术大学

xwchen@mail.ustc.edu.cn

内容梗概

1. 对称群
2. 共轭类
3. 单群

对称群

命题

设有集合间双射$\sigma: X \to Y$。则有群同构$S(X) \simeq S(Y)$.

考虑$\underline{n} = \{1, 2, \cdots, n\}$，记$S_n = S(\underline{n})$, n元集合上的**对称群**，其运算为置换的符号.

注：S_1为平凡群，$S_2 \simeq \mu_2$为2阶循环群。

记号

1. $\sigma \in S_n$记为$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$
2. $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$

例子

S_3中：考虑$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$以及$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$。计算$\sigma\tau$ 以及$\tau\sigma$

轮换

1. 设$i_1, i_2, \cdots i_t \in \underline{n}$两两不同，$t \geq 2$。定义$t$-**轮换**

$$c = (i_1 i_2 \cdots i_t) \in S_n$$

如下：$i_1 \overset{c}{\mapsto} i_2 \overset{c}{\mapsto} \cdots \overset{c}{\mapsto} i_n \overset{c}{\mapsto} i_1$, 其他元素不动。

2. 2-轮换称为**对换**
3. 1-轮换(i)均为恒等变换，一般不考虑

引理

考虑轮换σ, τ。若它们不相交，则$\sigma\tau = \tau\sigma$!

引理

有用等式: $\sigma(i_1 i_2 \cdots i_t)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \cdots, \sigma(i_t))$.

命题

任何$\sigma \in S_n$，存在唯一的表达式$\sigma = c_1 \cdots c_l$，其中c_i为互不相交的轮换。

hint：考虑$\underline{n}$上的σ-轨道！

定义σ的**型**$1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}$，满足$\Sigma_{i=1}^{n} i\lambda_i = n$.

回顾：群G中a与b共轭，若存在$g \in G$使得$a = gbg^{-1}$；这是等价关系，其等价类称为**共轭类**。

定理

S_n中两元素相互共轭 $\Longleftrightarrow$ 它们同型！

例子

例子

1. 具体给出S_1, S_2, S_3, S_4的共轭类
2. 给出下面映射的像

$$\Sigma(\square) \longrightarrow S_4$$

引理

任何$\sigma \in S_n$均能写成对换之积。

$$(ij) = (i+1, j)(i, i+1)(i+1, j)$$

故，S_n由$(12), (23), \cdots, (n-1, n)$生成!
辫子关系

$$(i+1, i+2)(i, i+1)(i+1, i+2) = (i, i+1)(i+1, i+2)(i, i+1)$$

引理

存在群同态

$$S_n \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \quad \sigma \mapsto P_\sigma \text{ 置换方阵}$$

故，$\mathrm{sign}\colon S_n \to \{\pm 1\}$，其核$A_n$，$n$元集合上的**交错群**

定义

群G称为**单群**，若没有非平凡的正规子群。

单群是群的building blocks，但绝非简单的群！

定理

设$n \geq 5$。则交错群A_n是单群！

第一步：A_n由3-轮换生成。

第二步：3-轮换在A_n中共轭。

第三步：设$N \lhd A_n$。则N包含某个3-轮换（取$x \in N$素数阶，找适当的$g \in A_n$使得$gxg^{-1}x^{-1}$ 为3-轮换）。

对称群

命题

对称群S_n由$(12), c=(1,2,3,\cdots,n)$生成。

命题

对称群S_5可由仍给的对换和5-轮换生成!

hint: S_5可由c以及$(1i)$生成。

例子

能否给出A_4的共轭类？它是否有6阶子群？