近世代数之十七

陈小伍
中国科学技术大学

xwchen@mail.ustc.edu.cn

内容梗概

1. 同态基本定理
2. 正规子群

群同态

1. 考虑群同态$f\colon G \to G'$
2. 像$\mathrm{Im}(f) \leq G'$是子群，故，其上有群结构
3. 等价关系: $a \overset{f}{\sim} b$ 当且仅当$f(ab^{-1}) = 1_{G'}$，也当且仅当$f(b^{-1}a) = 1_{G'}$。

同态的核

定义

同态$f: G \to G'$的核定义为$\mathrm{Ker}(f) = \{h \in G \mid f(h) = 1_{G'}\}$。显然，$\mathrm{Ker}(f) \le G$为子群。

注意：令$N = \mathrm{Ker}(f)$。则$a \overset{f}{\sim} b$ 当且仅当$ab^{-1} \in N$，也当且仅当$b^{-1}a \in N$。故，$Nb = bN$，也就是，N的左右陪集重合!

正规子群

定义

子群$N \leq G$称为**正规子群**，若$aN = Na$，任意$a \in G$。

1. 若G为Abel群，则任何子群均正规。
2. 群G的中心$Z(G)$是正规子群。
3. 同态核是正规子群。

共轭

1. 设$N \leq G$, $a \in G$。其**共轭** $aNa^{-1} = \{axa^{-1} |; x \in N\} \leq G$
2. 存在群同构$N \simeq aNa^{-1}$，但作为子群，通常**不相等**
3. 子群$N \leq G$正规$\Longleftrightarrow \quad N = aNa^{-1}$，任何$a \in G$，即，共轭封闭

例子

$G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2)$。

考虑$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$以及$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$生成的循环子群!

商群

1. 考虑正规子群$N \triangleright G$, 记左陪集集合
$$G/N = \{\bar{a} = aN \mid a \in G\}$$
2. 定义乘法$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab}$. 问题：定义合理性?
3. 典范同态can: $G \to G/N$，核恰为N

群同态基本定理

定理

考虑群同态$f\colon G\to H$。则f唯一诱导群同构

$$\bar{f}\colon G/\mathrm{Ker}(f)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Im}(f),$$

使得下图交换

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[d, two heads, "\mathrm{can}"'] & & H \\ G/\mathrm{Ker}(f) \arrow[rr, dotted, "\bar{f}"] & & \mathrm{Im}(f) \arrow[u, hook, "\mathrm{inc}"'] \end{tikzcd}$$

1. f单当且仅当$\mathrm{Ker}(f)=\{1_G\}$。此时，G同构于H的子群。
2. 若f满，则H同构于G的商群。

例子

例子

考虑$A=(1,1), B=(-1,1), C=(-1,-1), D=(1,-1)$围成的正方形$\square\subseteq\mathbb{R}^2$。则有自然群同态

$$\Sigma(\square)\longrightarrow S(\{A,B,C,D\})$$

例子

考虑$x^3-2\in\mathbb{Q}[x]$的分裂域$E/\mathbb{Q}$，及其根集$X=\mathrm{Root}_E(x^3-2)=\{\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2}\omega,\sqrt[3]{2}\omega^2\}$。则有自然群同态

$$\mathrm{Aut}(E/\mathbb{Q})\longrightarrow S(X)$$

对应定理

定理

考虑$N \lhd G$。则有双射

$$\{K \mid N \leq K \leq G\} \longleftrightarrow \{G/N\text{的子群}\}, K \mapsto K/N$$

我们有：$K \lhd G$当且仅当$K/N \lhd G/N$，此时有自然同构

$$(G/N)/(K/N) \xrightarrow{\sim} G/K.$$

同构定理

定理

设$N \lhd G$，$H \leq G$。则$NH = HN \leq G$，且$(H \cap N) \lhd H$，有自然同构

$$H/(H \cap N) \xrightarrow{\sim} NH/N.$$

注：该定理不是重点！

注：本节，群同态的例子是重点！