

近世代数之二十七

陈小伍
中国科学技术大学

xwchen@mail.ustc.edu.cn

- ① Galois大定理
- ② 例子

定理

设 $\text{char } k = 0$ 以及 $f(x) \in k[x]$ 。则方程 $f(x)$ 根式可解当且仅当 $\text{Gal}_k(f)$ 为可解群。

“仅当”的证明

- ① 考虑 $k \subseteq K \subseteq E$ 使得 $K = (k, f(x))$, E/k 为根式扩张塔且为 Galois 扩张。则 $\text{Gal}_k(f)$ 是 $\text{Gal}(E/k)$ 的商。
- ② 考虑 $k' = (k, x^m - 1)$, 适当“大”的 m 。考虑

$$\begin{array}{ccc} k & \hookrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ k' & \hookrightarrow & E' \end{array}$$

- ③ 从定义, “已知” $\text{Gal}(E'/k')$ 是可解群! 于是, 用可解群的基本事实...

关键引理

引理

设 K/k 为有限维 *Galois* 扩张满足 $\text{Gal}(K/k) = C_p = \langle \sigma \rangle$, p 素数。
设 k 包含 p 次本原单位根。则存在 $\beta \in K$ 使得 $K = k(\beta)$ 且 $\beta^p \in k$ 。

hint: 考虑 k -线性变换 $\sigma: K \rightarrow K$ 关于特征值 ω 的特征向量!

“当”的证明

- ① 设 $K = (k, f(x))$ 以及 $G = \text{Gal}(K/k)$
- ② 若 k 有 $|G|$ 次本原单位根。则 $H \triangleleft G$ 使得 $G/H \simeq C_p$ 。
则 $k \leq K^H \subseteq K$; 归纳即可。
- ③ 添加单位根 $K' = K(\omega)$

$$\begin{array}{ccc} k & \hookrightarrow & K \\ \downarrow & & \downarrow \\ k' & \hookrightarrow & K' \end{array}$$

幸运地是, $\text{Gal}(K'/k') \hookrightarrow G$, 也可解!

例子

例子

考虑 $f(x) = x^5 - 4x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$, 它的根 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_5\}$, 其中 $\alpha_1 = \overline{\alpha_2}$ 为复根。则 $\text{Gal}_{\mathbb{Q}}(f) = S_5$ 。

注: S_5 可由 (12) 以及任何 5-轮换生成。

例子

例子

考虑 $F = k(t_1, \dots, t_n)$ 为有理函数域。则一般方程定义为：

$$f(x) = x^n - t_1 x^{n+1} + t_2 x^2 + \dots + (-1)^n t_n \in F[x]$$

不可约多项式 (why?), 其 *Galois* 群为 S_n (why?)!

注：考虑 S_n 自然作用于 $k(y_1, \dots, y_n)$, 研究其不变子域 (有限群的不变量理论!)。