近世代数之二十六

陈小伍
中国科学技术大学

xwchen@mail.ustc.edu.cn

内容梗概

根式扩张

定义

称E/k为**根式扩张** *of type m*，若$E=k(\alpha)$，且$\alpha^m=a\in k$。形象地，我们记$\alpha=\sqrt[m]{a}$

根式扩张塔是指域扩张的链，使得相邻的域为根式扩张

$$k=E_0\subseteq E_1\subseteq\cdots\subseteq E_n$$

注：E_n从k重复"做开根号"得到!

1. 若E/k为根式扩张 of type m，且k包括m次本原单位根。则$E=(k,x^m-a)$。此时，

$$\mathrm{Gal}(E/k)\hookrightarrow(\mathbb{Z}_m,+),\quad \sigma\mapsto\bar{i}$$

使得$\sigma(\alpha)=\alpha\omega^i$。

根式可解

定义

多项式$f(x) \in k[x]$称为**根式可解**，若存在根式扩张塔

$$k = E_0 \subseteq E_1 \subseteq \cdots \subseteq E_n$$

使得$f(x)$在E_n上分裂，即E_n“包含”$f(x)$的分裂域。

例子

考虑$f(x) = x^2 + bx + c \in \mathbb{C}[x]$。则$k\mathbb{Q}(b, c)$为系数域。考虑$f(x) = (x - r_1)(x - r_2)$的分裂域。

则$k = E_0 \subseteq \mathbb{Q}(r_1, r_2) \subseteq k(\sqrt{b^2 - 4c}) = E_1$。

1. 任何根式扩张塔可扩充成新的根式扩张塔，使得E_n/E_0是Galois。
2. 若$k=E_0$有充分多的单位根，则

$$\mathrm{Gal}(E_n/E_0)\supseteq\mathrm{Gal}(E_n/E_1)\supseteq\mathrm{Gal}(E_n/E_2)\supseteq\cdots$$

相邻为正规子群，其因子（商群）为Abel群。

3. 一般地，设k特征零，我们考虑$k\supseteq k'=(k,x^m-1)$。则

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & E_n \arrow[d, hook] \\ k' \arrow[r, hook] & E'_n \end{tikzcd}$$

则$\mathrm{Gal}(E'_n/k)\supseteq\mathrm{Gal}(E'_n/k')$，其商同构于$\mathrm{Gal}(k'/k)$，为Abel群。

定义

有限群G称为**可解群**，若存在子群链

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_n = \{1\}$$

使得$G_{i+1} \lhd G_i$且因子G_i/G_{i+1}为$Abel$。

例子

1. $Abel$群可解
2. p群可解
3. 若G可解，则其子群H也可解。
4. 设$N \lhd G$。则G可解当且仅当N与G/N同时可解。
5. S_n不可解，$n \geq 5$。

方程的Galois群

回顾：

定义

方程$f(x) \in k[x]$的*Galois*群

$$\mathrm{Gal}_k(f) = \mathrm{Gal}(E/k),$$

其中$E = (k, f(x))$为其分裂域。