近世代数之二十五

陈小伍
中国科学技术大学

xwchen@mail.ustc.edu.cn

内容梗概

1. 本原元定理
2. 代数基本定理

Steinitz定理

定理 (E. Steinitz 1910)

设K/k为有限维扩张。则K/k为单扩张当且仅当K/k中只有有限个中间域。

注：这与Galois理论无关。

“$\Rightarrow$” 设$|k|=\infty$，考虑$k(\alpha+t\alpha)\subseteq K=k(\alpha,\beta)$，$t\in k$

“$\Leftarrow$” 考虑生成元α在中间域E上的最小多项式!

例子

考虑$k=\mathbb{F}_p(x,y)$以及$K=(k,(t^p-x)(t^p-y))$。证明K/k有限维，但不是单的。

定理 (E. Galois)

设K/k为有限维可分扩张。则K/k为单扩张。

考虑$k \subseteq K \subseteq E$使得$E/k$为Galois扩张；利用Galois对应。

代数基本定理

定理

复数域$\mathbb{C}$是代数封闭的。

注：应该称为“数学基本定理”！

1. $K/\mathbb{R}$。则$\dim_{\mathbb{R}} K$不为奇数。
2. $K/\mathbb{C}$。则$\dim_{\mathbb{C}} K \neq 2$

证明

1. 设$f(x) \in \mathbb{C}[x]$不可约。设$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \subseteq K = (\mathbb{C}, f(x))$; $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{R})$
2. 断言：$|G| = 2^?$。（否则，有子群H使得$[G, : H]$为奇数、利用Galois对应）
3. 有$\dim_{\mathbb{C}} K = 2^{?-1}$。考虑$G' = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{C})$。它有子群$H$满足$[G' : H] = 2$（why？）。再用Galois对应！