

近世代数之二十四

陈小伍
中国科学技术大学

xwchen@mail.ustc.edu.cn

- ① 子群格与子域格
- ② 基本定理

- ① 考虑偏序集 $(L, \leq)$
- ② 最小上界 $\vee$, 最大下界 $\wedge$

定义

偏序集 $(L, \leq)$ 称为格, 若最小上界以及最大下界均存在。

例子

- ① 群 G 的子群格 $\text{Sub}(G)$
- ② 考虑域扩张 K/k 。则中间域的格 $\text{Lat}(K/k)$
- ③ $(L, \leq)$ 的反格

同构

引理

设 L, L' 均为格。设 $f: L \rightarrow L'$ 为偏序集同构。则 f 保持 $\vee$ 以及 $\wedge$ 。

例子

设 $n \geq 1$ 。则 $L_n = \{d \mid 1 \leq d \leq n, d|n\}$ 在整除关系下为格。

设 $C_n = \langle g \mid g^n = 1 \rangle$ 为循环群。则有格同构

$$\text{Sub}(C_n) \longrightarrow L_n$$

Galois理论基本定理

定理

设 K/k 为有限维 *Galois* 扩张, $G = \text{Gal}(K/k)$ 。则有格同构

$$\text{Sub}(G) \longrightarrow \text{Lat}(K/k)$$

$$\text{Gal}(K/K^H) = H \longmapsto K^H$$

在此对应中, 我们有 $\dim_k K^H = [G : H]$ 且 $\dim_{K^H} K = |H|$ 。

回顾: 维数公式 $\Leftrightarrow$ Lagrange 定理!

沿用基本定理。则有

- ① 设 $H, U \leq G$ 。则有

$$K^{H \vee U} = K^H \cap K^U, K^{H \cup U} = K^H \vee K^U.$$

- ② 设 B, E 为中间域。则有

$$\text{Gal}(K/B \vee E) = \text{Gal}(K/B) \cap \text{Gal}(K/E)$$

$$\text{Gal}(K/B \cap E) = \text{Gal}(K/B) \vee \text{Gal}(K/E).$$

推论 (续)

- ① 考虑 $\sigma \in G$ 。则 $\text{Gal}(K/\sigma(E)) = \sigma \text{Gal}(K/E) \sigma^{-1}$
- ② 回顾中间域 E 使得 E/k 是 Galois 扩张 $\Leftrightarrow E$ 在 G 上不变。
- ③ 故，中间域 E 使得 E/k 是 Galois 扩张 $\Leftrightarrow \text{Gal}(K/E) \triangleleft G$ 此时：

$$G/\text{Gal}(K/E) \simeq \text{Gal}(E/k)$$

例子

- ① 考虑 $\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p$ 的Galois对应
- ② 考虑 $K/\mathbb{Q}$, 其中 $K = (\mathbb{Q}, x^3 - 2)$
- ③ 考虑 $K/\mathbb{Q}$, 其中 $K = (\mathbb{Q}, (x^2 - 2)(x^2 - 3))$

引理

考虑 $f(x) = h(x)g(x) \in k[x]$ 。考

虑 $K = (k, f(x))$, $B = (k, h(x))$, $C = (k, g(x))$ 。设 $B \cap C = k$ 。则有

$$\text{Gal}(K/k) \simeq \text{Gal}(B/k) \times \text{Gal}(C/k)$$

提示：考虑正规子群 $\text{Gal}(K/B)$ 以及 $\text{Gal}(K/C)$ ，它们“互补”！