近世代数之二十三

陈小伍
中国科学技术大学

xwchen@mail.ustc.edu.cn

内容梗概

1. Galois 群
2. 不变子域
3. Galois 扩张

回顾

考虑域扩张K/k，其Galois群

$$\mathrm{Gal}(K/k) = \mathrm{Aut}(K/k) \leq \mathrm{Aut}(K)$$

引理

设$\dim_k K < \infty$. 则$|\mathrm{Gal}(K/k)| \leq \dim_k K!$ 若$K = (k, f(x))$为可分多项式$f(x) \in k[x]$的分裂域，则等号成立!

想法：插入中间域$k(\alpha)$, 考虑可能的延拓!

考虑子群$G \leq \mathrm{Aut}(K)$，其不变子群

$$K^G = \{a \in K \mid \sigma(a) = a, \text{ 任何}\sigma \in G\} \subseteq K$$

这是子域!

1. $H \leq G$，则$K^G \subseteq K^H \subseteq K$
2. 设K/k，且$G \leq \mathrm{Gal}(K/k)$。则$k \subseteq K^G \subseteq K$
3. $k \subseteq K^{\mathrm{Gal}(K/k)}$
4. $G \leq \mathrm{Gal}(K/K^G)$

定理

设$G \leq \mathrm{Aut}(K)$为有限子群。则有

1. $[K : K^G] = |G|$
2. $G = \mathrm{Gal}(K/K^G)$

证：设$n = |G|$且$k = K^G$。只需证(Artin引理)：$\dim_k K \leq n$。

反设$\{e_1, \cdots, e_{n+1}\} \subseteq K$是$k$-线性无关。考虑$n \times (n+1)$矩阵

$$A = (\sigma(e_1), \cdots, \sigma(e_{n+1}))_{\sigma \in G}$$

考虑解空间$V \subseteq K^{n+1}$：它是G-不变的！

取非零向量$v = (\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1}) \in V$使得非零分量最少(非零分量至少两个，且不能都在$k$中！)。

不妨设$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 \notin k$。取$g \in G$使得$g(\lambda_2) \neq \lambda_2$。则$v - g(v) \in V$，矛盾！

Galois 扩张

考虑有限维扩张K/k, $G = \mathrm{Gal}(K/k)$。已知$k \subseteq K^G$

定理

以下断言等价。

1. $k = K^G$
2. $|G| = \dim_k K$
3. 任何$\alpha \in K$，α的最小多项式无重根，且在K上分裂。
4. $K = (k, f(x))$，$f(x) \in k[x]$可分多项式。

此时，称K/k为**有限Galois 扩张!**

定理证明

1. (1) $\Rightarrow$ (2) 见上定理!
2. (2) $\Rightarrow$ (3) 回到域同态的延拓!
3. (3) $\Rightarrow$ (4) 分裂域的定义
4. (4) $\Rightarrow$ (2) 已知!
5. (2) $\Rightarrow$ (1) 容易证明。

双射

命题 (绝对Galois双射)

存在双射

$$\{\text{有限子群} G \leq \mathrm{Aut}(K)\} \longleftrightarrow \{\text{子域} k \subseteq K \mid K/k \text{ 有限维Galois}\}$$

命题 (相对Galois双射)

设K/k为有限维Galois 扩张。则存在双射

$$\{\mathrm{Gal}(K/k) \text{ 的子群}\} \longleftrightarrow \{K/k \text{ 的中间域}\}$$

注：中间域E，K/E总是Galois。但，

K/k是Galois的当且仅当$\sigma(E) = E$，任何$\sigma \in \mathrm{Gal}(K/k)$。

例子

1. $K/\mathbb{F}_p$有限域!
2. $K = (\mathbb{Q}, x^3 - 2)$
3. $K = (\mathbb{Q}, (x^2 - 2)(x^2 - 3))$
4. 任何有限群$G \leq S_n$作用于$k(t_1, \cdots, t_n)$，故，成为Galois群!