近世代数之十一

陈小伍
中国科学技术大学

xwchen@mail.ustc.edu.cn

内容梗概

1. 代数扩张
2. 维数公式

代数扩张

定义

域扩张K/k称为**代数扩张**，若任何$\alpha \in K$均在k上代数。

引理

有限维域扩张总是代数扩张，即，若$\dim_k K < \infty$，则K/k代数。

维数公式

定理

考虑域扩张链$k \subseteq K \subseteq E$。若$K/k$以及$E/K$为有限维扩张，则$E/k$为有限维扩张。

$$\dim_k E = \dim_k K \cdot \dim_K E.$$

要点（必须掌握）：利用K/k以及E/K的（线性）基构造E/k的基！

难点：E既作为k-线性空间，也作为K-线性空间！

例子

给出$\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})/\mathbb{Q}$以及$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega)/\mathbb{Q}$的基,其中$\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$!

练习：设K/k为有限维扩张, $\alpha \in K$的最小多项式$f(x) \in k[x]$。则$\deg(f) | \dim_k K$!

有限生成代数扩张=有限维扩张

定理

域扩张K/k是有限维的 $\Leftrightarrow$ K/k是有限生成的代数扩张。

要点：有限生成扩张是单扩张的“复合”

命题

考虑$k \subseteq K \subseteq E$。则$E/k$代数 $\Leftrightarrow$ K/k和E/K均代数。

代数闭包

考虑K/k。定义$E=\{\alpha\in K\mid \alpha \text{ 在} k \text{ 上代数}\}$。则$E\subseteq K$为子域，称为$k$ **在K 中的代数闭包**。故，$k\subseteq E\subseteq K$且K/E无代数元。

例子

考虑$\mathbb{Q}\subseteq\bar{\mathbb{Q}}\subseteq\mathbb{C}$，其中$\mathbb{Q}$中元素称为**代数数**。注意：$\bar{\mathbb{Q}}$仍为可数域！

自同构群$\mathrm{Aut}(\bar{\mathbb{Q}})=\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$，$\mathbb{Q}$的**绝对Galois群**，是现代代数数论中的中心研究对象。