高中数学基本观念

拙作

作者：Xuxuayame

组织：双叶数理咖啡厅

时间：April 10, 2022

版本：0.1

illustrator：捨て犬 A

道阻且长，行则将至。行而不辍，未来可期

目录

第一部分

必修

第一章 数学基础

1.1 集合与逻辑初步

1.1.1 集合的基本定义

先来考虑这么一个问题:

假设你是南七中学的一名高一新生, 你在高一一班, 今天是开学第一天, 你会想知道什么?

一般而言, 大家会比较关心: 班上有多少人, 多少男生, 多少女生, 哪个男生最高最帅, 哪个女生最好看, 入学考试排名等等问题. 在这个问题里面, 你关心的对象是你的同班同学. 我们把这些东西抽象一下, 就得到了相关概念:

定义 1.1 (集合与元素)

称研究对象的全体为集合 **(Set)**, 简称为集. 单个的研究对象为元素 **(Element)**. 通常使用大写的拉丁字母如 $A, B, C, \ldots$ 来表示集合, 用小写的拉丁字母 $a, b, c, \ldots.$ 来表示元素. ♣

定义 1.2 (集合的势 I)

集合 A 的势 **(Cardinality)** 指的是集合 A 中元素的个数, 记作 $\mathrm{card}A$. 如果集合有有限个元素, 称为有限集 **(Finite set)**, 反之称为无限集 **(Infinite set)**[a][b].

[a] 对于无限集的势我们暂不讨论, 在后面我们会给出更严谨的定义, 而具体的应用, 你可以去学习选修部分的内容.

[b] 有些同学可能听说过容斥原理或已经知道, 这里我不会介绍它的直观表述, 它的严谨证明会在选修部分留作习题. ♣

这样就得到了最基本的概念. 在上例中, 你的班级的所有同学组成了这个集合, 每一个同学是这个集合里面的一个元素, 如果你们班的集合记为 A, 你们班有 56 个人, 那么 $\mathrm{card}A = 56$. 显然, 你关心你们一班的情况, 隔壁二班同学自然会先去关注二班的情况. 高一一班是一个集合, 高一二班当然也是一个集合, 而这两个集合理所当然是不同的. 你在高一一班, 不在高一二班. 这就牵涉到集合与元素的从属关系:

定义 1.3 (属于)

设有一个集合 A 与一个元素 a, 如果 a 在 A 里面, 我们就称 **a** 属于 **A**, 记作 $a \in A$, 反之, 我们就称 **a** 不属于 **A**, 记作 $a \notin A$. ♣

比如, 把高一一班这个集合记作 A, 高一二班记作 B, 你自己记作 a, 那么根据定义1.3, 我们有 $a \in A, a \notin B$.

当然你可能会考虑到一个问题, 你可以将你们班视作一个集合, 那么你是否能将你们班比较帅的人视作一个集合呢? 答案是不行的, 因为我们要求集合应当是明确的, 毕竟帅这种东西很主观, 不易量化. 你可能又会想, 那能否把你们班比较高的同学视作一个集合呢? 毕竟身高总可以量化吧. 事实上也是不行的, 身高的确可以量化, 但问题在于 “比较高” 是不明确的, 多少是比较高呢, 每个人的标准不一样. 但你可以把你们班身高高于 180cm 的同学视作一个集合, 这就有着明确的描述.

事实上集合有着如下的性质:

定理 1.1 (集合的要素)

所有的集合应当满足如下的性质:

明确性 集合元素的共同特征应当是明确的;

不相容性 集合中不存在相同的元素;

无序性 集合不要求元素的顺序.

♡

明确性的含义我们已经在刚才解释过了, 对于不相容性, 我们规定集合不会出现相同的元素, 比如不会出现一个集合同时包含两个 1 这种情况. 对于无序性, 我们只关心集合里面到底有哪些元素, 不关心这些元素的相对顺序, 比如 $\{1,2,3\}$ 和 $\{2,1,3\}$ 是同一个集合, 它们都由 1,2,3 这三个数字组成. 以此我们有一个推论:

推论 1.1 (集合的无序性)

如果两个集合由完全相同的元素组成, 则两个集合相同.

♡

同时这一推论也告诉了我们两个集合相等的含义——集合的组成元素一致.

在更进一步对集合的阐述之前, 我们先介绍集合的表示方式:

自然语言 也就是用你平时的口语或者书面语来描述一个集合, 比如刚才的 "你们班身高高于 180cm 的同学". 在外面还要套一个花括号, 即 {你们班身高高于 180cm 的同学}.

列举法 也就是在花括号里面将集合中所有的元素穷举出来, 比如刚才的 $\{1,2,3\}$.

描述法 也就是用集合的共同特征来描述这个集合, 如果我们用 x 来代表集合的一般元素, $P(x)$[1]来表示集合的共同特征, 那么集合可以写作 $\{x \mid P(x)\}$.

自然语言和列举法你已经在刚才见到了, 我们稍微举一个描述法的例子: 比如你要形容全体自然数组成的集合, 那么你可以这么说: $\{x|x$ 是自然数$\}$. 描述一个集合时, 哪种方法简便, 我们就选择哪种方法.

对于那些很常见的集合, 我们有专门的记号来表示它们:

表 1.1: 常见集合记号

$\mathbb{N}$	全体自然数[2]集
$\mathbb{Z}$	全体整数集
$\mathbb{Q}$	全体有理数集
$\mathbb{R}$	全体实数集

在右下角加个 "+" 号则往往表示大于零的部分, 比如 $\mathbb{Z}_+$ 表示全体正整数集.

以及一个很常见的记号是:

定义 1.4 (区间与邻域)

我们称:

$$(a,b) := \{x \mid a < x < b\}$$

为从 a 到 b 的开区间 **(Open interval)**, 而

$$[a,b] := \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

[1]这个记号一般用来表述一个和 x 有关的命题, 这一点我们将在后面讲到.

[2]不同资料对自然数的定义不太一致, 有些人认为自然数包含 0, 有些人则不这么认为, 但这并非要紧事, 本书认为自然数包含零.

为从 a 到 b 的闭区间 **(Closed interval)**. 至于

$$(a,b] := \{x \mid a < x \le b\},$$

$$[a,b) := \{x \mid a \le x < b\},$$

则分别称为左开右闭区间, 左闭右开区间. 以上四种集合统称为区间 **(Interval)**, a 称为区间的下端点, b 称为区间的上端点, 我们规定区间的上端点必然大于区间的下端点. 而 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 称为以 a 为中心的 $\varepsilon-$ 邻域 **(Neighborhood)**, 记为 $U(a,\varepsilon)$. 如果邻域去掉中心 a, 则称为去心邻域 **(Deleted neighborhood)**, 记为 $\mathring{U}(a,\varepsilon)$. 更抽象的邻域定义为包含 a 的任意开区间.

♣

当然一个更重要的概念是**空集 (Empty set)**, 记作 $\varnothing$, 它是不包含任何元素的集合, 这一点非常有趣. 就像一个箱子不一定要装东西, 一个集合也不一定要有元素, 这样的集合就是空集. 不过你可能会想, 不装东西的箱子可以各种各样, 那么空集是否也可以各种各样呢? 这一点我们在学习了后面的知识之后将会进行解答.

1.1.2 逻辑基础

在进一步对集合进行介绍之前, 介绍一些逻辑基础对后面的理解是大有裨益的. 虽然这些内容对于初学者而言可能并非一遍就能看懂, 而且贼长, 但希望大家能认真地弄清楚这部分的内容, 因为很重要.

事实上数学是一门符号语言. 我们大量使用符号来表达我们的意思, 想要方便高效地表达, 符号逻辑是十分重要的. 而符号逻辑作用的对象是命题, 命题是什么?

定义 1.5 (命题)

命题 **(Proposition)** 是可判别真伪的陈述句. 也就是说, 每个命题都有相应的真值 **(Truth value)**——"真" 或者 "伪", 不存在其他可能性, 也不存在既真又伪的命题.

♣

比方说 "现在在下雨", "天上有云", "所有的读者都觉得这本书真不错" 就属于命题, 因为它们是可以判定真伪的陈述句; 而 "这是个白球吗? " 就不是命题, 因为它是疑问句. 一个比较经典的例子是 "这句话是伪命题", 这也不是命题, 因为它是不可判断真假性的.

每一个命题都有一个相应的否定, 比如 "现在在下雨" 的否定是 "现在没在下雨", "天上有云" 的否定是 "天上没有云", "所有的读者都觉得这本书真不错" 的否定是" 有读者觉得这本书并没有那么不错"(注意, 而不是 "没有读者觉得这本书不错"). 你会发现一个命题和它的否定是对着干的, 两个命题必然一真一伪. 定义如下:

定义 1.6 (否定)

称命题 B 为命题 A 的否定 **(Negation)**, 如果 A 真时 B 伪, A 伪时 B 真. 记作 $\neg A$.

♣

我们推荐用**真值表**来表示这种关系:

表 1.2: 命题与否定的真值表

A	T	F
$\neg A$	F	T

如果你有两个命题 A 和 B, 那么你可以通过**且 (Conjunction)**$\wedge$ 与**或 (Disjunction)**$\vee$[1]两种操作来得到新的命题:

定义 1.7 (且与或)

命题 $A \wedge B$ 称为 A 且 B 或者 A 合取 B, 若它真仅当 A 和 B 均真, 其它情况下它伪.

命题 $A \vee B$ 称为 A 或 B 或者 A 析取 B, 若它伪仅当 A 和 B 均伪, 其它情况下它真. ♣

比方说 "语文考到优秀分" 且 "数学考到优秀分", 这个命题就是 "语文考到优秀分" 和 "数学考到优秀分 "这两个命题的合取. "语文考到优秀分" 或 "数学考到优秀分" 则是它们的析取. 我们可以用真值表来表示这种关系:

表 1.3: 且与或

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	F

笔记 用我们平常的语言[2]讲, "$A \wedge B$ 对" 指的是 "A 对, 而且 B 对", "$A \vee B$ 对" 指的是"A 对或者 B 对". "而且" 的意思很明确, 但 "或" 的意思就比较模糊. "A 或 B" 有时候指的是 "A, 或者 B, 或者二者兼之", 有时候却指的是 "A, 或者 B, 但并非二者兼具". 而我们往往需要从上下文判断 "或" 是哪种. 比方说下面两个例子:

"我听说南七中学的女生或者长得好看, 或者智商超高. "

"选一个吧, 把没交的作业补起来, 或者平时分打五折. "

前者中, "南七中学的女生" 要么 "长得好看", 要么 "智商超高", 要么 "长得好看" 且 "智商超高", 后者当然是二选一. 而我们逻辑语言中, 逻辑与和我们平时的与含义是相同的, 但逻辑或指的是前者, 即 "要么 A, 要么 B, 要么二者兼之".

我们来稍微回顾一下集合的描述法:

如果 $E(x)$ 是一个关于 x 的命题, 则称 E 为**性质 (Property)**. 而 "x 有性质 E" 的意思是 "$E(x)$ 为真". 考虑一个集合 X, 那么

$$\{x \in X \mid E(x)\}$$

指的是集合 X 中具有性质 E 的元素 x 组成的新的集合[3]. 比方说, X={南七中学的学生}, $E(x)$ 为命题 "x 是女生", 那么 $\{x \in X \mid E(x)\}$ 是南七中学的女生的集合.

在平时使用量词的时候, 有两类常见而重要的情况: "任意" 与 "存在". 在命题中, 我们也经常使用量词, 而这两种量词我们有专门的记号来表示:

[1] 又称为逻辑合取与逻辑析取, 不过一般你看不见这么说的, 如果你想高雅一点, 可以这么说哈哈哈.

[2] 事实上你在中文里并不会强烈地感受到这个差异, 这种区别更多地体现在英文上, 但严谨起见我还是提一下.

[3] 我们将在下一节告诉你这个集合和原集合的关系, 虽然你大概已经看出来了.

定义 1.8 (存在与任意)

我们用 ∃ 来表示存在量词 **(Existential quantifier)**, 它的含义是 "存在 (至少一个)", 若存在唯一一个, 我们写作 ∃!

我们用 ∀ 来表示全称量词 **(Universal quantifier)**, 它的含义是 "所有, 任意". ♣

比方说, 考虑刚才的例子, 下面几个命题:

$$\exists\, x \in X : E(x), \tag{1.1}$$

$$\exists!\, x \in X : E(x), \tag{1.2}$$

$$\forall\, x \in X : E(x), \tag{1.3}$$

的意思是

"南七中学有女生 (南七中学存在同学, 她是女生). "

"南七中学就一个女生 (南七中学存在唯一一个同学, 她是女生). "

"南七中学全是女生 (南七中学所有的同学都是女生/对南七中学任意的同学, 她是女生). "

而命题 (1.3) 也往往写成这样子:

$$E(x), \quad \forall\, x \in X.$$

你可以将它理解为 "$E(x)$ 对 X 中的任意元素 x 均成立", 当然是一个意思. 哦, 老伙计, 我敢打赌, 你之后会经常看见这么写的. 我们也经常把 ∀ 省去了, 简写为:

$$E(x), \quad x \in X.$$

对于含有 "∃" 和 "∀" 的命题, 写出它的否定就变成了一件十分机械化的事情, 事实上你只需要把这两个符号相互交换一下, 别动它们的顺序, 再把性质取个否定, 就可以了. 具体你可以见习题 2, 做完你就明白了.

再介绍一个我们会经常用到的记号:":=", 它的意思是 "定义为, 代表". 比如说 $a := b$, 意味着 a 由 b 定义, 也可以说 a 是 b 的新名字, a 代表 b. 理所当然 a 和 b 是相等的, 所以 a 和 b 只是同一对象的不同表示方式罢了.

现在我们再来考虑两个命题之间的关系:

定义 1.9 (推出)

设 A 和 B 为命题, 则可以定义一个新的命题: 蕴含 **(Implication)**$A \Rightarrow B$[a]如下:

$$(A \Rightarrow B) := (\neg A) \vee B.$$

[a]更常见的说法是 A 推出 B. ♣

因此 $A \Rightarrow B$ 伪仅当 A 真 B 伪, 其他情况下均是真[4], 你可以试试画一下真值表. 这也意味着一个真命题不可以推出伪命题, 但伪命题可以推出任何命题——不管是真还是伪.

事实上你最常看见的一类命题会长成这样子:

"若 A, 则 B. "

[4]尽管在此之前我推测你应当没有考虑过把一个伪命题作为条件的情况, 这听起来似乎有些怪异.

而它也就是 $A \Rightarrow B$ 的文字版本. 我们也经常说 "要证明 B, 只需证明 A", 或者 "B 对于 A 真来讲是必要的". 换句话说, 我们有下面的称呼:

定义 1.10 (充分与必要)

若 $A \Rightarrow B$, 称 A 是 B 的充分条件 **(Sufficient condition)**, B 是 A 的必要条件 **(Necessary condition)**. ♣

而基于此定义, 我们有如下定义:

定义 1.11 (等价)

A 和 B 的等价 **(Equivalence)**$A \Leftrightarrow B$ 定义为:

$$(A \Leftrightarrow B) := (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A).$$

这里 $B \Rightarrow A$ 称为 $A \Rightarrow B$ 的逆命题 **(Converse)** ♣

故命题 A 和 B 等价意味着 $A \Rightarrow B$ 和其逆 $B \Rightarrow A$ 均真, 或者说 A 是 B 的**充分必要 (Necessary and sufficient)** 条件, 简称**充要条件**. 另一个很常见的说法是 A 真**当且仅当 (If and only if, Iff)**B 真.

有一个小记号要提一下: ":⇔", 它的含义是 "定义等价于".

根据我们的定义, 我们有如下基本推论:

推论 1.2 (逆否命题)

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A).$$

♡

命题 $\neg B \Rightarrow \neg A$ 称为 $A \Rightarrow B$ 的**逆否命题 (Contrapositive)**

举个例子, 相信大家记得西游记有这么一段话:

> 四天师即引行者至披香殿里看时, 见有一座米山, 约有十丈高下; 一座面山, 约有二十丈高下. 米山边有一只拳大之鸡, 在那里紧一嘴, 慢一嘴, 含那米吃. 面山边有一只金毛哈巴狗儿, 在那里长一舌, 短一舌, 结那面吃. 左边悬一座铁架子, 架上挂一把金锁, 约有一尺三四寸长短, 锁梃有指头粗细, 下面有一盏明灯, 灯焰儿燎着那锁梃. 行者不知其意, 回头问天师曰:"此何意也?" 天师道:"那厮触犯了上天, 玉帝立此三事, 直等鸡含了米尽, 狗舔得面尽, 灯焰燎断锁梃, 那方才该下雨哩.

如果 A 是命题 "鸡含了米尽, 狗舔得面尽, 灯焰燎断锁梃"[5], B 是 "下雨". 那么 $B \Rightarrow A$ 是 "若下雨, 则鸡含了米尽, 狗舔得面尽, 灯焰燎断锁梃", 它的逆否命题是 "若鸡未含了米尽, 狗未舔得面尽, 灯焰未燎断锁梃, 则雨未下也". 但要注意的是, $A \Rightarrow B$ 的真值和它的否命题 $\neg A \Rightarrow \neg B$ 没有绝对的关系, 比如 "天上有云" 可以推出 "天要下雨", 但天上没有云, 雨也可以下. 这一点要小心.

再一点就是, 我们不可能在这里列举过多的例子, 对于这一部分的理解, 最好结合你在后面的学习, 所以你第一遍不需要学得很懂, 只需要知道基本概念, 后面的知识就是最好的例子.

关于这部分对于逻辑的讲述, 其实并不是非常严谨, 我们并没有指出陈述语句是什么, 也没有告诉你如何去判断一个命题的真伪. 难处在于我们的日常语言, 就像大多数语言一样, 包含着大量模糊的句子. 想要学习更系统而具体严谨的知识, 我推荐你去阅读数理逻辑的相关资料, 当然那也就与我们的内容相差甚远, 所以我们逻辑在这里点到即止.

[5]其实原来的例子只是天上有云, 但我突发奇想整了个活, 希望你开心.

1.1.3 集合间的关系与运算

现在我们以熟悉的例子作为开头, 对集合作进一步讨论:

假设你是南七中学高一一班的学生, 你现在比较关心你们班的男女组成, 你根据之前学过的关于集合的知识, 你构造了三个集合: A={你们班的同学}, B={你们班的男生}, C={你们班的女生}. 自然而然, 你打算考虑这三个集合间的关系.

先来个简单点的, 请问 A 和 B 有什么关系? 显然, 你会发现, B 中的元素都是 A 中的元素, 毕竟, 如果你是一班的男生, 你首先得是一班的人. 这样一种关系, 就是集合间的包含关系:

定义 1.12 (子集)

集合 B 称为集合 A 的子集 **(Subset)**, 记作 $B \subseteq A$, 或 $A \supseteq B$, 若 $x \in B \Rightarrow x \in A$, 也称 A 包含 B, 或 B 含于 A. ♣

还记得1.1吗? 我们现在可以用子集的语言重新写一下, 这也是我们一般证明两个集合相等的方式:

$$X = Y :\Leftrightarrow (X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X)$$

事实上这正是我们定义集合相等的方式.

容易发现子集满足以下性质:

反身性 (Reflexivity) $X \subseteq X$;

传递性 (Transitivity) $(X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq Z) \Rightarrow (X \subseteq Z)$.

证明留作习题.

我们继续看那个例子, 如果你们班不至于惨到一个女生都没有, 那么 B 和 A 此时应当是不等的. 我们称 B 为 A 的**真子集 (Proper subset)**, 记作 $B \subset A$ 或者 $A \supset B$, 也称 A 真包含 B 或 B 真含于 A.

容易验证, 空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集, 任何集合是它自己的子集, 这两种集合称为**平凡子集 (Trivial subset)**.

注 事实上通过子集我们也可以构造新的集合——幂集 **(Power set)**, 若 X 为集合, 它的幂集记为 $\mathcal{P}(X)$, 定义为:

$$\mathcal{P}(X) := \{Y \mid Y \subseteq X\}.$$

也就是说, 幂集是子集构成的集合. 我们也经常将幂集写成 2^X, 这是因为 $\operatorname{card}\mathcal{P}(X) = 2^{\operatorname{card}X}$, 你可以试着去证明这件事情, 并从这个事实出发来得到 X 的非空子集数, 真子集数, 非空真子集数.

以及你可以验证一下下面的事实, 就当做练习了:

$$\varnothing \in \mathcal{P}(X), \quad X \in \mathcal{P}(X),$$
$$x \in X \Leftrightarrow \{x\} \in \mathcal{P}(X),$$
$$Y \subseteq X \Leftrightarrow Y \in \mathcal{P}(X).$$

特别地, $\mathcal{P}(X)$ 是非空的.

集合间的关系基本如此, 集合间的运算呢?

不妨想象, 如果有两个集合, 我们如何产生新的集合? 一般而言, 有以下四种常见组合方式:

1. 把两个集合塞到一块去, 组成一个新的集合;
2. 把两个集合的共同部分取出来;
3. 从一个集合中挖掉相同部分;

4. 从两个集合中各随意挑出一个元素, 按顺序放在一起.

这是它们的数学表述:

定义 1.13 (集合的运算)

设 A 和 B 为 X 子集, 则

$$A \setminus B := \{x \in X \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\} \tag{1.4}$$

称为 B 在 A 中的差集/相对补集 **(Complement)**, 也常记为 $A - B$, 若 A 容易从上下文得知, 也可记为 B^C

如果事先规定全集 U[a], 那么 A 在 U 中的相对补集称为 A 的绝对补集, 简称补集, 我国规定记为 $\complement_U A$

集合:

$$A \cap B := \{x \in X \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\} \tag{1.5}$$

称为 A 与 B 的交集 **(Intersection)**, 若 $A \bigcap B = \varnothing$, 即, A 和 B 毫无共同元素, 我们称 A 和 B 是不交的 **(Disjoint)**.

$$A \cup B := \{x \in X \mid (x \in A) \vee (x \in B)\} \tag{1.6}$$

称为 A 与 B 的并集 **(Union)**.

[a]你可以简单地理解成研究对象的全体, 挺全的那种.

♣

定义 1.14 (Cartesian 积 I)

设 A,B 两个集合, 定义 A 与 B 的笛卡尔积 **(Cartesian product)** 为:

$$A \times B := \{(a, b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\} \tag{1.7}$$

也就是 A 中元素与 B 中元素组成的所有有序对 **(Orded pair)** 的集合. 这里 a 与 b 称为有序对 (a, b) 的分量 **(Component)**, a 是第一个分量, b 是第二个分量[a].

[a]对于一个 n 元有序对 x, 我们也称第 i 个分量为 x 的第 i 个**投影 (Projection)**, 记为 $\mathrm{Pr}_i(x)$, 比如刚才的 $x = (a, b)$, $\mathrm{Pr}_1(x) = a, \mathrm{Pr}_2(x) = b$.

♣

注 事实上我们还没有说明什么是有序对. 字面上理解就是有顺序的元素对, 但这未免有些模糊. 事实上我们可以选择利用集合来定义:

$$(a, b) := \{a, \{a, b\}\}$$

一方面我们利用 $\{a, b\}$ 来表示有序对的元素, 另一方面我们拿出来一个 a 来表征这个有序对的顺序. 比如 $(b, a) := \{b, \{a, b\}\}$, 自然就有 $(a, b) \neq (b, a)$. 你可以思考一下对于多元有序对, 我们如何给出类似的定义.

显然, 刚才的组合方式里面, 1 对应着并集, 2 对应着交集, 3 对应着差集, 4 对应着笛卡尔积. 比方说, 你发现 $A = B \cup C$, 也就是你们班的同学 = 你们班的男生 + 你们班的女生. 而且你容易发现 B 和 C 是不交的, 即 $B \cap C = \varnothing$, 所以 $A = B \sqcup C$, 而 $A \setminus B = C, A \setminus C = B$, 这也是容易发现的. 而对于笛卡尔积, 我稍微举一个例子让大家明白这个有序对是怎么回事:

$A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b\}$.

$A \times B = \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$.

现在我要向你介绍一个好东西——**韦恩图 (Venn diagram)**, 每一个集合都表示为平面上被闭曲线包围的区域, 它可以清晰地向你展示几个集合间的关系:

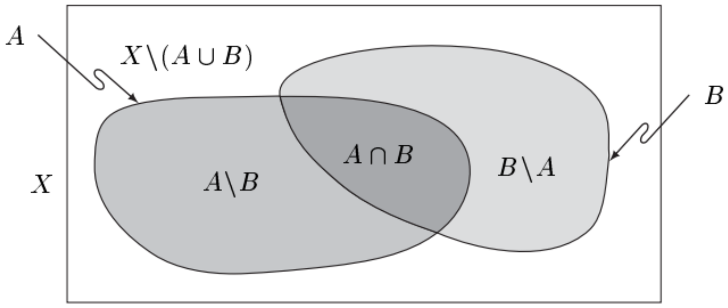


图 1.1: Venn 图

如你所见, 深色部分就是交集, 浅色部分是差集, 有色部分是并集, 无色部分是补集, 这非常直观, 非常好.

比如说你可以试着证明下面的关于交集, 并集和补集的性质:

命题 1.1 (集合的运算律)

设 X,Y,Z 为全集 U 的子集, 则

1. 交换律 (Commutativity):$X\cup Y=Y\cup X,\quad X\cap Y=Y\cap X$;
2. 结合律 (Associativity):$X\cup(Y\cup Z)=(X\cup Y)\cup Z,\quad X\cap(Y\cap Z)=(X\cap Y)\cap Z$;
3. 分配律 (Distributivity):$X\cup(Y\cap Z)=(X\cup Y)\cap(X\cup Z)$,
   $X\cap(Y\cup Z)=(X\cap Y)\cup(X\cap Z)$;
4. $X\subseteq Y\Leftrightarrow X\cup Y=Y\Leftrightarrow X\cap Y=X$;
5. 德摩根反演律 (De Morgan's laws):$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C,\quad (A\cap B)^C=A^C\cup B^C$. ♠

当然, 这些性质也是需要掌握的. 证明我们也会留作习题.

当然, 对于笛卡尔积, 我们也是有图像来帮助理解的:

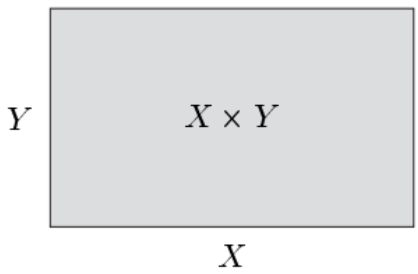


图 1.2: Cartesian 积

把两个集合作为边, 笛卡尔积是那个矩形, 当然, 如果集合都是有限点集的话, 你也可以认为笛卡尔积是一个平面点阵.

不过要注意的是, 图形不能作为证明的依据, 它只能一定程度上帮你理清楚集合间的关系, 不过这往往对你的证明会起到指示性的作用.

我在这里丢一个命题以及它的证明, 你可以体会一下:

命题 1.2

设 X 和 Y 为集合, 则

1. $X \times Y = \varnothing \Leftrightarrow (X = \varnothing) \vee (Y = \varnothing)$;
2. 一般来讲: $X \times Y \neq Y \times X$.

我们仅在这里给出 1 的证明, 关于 2 的细节, 你可以见习题 7.

证明 我们要证明两个命题, 也就是:

$$X \times Y = \varnothing \Rightarrow (X = \varnothing) \vee (Y = \varnothing),$$

和它的逆, 或者说证明 $X \times Y = \varnothing$ 是 $(X = \varnothing) \vee (Y = \varnothing)$ 的充分必要条件. 我们用 "$\Rightarrow$" 和 "$\Leftarrow$" 来标记我们在证明哪个命题.

"$\Rightarrow$": 我们用反证法来证明, 若 $X \times Y = \varnothing$ 真, 但 $(X = \varnothing) \vee (Y = \varnothing)$ 伪. 那么 $(X \neq \varnothing) \wedge (Y \neq \varnothing)$ 为真, 故 $X \neq \varnothing$ 和 $Y \neq \varnothing$ 均为真, 也就是说 $\exists\, x, y, \quad x \in X, y \in Y$, 根据定义 $(x, y) \in X \times Y$, 这与 $X \times Y = \varnothing$ 矛盾, 故 $(X = \varnothing) \vee (Y = \varnothing)$ 真, 从而 $LHS \Rightarrow RHS$[6].

"$\Leftarrow$": 我们证明它的逆否命题为真, 即

$$X \times Y \neq \varnothing \Rightarrow (X \neq \varnothing) \wedge (Y \neq \varnothing).$$

若 $X \times Y \neq \varnothing$, 即 $\exists\, (x, y), (x, y) \in X \times Y$, 从而 $x \in X, y \in Y$, 这就表明 $X \neq \varnothing, Y \neq \varnothing$, 从而 $(X \neq \varnothing) \wedge (Y \neq \varnothing)$ 为真, 故 $RHS \Rightarrow LHS$.

从而原命题成立.

当然, 既然能考虑两个集合间的运算, 我们理所当然也会考虑拓展到多个集合间的运算:

先来介绍比较简单的笛卡尔积, 关于并集和交集, 我们花更多的篇幅去讨论.

定义 1.15 (Cartesian 积 II)

对于 n 个集合 $X_1, X_2, \cdots, X_n$, 它们的笛卡尔积定义为:

$$X_1 \times \cdots \times X_n := \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_i \in X_i, \forall\, i = 1, \cdots, n\},$$

这里 x_i 称为 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 的第 i 个分量, 也记作 $\mathrm{Pr}_i(x)$, 即 x 的第 i 个投影.

我们也经常将 $X_1 \times \cdots \times X_n$ 写作

$$\prod_{i=1}^{n} X_i.$$

那个长得跟门一样的符号是求积符号, 关于求和和求积的知识我们在后面会讲 (指 1.5 节). 如果所有的 X_i 都一样, 即, X_i, $i = 1, \cdots, n$, 笛卡尔积也常常写成 X^n. 比方说一个 n 元有序实数对 $(x_1, \cdots, x_n)$, 它就是 $\mathbb{R}^n$ 中的元素.

现在我们来谈谈交集与补集:

定义 1.16 (集族与指标集)

设 I 是一个非空集合, 且对任意 $i \in I$, A_i 是一个集合, 那么你可以这么说

$$\{A_i \mid i \in I\}$$

[6] LHS, 即 Left hand side, 指式子左边; RHS, 即 Right hand side, 指式子右边.

称为集族 **(Family of sets)**, I 称为这个这个集族的指标集 **(Index set)**. ♣

这里有几点关于这个定义的说明:

1. 我们并不要求 $i \neq j$ 时有 $A_i \neq A_j$, 集族中的元素是允许重复的[7];
2. 我们不要求 A_i 是非空的, 不过集族当然是非空的;
3. i 不一定是个数字, 虽然你在之后最先接触到的指标集大多都是数集.

有了这样的定义, 我们就可以自然地定义若干个集合的并与交:

定义 1.17 (集族的交和并)

设 X 为集合, $\mathcal{A} := \{A_i \mid i \in I\}$ 为 X 的一个子集族[a]. 我们分别定义这个集族的交和并为:

$$\bigcap_i A_i := \{x \in X \mid \forall\, i \in I, x \in A_i\},$$

与

$$\bigcup_i A_i := \{x \in X \mid \exists\, i \in I, x \in A_i\}.$$

[a]顾名思义, 这个集族里面的元素都是 X 的子集.

♣

显然, 子集族的并与交也是 X 的子集. 此外, 关于记号的事情, 我们也经常写成 $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ 和 $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$, $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$ 和 $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$. 如果 $\mathcal{A}$ 为有限集族, 那么这些集合可以用有限多个自然数来标记, 指标集 $I = \{0, 1, \cdots, n\}$, 我们也经常写为下面两个形式:

$$\bigcap_{i=0}^{n} A_i, \qquad \bigcup_{i=0}^{n} A_i,$$

与

$$A_0 \cap \cdots \cap A_n, \qquad A_0 \cup \cdots \cup A_n.$$

此时我们可以去拓展一下命题1.1的那些性质:

命题 1.3 (集族的运算律)

设 $\{A_i \mid i \in I\}$ 和 $\{B_j \mid j \in J\}$ 为集合 X 的子集族, 那么:

1. 结合律:
   - $(\bigcap_i A_i) \cap (\bigcap_j B_j) = \bigcap_{(i,j)} A_i \cap B_j$;
   - $(\bigcup_i A_i) \cup (\bigcup_j B_j) = \bigcup_{(i,j)} A_i \cup B_j$;
2. 分配律:
   - $(\bigcap_i A_i) \cup (\bigcap_j B_j) = \bigcap_{(i,j)} A_i \cup B_j$;
   - $(\bigcup_i A_i) \cap (\bigcup_j B_j) = \bigcup_{(i,j)} A_i \cap B_j$;
3. 德摩根反演律:
   - $(\bigcap_i A_i)^C = \bigcup_i A_i^C$;
   - $(\bigcup_i A_i)^C = \bigcap_i A_i^C$.

这里 (i, j) 遍历指标集 $I \times J$. ♠

[7]这一点看起来与集合的不相容性相悖, 事实上集族的确不一定是个集合, 不过我们不会在这一点上作更深的讨论, 感兴趣的话可以去阅读集合论的相关书籍.

证明类似, 留作习题, 你感兴趣可以试试.

笔记 你可能会注意到, 比起这两小节来讲, 第一小节关于集合的描述似乎有点模糊得令人吃惊, 的确, 我们没有很严谨地定义 "集合" 和 "元素" 这两个概念, 事实上, 这两个概念在数学上也是未定义的. 我们往往把它们视作公理 **(Axiom)**, 即那些不证自明的法则. 关于更加细致和严谨的讨论, 你们应当去学习更加高等的课程, 阅读更加深入的书籍资料. 但我们在这里要强调的是, 关于集合和元素到底是什么的问题并不重要, 我们更关心的是如何去处理这些概念.

在本节的最后, 我们介绍一个关于集合的概念.

定义 1.18 (分拆)

设 X 为集合, $\mathcal{A} := \{A_i \mid i \in I\}$ 为 X 的一个子集族, 若

$$\bigcup_i A_i = X,$$

且对 $\forall\, i, j \in I$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, 即子集族元素两两不交.

则称 $\mathcal{A}$ 为 X 的一个分拆 **(Partition)**.

说明白点, 分拆就是把一个集合分成几部分, 就像你可以把一个蛋糕切成几块, 你可以把一个班按男生, 女生分类, 你当然也可以把一个集合给它分成几部分, 这也是很自然的事情.

以及在此种条件下, 一个分拆对应的子集族的并, 称为**不交并 (Disjoint union)**[8], 记为 $\bigsqcup_{i\in I} A_i$, 正如其名, 这些集合两两是不交的.

1.2 映射

1.2.1 映射的基本概念

在介绍了基本的集合概念与集合的相关运算后, 我们转而关心集合的对应关系. 集合在生活中到处都是, 我们往往在意两个集合间是如何对应起来的, 这就要提到本节的概念———映射:

定义 1.19 (映射)

一个从集合 X 到集合 Y 的映射 **(Map)** 是一种对应法则, 使得对每一个 X 中的元素, 对应着唯一确定的 Y 中元素, 我们写作:

$$f\colon X \to Y, \quad x \mapsto f(x).$$

[a] $f(x) \in Y$ 称为 f 在 x 处的值 **(Value)**, 集合 X 称为 f 的定义域 **(Domain)**, 记为 $\mathrm{dom}(f)$, Y 称为 f 的到达域/陪域 **(Codomain)**. 而

$$\mathrm{Im}(f), \mathrm{Ran}(f) := \{y \in Y \mid \exists\, x \in X, y = f(x)\}$$

称为 f 的像集 **(Image)** 或值域 **(Range)**. 而

$$\mathrm{graph}(f) := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$$

称为 f 的图像 **(Graph)**.

[a] 也经常简写为 $f : X \to Y$.

[8] 事实上不交并还有另外一层含义, 考虑一个子集族 $\mathcal{A}$, 那么我们称 $\{(x, i) \mid x \in A_i\}$ 为这个子集族的不交并, 这样你会发现, 即使子集间互相有重叠, 我们也可以分辨出那些重叠的元素来自哪个子集, 因为 i 起到了指示作用.

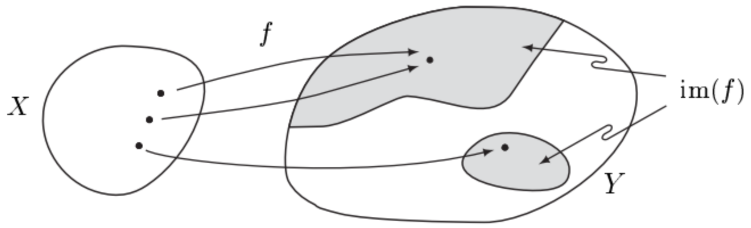


图 1.3: 映射

笔记 值得一提的是, $\to$ 箭头用于集合之间, $\mapsto$ 箭头用于元素之间, 这两者不应混淆.

你应当注意到 $\mathrm{Im}(f)$ 一般都是 Y 的子集, 而 $\mathrm{graph}(f)$ 一般都是 $X \times Y$ 的子集, 然而在图 1.4 中, G 可以是从 X 到 Y 的一个映射的图像, 但 H 不可以, 因为一个 x 可能对应了多个 y, 有的 x 却没有对应任何 y:

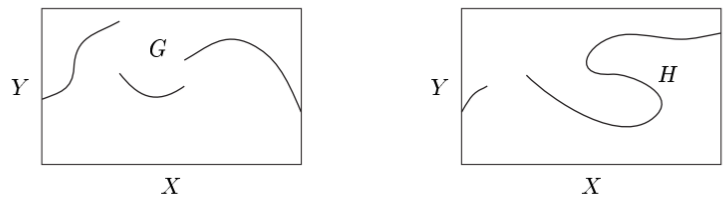


图 1.4: 映射的图像

注 事实上, 如果我先给你这个图, 也就是说, 我先给你一个 $X \times Y$ 的子集 G, 使得它具有性质 "对 $\forall\, x \in X, \exists!\, y \in Y \text{ s.t. } (x, y) \in G$[9]", 那么我们也可以定义一个映射:

$$f\colon X \to Y, \quad x \mapsto f(x) \text{ s.t. } (x, f(x)) \in G.$$

显然, 这个映射是良定义的 **(Well-defined)**, 也就是说, 每一个 $x \in X$ 都真真切切地有 Y 中的唯一的元素与其对应. 显然, $\mathrm{graph}(f) = G$, 于是你意识到, 映射的对应法则与映射的图像其实是息息相关, 互相确定的. [10]因此这启发我们去换一种方式来定义映射:

> 一个映射是一个有序三元组 (X, G, Y), 这里 $G \subseteq X \times Y$ 满足对任意 $x \in X$, 存在唯一的 $y \in Y$ 使得 $(x, y) \in G$.

这种定义方式就避开了有用但是不太明确的词 "法则", 而且也只用了我们集合论中的概念.

映射这个概念其实也比较易于理解. 你当然也可以顾名思义去理解它. 就好比我站在阳光下, 阳光将我的身影拓在地上, 我的向阳面就是定义域, 地面就是到达域, 影子就是值域或者像集, 而阳光就是这个映射, 它将我身上的点映射到了地面上, 于是我的影子就依赖于这种对应关系而形成.

当然, 我们更关心数学中的映射, 比如数集间的映射:

例题 1.1

1. $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto n^2$, 即将每个自然数对应到它的平方;
2. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x_2^2$, 即将实平面上的点对应到它到原点的距离的平方;

[9] s.t. 是使得的意思, 这个记号也经常使用.

[10] 用我们等下要学的话讲, 叫一一对应.

3. $f\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{N}_+ \to \mathbb{Q}, \quad (q,p)\mapsto \frac{q}{p}$, 即将一个整数组对应到以它们为分子分母的分数.

当然啦, 如果 f 是一个从 X 到 Y 的映射, 那么对于 X 中的元素, Y 会有相应的元素, 如果我们取 X 的一个子集, 也应当有 Y 的一个子集与其对应. 即:

定义 1.20 (像与原像)

设 $f: X\to Y$ 为映射, $A\subseteq X, B\subseteq Y$, 则

$$f(A) := \{f(x) \mid x\in A\}$$

称为 A 在 f 下的像 **(Image)**.

$$f^{-1}(B) := \{x\in X \mid f(x)\in B\}$$

称为 B 在 f 下的原像 **(Preimage)**. ♣

你可以参考这个图:

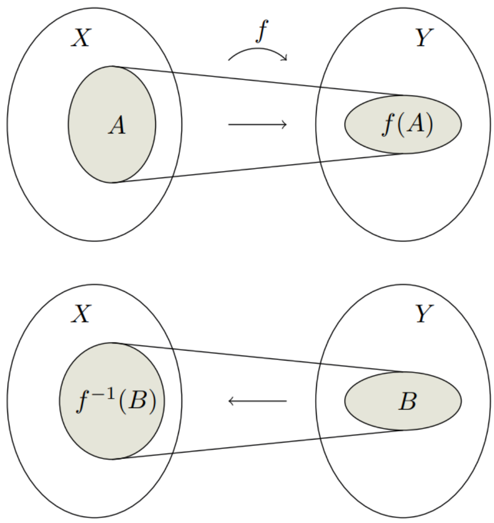


图 1.5: 像与原像

当然, 原像集可以是空的, 如果 X 中没有元素映射到 B 中的话, 比如例 1.1 中的 1, 显然 $f^{-1}(\{2\}) = \varnothing$, 毕竟 2 不是完全平方数.

如果我们只考虑 Y 中一个单元素集的对应情况的话, 我们有如下定义:

定义 1.21 (纤维)

对 $\forall\, y\in Y$, 集合

$$f^{-1}(\{y\}) := \{x\in X \mid f(x) = y\}$$

称为 f 的一根纤维 **(Fiber)**. ♣

比如刚才的 $f^{-1}(\{2\})$ 就是 f 的一根纤维. 事实上, 纤维就是方程 $f(x)=y$ 的解集.

我们来举一点例子来说明一些细节, 顺便帮你熟悉一下这些概念.

例题 1.2

1. 注意到之前我并没有告诉你们如果 X 或者 Y 是空集的情况下, 这个映射会怎么样. 如果 $X=\varnothing$, 则也存在唯一的映射: **空映射 (Empty map)**:$\varnothing: \varnothing\to Y$, 为什么说它唯一呢? 因为它的图像 $G\subseteq$

$\varnothing \times Y = \varnothing$, 而空集的子集是唯一的, 也是空集. 如果 $Y = \varnothing$ 但 $X \neq \varnothing$, 则这个映射不存在.

2. 我们说两个映射 $f\colon X \to Y$ 与 $g\colon U \to V$ 相等, 记为 $f = g$, 指的是:

$$X = U,\ Y = V \quad \text{且} \quad f(x) = g(x),\ x \in X.$$

也就是说, 两个映射相等, 当且仅当它们的定义域, 到达域与法则均一致. 一旦有一个不一致, 那么两个映射就不同.

例题 1.3

1. 映射 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ 称为 (X 的) **恒等映射 (Identity map)**, 若 X 在上下文中不言自明, 也可以省略不写, 记为 id.
2. 若 $X \subseteq Y$, 则 $i\colon X \to Y,\quad x \mapsto x$ 称为 X 到 Y 的**包含映射 (Inclusion map)/嵌入 (Embedding)**. 我们通常使用弯钩箭头来表示嵌入: $i\colon X \hookrightarrow Y$. 值得一提的是, $i = \mathrm{id}_X \Leftrightarrow X = Y$
3. 若 X 和 Y 均非空, $b \in Y$, 那么 $f\colon X \to Y,\quad x \mapsto b$ 称为**常值映射 (Constant map)**[11]
4. 若 $f: X \to Y$, $A \subseteq X$, 那么 $f|_A\colon A \to Y,\quad x \mapsto f(x)$ 称为映射 f 对 A 的**限制 (Restriction)**.
5. 设 $A \subseteq X$, $g\colon A \to Y$, 则任意一个映射 $f: X \to Y$ 使得 $f|_A = g$ 称为 g 的**扩张 (Extension)**, 记为 $f \supseteq g$[12]. 比方说, 对于 2 的例子, $\mathrm{id}_Y \supseteq i$.
6. 设 $X \neq \varnothing$, $A \subseteq X$, 则 A 的**示性映射/特征映射 (Characteristic map)** 指的是:
$$\chi_A\colon X \to \{0,1\},\quad x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in A^C \end{cases}$$
7. 若 $X_1, \cdots, X_n$ 为非空集合, 则你之前学过的投影:
$$\mathrm{Pr}_k\colon \prod_{i=1}^{n} X_i \to X_k,\quad x = (x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_k,\quad k = 1, \cdots, n$$
也是一个映射.

1.2.2 映射的复合

就像我们对集合做过的一样, 在介绍完基本概念之后, 我们再来考虑它的性质与运算. 这里我们先介绍运算.

定义 1.22 (映射的复合)

设有两个映射 $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to V$, 我们定义一个新的映射 $g \circ f$, 称为 f 与 g 的复合映射 **(Composition map)**:
$$g \circ f\colon X \to V,\quad x \mapsto g(f(x)). \tag{1.8}$$
♣

我们把图 1.3 扩充一下就得到复合映射的过程:

而实际上效果就是图 1.7 左下角的映射, 它是另外两个映射的综合效果:

复合映射无非就是你两步并为一步走, 把两个箭头干脆直接用一根箭头代替, 从而更加简便.

当然, 我们也可以去考虑多个映射的复合, 先看看这个命题:

[11] 事实上你更多地看到这个映射称为常值函数, 但还没有讲到函数, 所以暂且继续沿用映射的叫法.

[12] 你可能觉得集合的记号用在这里有点怪怪的, 但从上面的注来看, 这是十分自然的一件事情.

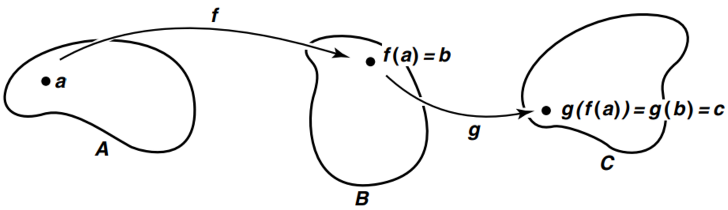


图 1.6: 复合映射的过程

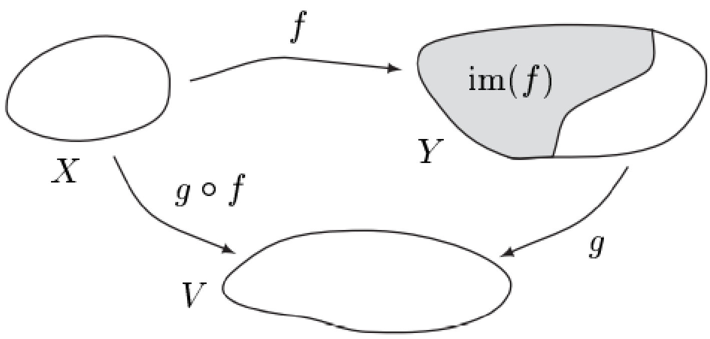


图 1.7: 复合映射

命题 1.4 (复合映射的结合律)

设 $f\colon X\to Y$, $g\colon Y\to U$, $h\colon U\to V$, 那么映射 $(h\circ g)\circ f\colon X\to V$ 与 $h\circ(g\circ f)\colon X\to V$ 均是良定义的, 且

$$(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f). \tag{1.9}$$

即满足复合的结合律. ♠

这应当是显然的, 但要提醒的是, 映射的良定义是应当被验证的, 毕竟你给出了一个构造, 它是否真的是一个映射还是得验证一下, 不是想当然的. 有了这个命题, 我们知道, $(h\circ g)\circ f$ 和 $h\circ(g\circ f)$ 其实是一个东西, 所以我们干脆直接简写为 $h\circ g\circ f$. 当然, 对于更多的映射也是一样, 可以归纳地证明结合律.

1.2.3 满射, 单射, 双射与逆映射

然后是映射的性质:

定义 1.23 (单射, 满射与双射)

设 $f\colon X\to Y$ 为映射, 那么称 f 为满射 **(Surjective)**, 若

$$\operatorname{im}(f)=Y. \tag{1.10}$$

称 f 为单射 **(Injective)**, 若

$$f(x)=f(y)\Rightarrow x=y,\quad \forall x,y\in X. \tag{1.11}$$

称 f 为双射 **(Bijective)**, 若 f 既是单射又是满射. ♣

这个定义可以类比理解，比方说你在打靶，你的弹药是定义域，所有靶子是到达域，你的射击就是对应法则，假设你所有子弹都达到靶子上了，那么满射指的是你的每一个靶子都被子弹击中过，单射指的是你不同的子弹打到了不同的靶子上，双射就是不同子弹打不同靶子，而且靶子全都被打了，也就是说，靶子和子弹存在**一一对应 (One-to-one correspondence)**.

满射，单射，双射的图像如下：

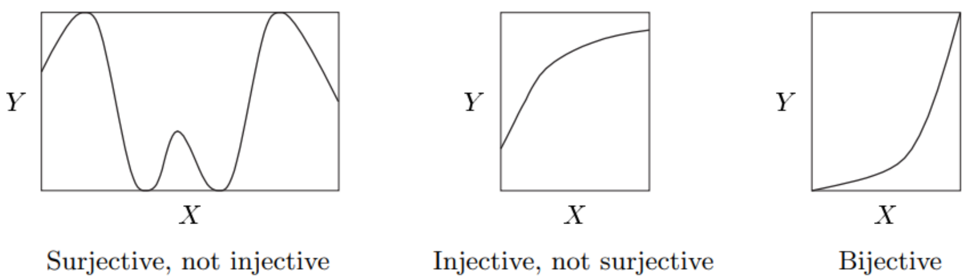


图 1.8: 满射，单射与双射的图像示例

第一幅是个满射，但不是单射；第二幅图是个单射，但不是满射；第三幅图是个双射. 大家可以想想怎么回事.

笔记 事实上，如果 X 和 Y 之间存在双射，那么 X 和 Y 应当是一一对应的，这说明 X 和 Y 的元素个数应当一致，也就是说 X 和 Y 应当具有相同的势. 事实上，一个更严谨的势的定义应当是从双射出发的：

定义 1.24 (集合的势 II)

一个集合被称作为有限的，若存在一个从 A 到 $\mathbb{N}$ 的子集的双射. 也就是说，A 是有限集，如果 A 是空集或者存在一个自然数 n 与双射 f:

$$f\colon A \to \{1, \cdots, n\} \tag{1.12}$$

若 A 为空集，称 A 的势为 0，而另外一种情况下，A 的势为 n.

尽管这么定义看起来比本书开头的定义更加复杂，但不可否认，这个定义更加严谨，而且提供了一种对势的数学描述. 因此我们有下面的极其重要而实用的推论，它告诉了我们如何判断集合等势：

推论 1.3 (等势的判别法)

对集合 X 与 Y

$$\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(Y) \Leftrightarrow \exists\, f : X \to Y \text{ 为双射.}$$

下面的命题提供了判断映射是否为双射的一个方法：

命题 1.5

设 $f\colon X \to Y$ 为映射，那么 f 为双射当且仅当存在映射 $g\colon Y \to X$ 使得 $g \circ f = \mathrm{id}_X$，且 $f \circ g = \mathrm{id}_Y$，在这种情况下，$g$ 由 f 唯一确定.

证明 我们先证充分必要：

"$\Rightarrow$"：假设 f 为双射，由于 f 是满射，对 $\forall\, y \in Y$，$f^{-1}(\{y\})$ 非空，由于 f 为单射，$x \in f^{-1}(\{y\})$ 唯一，于是我们只需要定义：

$$g\colon Y \to X, \quad y \mapsto x \in f^{-1}(\{y\}) \tag{1.13}$$

即可.

"$\Leftarrow$": 由 $f\circ g=\mathrm{id}_Y$ 立得 f 为满射, 因为对 $\forall\, y\in Y, f(g(y))=y$, 而 $g(y)\in X$. 再对 $x,y\in X$ s.t.$f(x)=f(y)$, 由 $g\circ f=\mathrm{id}_X$, 有

$$g(f(x))=g(f(y))\Rightarrow x=y, \tag{1.14}$$

从而 f 是单射.

因此充分必要性成立. 下证 g 的唯一性:

若除 g 外还有 $h: Y\to X$ 满足条件, 那么由命题1.4, 我们有:

$$g=g\circ\mathrm{id}_Y=g\circ(f\circ h)=(g\circ f)\circ h=\mathrm{id}_X\circ h=h, \tag{1.15}$$

从而 g 由 f 唯一确定.

这个命题启示我们, 对于双射来讲, 它可以唯一确定另外一个映射, 这是十分重要的:

定义 1.25 (映射的逆)

设 $f\colon X\to Y$ 为双射, 则 f 的逆映射 **(Inverse map)**, 记为 f^{-1}, 它是唯一的映射 $f^{-1}\colon Y\to X$ 使得 $f\circ f^{-1}=\mathrm{id}_Y$ 且 $f^{-1}\circ f=\mathrm{id}_X$. ♣

这个定义也是十分自然的. 我们在这里给出另外一个命题留作习题, 它是直观上显然的:

命题 1.6

设 $f\colon X\to Y$ 与 $g\colon Y\to V$ 为双射, 那么 $g\circ f\colon X\to Y$ 为双射, 且:

$$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}. \tag{1.16}$$

♠

1.2.4 集合值映射

再谈回逆映射, 你注意到逆映射事实上就是从值域 (在这里也就是到达域) 对应回其原像的过程, 而这个过程作为映射是良定义的, 但对于一般的映射而言, 值域中的元素的原像极有可能是一个集合, 因此我们不能将其视作映射. 不过, 如果我们引入这么一个概念:

定义 1.26 (集合值映射)

设 $f\colon X\to Y$ 为映射, 它诱导了两个集合值映射 **(Set valued map)**:

$$f\colon\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(Y),\quad A\mapsto f(A),\qquad f^{-1}\colon\mathcal{P}(Y)\to\mathcal{P}(X),\quad B\mapsto f^{-1}(B). \tag{1.17}$$

使用相同的符号 f 来表示两个不同的映射并不会造成混乱, 因为其具体内容可从上下文获知. ♣

那么, 对于 f 非双射, 它诱导了唯一的集合值映射 f^{-1}, 简便起见, 我们直接用 $f^{-1}(y)$ 来代替 $f^{-1}(\{y\})$, 即 f 在 y 处的纤维.

在本节的最后, 我们丢一个命题:

命题 1.7

以下命题对 f 诱导的集合值映射均成立:

1. $A\subseteq B\subseteq X\Rightarrow f(A)\subseteq f(B)$;
2. $A_i\subseteq X,\ \forall\, i\in I\Rightarrow f(\bigcup_i A_i)=\bigcup_i f(A_i)$;
3. $A_i\subseteq X,\ \forall\, i\in I\Rightarrow f(\bigcap_i A_i)\subseteq\bigcap_i f(A_i)$;

4. $A \subseteq X \Rightarrow f(A^C) \supseteq f(X) \setminus f(A)$;
5. $A' \subseteq B' \subseteq Y \Rightarrow f^{-1}(A') \subseteq f^{-1}(B')$;
6. $A'_i \subseteq Y, \forall\, i \in I \Rightarrow f^{-1}(\bigcup_i A'_i) = \bigcup_i f^{-1}(A'_i)$;
7. $A'_i \subseteq Y, \forall\, i \in I \Rightarrow f^{-1}(\bigcap_i A'_i) = \bigcap_i f^{-1}(A'_i)$;
8. $A' \subseteq Y \Rightarrow f^{-1}(A'^C) = [f^{-1}(A')]^C$.

此外, 若 $g: Y \to V$ 是另外一个映射, 那么 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

证明留作习题.

事实上, 你注意到集合值映射 f^{-1} 是保持集合运算的, 但 f 却并非如此, 从命题1.7的 3,4 便可见一斑.

最后提一个记号：我们记从 X 到 Y 的全体映射为 Y^X, 也就是说

$$.Y^X := \{f \mid f : X \to Y\}.$$

1.3 数列与极限初步

1.3.1 数列的定义

你还记得你小学时做过的题目吗：

找规律：$2, 4, 8, \_, 32, \cdots$

把这些题目概括一下就是：给你按规律排的数字, 你要试着去发掘这个规律并按规律来预测中间或后面的数字. 你研究的对象是一堆按规律排好的数. 这样的需求无处不在, 因此我们很有必要去了解并学习相关的理论.

首先, 我们要给它一个名字, 既然是按顺序排列的数, 那不妨管它叫 “数列”, 顾名思义, 就是数的序列. 它的要素也很显然, 数, 以及数之间的排列顺序. 既然这里存在顺序, 你可能会联想到序关系 (见第六章第一节), 这个序关系应当与数本身的大小关系无关, 它取决于你自己的意愿. 在直观的感受后, 我们如何去严谨地描述数列呢? 首先你得知道你准备考虑哪些数, 自然, 这些数会构成一个集合, 但集合是无序的, 仅仅把这些数不加任何处理地丢到集合里面去, 是不能辨别它们的顺序的. 我们采取的策略是给数打上 “标签”, 以 “标签” 的序来代表这些数的序关系.

即, 有下面的定义：

定义 1.27 (数列)

一个数列 **(Sequence)** 指的是一列数：$a_1, a_2, \cdots, a_n, n \in \mathbb{N}$, 记为 $\{a_n\}$. 允许 n 趋于无穷. 一个更严谨的定义方式为：

$$\{a_n\} := \{(i, a_i) \mid i = 1, \cdots, n\} \subseteq \mathbb{N} \times A \tag{1.18}$$

这里 A 为数列中元素组成的集合, $\{a_n\}$ 上配有字典序.

根据元素所在数域的不同, 也可以称数列为整数列, 有理数列, 实数列等, 这无伤大雅.

例题 1.4

1. $1, 2, \cdots, n$ 是整数列;

2. $1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}$ 是有理数列;
3. $1, \sqrt{2}, \cdots, \sqrt{n}$ 是实数列.

这个定义其实挺简洁的. 先说的定义是很直观而形象的方式, 但不够严谨, 因此我们紧接着给出了第二个定义方式, 以数对的第一个坐标来标记顺序.

当然啦, 你也可以通过映射来表示这种序关系. 本质上, 数列就是将一些从 1 开始的自然数映到一些数上, 即:

$$f : N \to A, \quad i \mapsto f(i) =: a_i, \tag{1.19}$$

这里 $N = \{1, 2, \cdots, n\} \subseteq \mathbb{N}$. 于是刚才的 $\{a_n\}$ 可以理解为 f 的图象.

那么我们已经给出了数列的基本定义, 我们再返回去考虑我们所说的规律. 所谓规律, 就是这些数字的变化与分布存在一定的共性. 比如说开头的例子, 明显可以看见后一个是前一个数的两倍, 这就是展现相邻两项间的关系. 我们描述数列的规律通常用两种方式:

1. 通项公式
   所谓通项公式, 就是用一个关于 n 的式子直接表示第 n 项, 即 $a_n = f(n)$, 这里 $f(n)$ 就体现了数列取值的共同特征. 它的好处是能直观体现每一项的取值, 但相对地不易于得出项与项之间的联系.
2. 递推公式
   所谓递推公式, 就是给出数列某些项的值, 以及若干项间的关系, 使得我们可以从已知项出发, 通过项间的关系来递推地得出所有项的取值, 即通项公式. 正如描述所说, 这个关系所涉及的项的个数是不确定的, 结合的形式也是不确定的, 因此我们很难去给出一个概括, 在之后我们会着重于几种常见而特殊的递推公式, 并向你介绍如何从它们得到通项公式. 递推公式的弊端是明显的, 因为你无法直接看出数列中每一项的取值, 但好处也是明显的, 因为你可以清晰地看见项之间的联系.

接下来我们举些例子向大家展示数列的通项公式和递推公式:

例题 1.5

1. 形如 $c, c, \cdots, c$ 的数列 $\{a_n\}$ 称为**常数列 (Constant sequence)**, 它的特征是所有项为同一个常数, 它的通项公式可以写成 $a_n = c$, 而递推公式可以写为 $a_1 = c,\ a_{n+1} = a_n, \forall\, n \geq 1$, 当然, a_1 可以改成随便哪一项, 结果都是一样的, 不过一般我们倾向于给首项.
2. 奇数列 $1, 3, 5, \cdots, 2n-1, \cdots$ 的通项公式为 $a_n = 2n-1$, 递推公式为 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2,\ \forall\, n$, 当然 $a_1 = 1$ 可以改成 $a_i = 2i - 1$.
3. 偶数列 $2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots$ 的通项公式为 $a_n = 2n$, 递推公式为 $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 2,\ \forall\, n$, $a_1 = 2$ 也可以改成 $a_i = 2i$.
4. 负数列 $-1, -2, -3, \cdots, -n, \cdots$ 的通项公式为 $a_n = -n$, 递推公式为 $a_1 = -1,\ a_{n+1} = a_n - 1,\ \forall\, n$.

这些例子都是较为简单的, 而我们接下来要着重讨论两类极具代表性的数列, 并在其中进一步介绍数列相关的概念.

1.3.2 等差数列与等比数列

首先我们来介绍等差数列.

等差数列的 “等差” 的含义是什么? 它指的是, 数列的后一项与前一项的差值为定值[13], 即:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \cdots = a_n - a_{n-1} = \cdots.$$

[13] 我们通常也管数列的后一项减去前一项得到的差值叫数列的**差分 (Difference)**, 因此你也可以把等差数列描述为差分为定值的数列

概括一下，就是 $a_n - a_{n-1}$ 对所有的 n 都相等. 很自然的，我们有下面的定义：

定义 1.28 (等差数列)

称数列 $\{a_n\}$ 为等差数列 **(Arithmetic sequence)**, 若 $\{a_n\}$ 满足：

$$\exists\, d \in \mathbb{R},\ a_{n+1} - a_n = d,\ \forall\, n \in \mathbb{N}_+, \tag{1.20}$$

称 d 为数列的公差 **(Common difference)**, a_1 为数列的首项 **(Initial term)**.

你到现在应当也见过了很多的等差数列，比如例 1.5 的四个例子均为等差数列：

例题 1.6

1. 常数列 $c, c, \cdots, c, \cdots$ 的首项为 c, 公差是 0;
2. 奇数列 $1, 3, \cdots, 2n-1, \cdots$ 的首项是 1, 公差是 2;
3. 偶数列 $2, 4, \cdots, 2n, \cdots$ 的首项是 2, 公差是 2;
4. 负数列 $-1, -2, \cdots, -n, \cdots$ 的首项是 -1, 公差是 -1;

当然，你可能有个疑问，为什么我们指出数列为等差数列的时候，单单指出了它的首项和公差呢？其实原因很简单，因为一个等差数列的通项公式完全由其首项和公差决定：

命题 1.8

给定首项 $a_1 = a$ 与公差 d, 则存在唯一的等差数列 $\{a_n\}$.

直观上理解来看，你可以想象你在走路，首项理解为你的起点，公差理解为你迈步子的大小，那么你向前走，每一步落在哪里是很清楚的，只要给出你迈的步数，那么我就可以确定你走到哪去了. 而现在可以想象你在实数轴上走路，公差的正负决定你向哪边走，首项的大小决定你从哪开始走，你可以注意到，如果你走了 n 步，那么你最后的位置 a_{n+1} 和 a_1 应当相差了 nd, 这一点其实就给出了等差数列的通项公式. 下面我们给出正式的证明：

证明 先证明存在性. [14]

我们验证 $a_n = a + (n-1)d$ 满足题意.

首先 $n = 1$ 时，$a_1 = a + (1-1)d = a$, 故首项与条件吻合.

而 $\forall\, n \in \mathbb{N}_+$, 有 $a_{n+1} - a_n = [a + (n+1-1)d] - [a + (n-1)d] = d$, 故数列逐项之差一致，均为 d, 与条件相吻合.

故 $a_n = a + (n-1)d$ 满足题意.

再证明唯一性.

假设存在数列 $\{b_n\}$ 也满足题意，但不长这样. 即 $\exists\, n \in \mathbb{N}_+,\ a_n \neq b_n$.

那么我们可以假设 $N = \{n \in \mathbb{N}_+ \mid a_n \neq b_n\}$, 那么 $N \subseteq \mathbb{N}_+$ 且 N 非空，故 N 中有最小数，设为 n_0, 那么 $n_0 - 1 \notin N$, 所以根据 N 的定义，我们知道

$$a_{n_0-1} = b_{n_0-1}. \tag{1.21}$$

而根据 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都是等差数列，我们知道

$$a_{n_0} - a_{n_0-1} = d, \quad b_{n_0} - b_{n_0-1} = d, \tag{1.22}$$

[14] 存在性的证明方法各种各样，其中一种做法是构造性证明，通俗解释一下就是：你不是问我这玩意存不存在吗？那我现在把这玩意摆到你面前，自然而然，我不仅知道它存在，我还能知道它是什么，目的已经达到了. 这里我们采取构造性证明，而我们想要的结果就隐藏在刚才的分析里面.

故
$$a_{n_0}=a_{n_0-1}+d=b_{n_0-1}+d=b_{n_0}, \tag{1.23}$$
这与 $n_0\in N$ 矛盾.

故 $\{b_n\}$ 不存在, $\{a_n\}$ 唯一.

值得一提的是, 这里为了严谨起见, 使用了最小数原理, 这部分内容可以阅读第六章第二节.

于是从定义和刚才命题的证明, 我们获知, 等差数列的通项公式是 $a_n=a_1+(n-1)d,\ \forall\, n\in\mathbb{N}_+$, 递推公式是 $a_1=a_1,\quad a_{n+1}=a_n+d,\ \forall\, n\in\mathbb{N}_+$, 这两者是可以直接对应起来的. 当然, 正如我们在例1.5中所指出的, 你给出的值不一定要求是 a_1, 替换为数列中任意一项的值, 都可以推导出这个数列, 想想看, 为什么?

事实上你很容易看见等差数列满足这么一些性质:

命题 1.9

设 $\{a_n\}$ 为等差数列, 首项为 a_1, 公差为 d, 则

1. $a_n=a_m+(n-m)d,\ \forall\, m,n\in\mathbb{N}_+$;
2. $\forall\, i,j,m,n\in\mathbb{N}_+,\ i+j=m+n\Leftrightarrow a_i+a_j=a_m+a_n$;
3. 数列 $\{b_n\}$ 也为等差数列, 若 $b_n=Aa_{pn+k}+B,\ \forall\, n\in\mathbb{N}_+,\ pn+k>0$, 这里 $p,k\in\mathbb{N},\ A,B\in\mathbb{R}$ 为常数;
4. 若数列 $\{b_n\}$ 也为等差数列, 那么数列 $\{a_n+b_n\}$ 与 $\{a_n-b_n\}$ 均为等差数列, 该结论可推广到有限个等差数列相加减的情况.

♠

证明留作习题.

接下来我要先向你讲述一个故事:

> 7 岁那年, 高斯第一次上学了. 头两年没有什么特殊的事情. 1787 年高斯 10 岁, 他进入了学习数学的班次, 这是一个首次创办的班, 孩子们在这之前都没有听说过算术这么一门课程. 数学教师是布特纳 (Buttner), 他对高斯的成长也起了一定作用. 在全世界广为流传的一则故事说, 高斯 10 岁时算出布特纳给学生们出的将 1 到 100 的所有整数加起来的算术题, 布特纳刚叙述完题目, 高斯就算出了正确答案. 不过, 这很可能是一个不真实的传说. 据对高斯素有研究的著名数学史家 E · T · 贝尔 (E.T.Bell) 考证, 布特纳当时给孩子们出的是一道更难的加法题: 81297+81495+81693+⋯+100899. 当然, 这也是一个等差数列的求和问题 (公差为 198, 项数为 100). 当布特纳刚一写完时, 高斯也算完并把写有答案的小石板交了上去. E · T · 贝尔写道, 高斯晚年经常喜欢向人们谈论这件事, 说当时只有他写的答案是正确的, 而其他的孩子们都错了. 高斯没有明确地讲过, 他是用什么方法那么快就解决了这个问题. 数学史家们倾向于认为, 高斯当时已掌握了等差数列求和的方法. 一位年仅 10 岁的孩子, 能独立发现这一数学方法实属很不平常. 贝尔根据高斯本人晚年的说法而叙述的史实, 应该是比较可信的.

让我们来好好介绍一下等差数列求和的方法, 在此之前, 我们要先对数列求和下个定义:

定义 1.29 (前 n 项和)

设有数列 $\{a_n\}$, 称 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 **n** 项和, 记为 S_n, 即:

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n. \tag{1.24}$$

容易知道数列 $\{S_n\}$ 的递推公式为 $S_1 = a_1$, $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}_+$. ♣

这当然也是一个很顾名思义的名词. 前 n 项和, 指的就是把数列的前面 n 项加起来. 还是例 1.5 为例.

例题 1.7

1. 常数列 $c, c, \cdots, c, \cdots$ 的前 n 项和为 $S_n = nc$;
2. 奇数列 $1, 3, \cdots, 2n-1, \cdots$ 的前 n 项和为 $S_n = n^2$;
3. 偶数列 $2, 4, \cdots, 2n, \cdots$ 的前 n 项和为 $S_n = n(n+1)$;
4. 负数列 $-1, -2, \cdots, -n, \cdots$ 的前 n 项和为 $S_n = -\frac{n(n+1)}{2}$.

想要验证它的正确性并不困难, 我们只需要验证通项公式与递推公式相符即可, 但我们更关心如何得到这个通项公式的.

第一个常数列的前 n 项和是很明显的, 把 n 个 c 相加, 那结果当然是 nc. 但是对于后面的三个数列, 我们如何去计算它们的前 n 项和呢?

一个很不错的选择是直接计算一般等差数列的前 n 项和, 从而自然地获知特殊情况. 我们也这么尝试一下:

设有一个等差数列 $\{a_n\}$, 公差为 d, 那么它的通项公式为 $a_n = a_1 + (n-1)d$, 所以前 n 项和表示为:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= (a_1 + 0d) + (a_1 + 1d) + \cdots + [a_1 + (n-1)d] \\ &= (a_1 + a_1 + \cdots + a_1) + (0 + 1 + \cdots + n - 1)d \\ &= na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d. \end{aligned}$$

这样就给出了 $\{S_n\}$ 的通项公式. 不过你可能有个疑问, 为什么 $0 + 1 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ 呢? 其实这也是一个等差数列的求和. 我们从高斯的方法来推导这件事情:

记 $S = 1 + 2 + \cdots + (n-1)$, 我们倒着写, 那么 $S = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1$, 两式相加, 得

$$\begin{aligned} 2S &= [1 + 2 + \cdots + (n-1)] + [(n-1) + (n-2) + \cdots + 1] \\ &= [1 + (n-1)] + [2 + (n-2)] + \cdots + [(n-1) + 1] \\ &= n + n + \cdots + n = (n-1)n \end{aligned}$$

于是 $S = \frac{n(n-1)}{2}$.

我们称这种方法为**倒序求和法**. 它的原理其实是命题1.9(2). 当然, 我们也可以直接用倒序求和法来计算前 n 项和.

设 $S_n = a_1 + \cdots + a_n$, 那么 $S_n = a_n + \cdots + a_1$, 两式相加, 得

$$\begin{aligned} 2S_n &= (a_1 + \cdots + a_n) + (a_n + \cdots + a_1) \\ &= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_n + a_1). \end{aligned}$$

而我们知道,每组的下标之和都是 $n+1$,所以各组下标之和相同,故各组的值也相同,都为 a_1+a_n. 因此

$$\begin{aligned}2S_n&=(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)\\&=n(a_1+a_n).\end{aligned}$$

故 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$. 你也可能听说过,等差数列求和就是首项加末项乘以项数再除以 2, 就是这么来的.

注 现在我要向你介绍一个十分具有技巧性的求和方式——裂项.

设想你要求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n, 那么根据定义, $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$. 假如我们能找到这么一个数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_n=b_{n+1}-b_n, \forall\, n\geq 1$, 那么 S_n 的计算就可以变为:

$$S_n=(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_{n+1}-b_n)=b_{n+1}-b_1.$$

这样就大大简化了计算难度. 由于此种计算方法通常是每一项拆成两项, 就像裂开了一样, 所以我们叫裂项法.

当然, 你注意到了最大的问题: 我们如何寻找 $\{b_n\}$ 呢? 这具有相当的技巧性, 我们往往先猜测 $\{b_n\}$ 的形式, 再通过待定系数法确定系数取值, 但猜出这个形式往往比较耗脑子. 所以我建议你把通法练熟之后再尝试这种方法, 否则容易本末倒置, 基础不牢.

比如对于等差数列, 如何利用裂项法求前 n 项和呢? 首先我们猜测一下 b_n 的形式, 它绝对不可能还是等差数列, 因为等差数列的两项之差是个常数, 而一般来讲 a_n 当然不会是常数. 那么我们猜测 b_n 可能含有二次项 n^2, 这样作差就可以得到一次式. 注意, b_n 的选择不是唯一的, 所以不要问为啥没有三次式或者更高次, 当然可以有, 但是会麻烦一些. 我们当然是挑最好算的 b_n 来计算.

于是我们假设 $b_n=An^2+Bn+C$, 作差, 得到

$$a_n=b_{n+1}-b_n=[A(n+1)^2+B(n+1)+C]-(An^2+Bn+C)=2An+A+B,$$

这里 $2A$ 为一次项系数, $A+B$ 为常数项. 而我们知道 $a_n=a_1+(n-1)d=dn+a_1-d$, 所以你对比一下这两个式子有:

$$\begin{cases}2A=d,\\A+B=a_1-d\end{cases}.$$

从而 $A=\frac{d}{2}$, $B=a_1-\frac{3}{2}d$. C 呢? C 随便怎么取, 因为会抵消:

$$\begin{aligned}S_n=b_{n+1}-b_1&=[A(n+1)^2+B(n+1)+C]-(A+B+C)\\&=An^2+(2A+B)n\\&=\frac{d}{2}n^2+(d+a_1-\frac{3}{2}d)n\\&=na_1+\frac{d}{2}n(n-1).\end{aligned}$$

这和我们之前得到的结果是一致的.

有个颇为实用的结论:

定理 1.2

数列 $\{a_n\}$ 与其前 n 项和数列 $\{S_n\}$ 一一对应.

理解并不困难, 因为数列 $\{a_n\}$ 决定了其前 n 项和 $\{S_n\}$ 的首项与差分, 而 $\{S_n\}$ 的递推公式也可以决定 $\{a_n\}$ 的各项.

对于前 n 项和, 我们也有一些有趣的结论:

命题 1.10

设 $\{a_n\}$ 为等差数列, d 为公差, $\{S_n\}$ 为其前 n 项和, 则

1. 一般来讲, $\{S_n\}$ 不是等差数列;
2. 设 $k \in \mathbb{N}_+$, 定义 $S_0 = 0$, 则数列 $\{S_{(n+1)k} - S_{nk}\}$, $n \in \mathbb{N}$ 为等差数列, 公差为 $k^2 d$.

以及这么三个等价命题:

命题 1.11

设有数列 $\{a_n\}$, 前 n 项和为 S_n, TFAE[a]:

1. $\{a_n\}$ 为等差数列;
2. $\exists\, A, B \in \mathbb{R}$ s.t. $S_n = An^2 + Bn$;
3. $\{\frac{S_n}{n}\}$ 为等差数列.

[a]即 The following are equivalent, 以下等价

我们证明一下命题1.11, 命题1.10则留作习题:

证明 $1 \Rightarrow 2$

由我们前面的结论, 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d, 那么 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$, 于是取 $A = \frac{d}{2}$, $B = a_1 - \frac{d}{2}$ 则满足条件.

$2 \Rightarrow 3$

由条件, $\frac{S_n}{n} = An + B$, 这显然是一个等差数列, 公差为 A, 首项为 $A + B$.

$3 \Rightarrow 1$

设 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 的公差为 d, 那么 $\frac{S_n}{n} = \frac{S_1}{1} + (n-1)d = S_1 + (n-1)d$, 于是 $S_n = na_1 + n(n-1)d$, 求 $\{S_n\}$ 的差分, 得 $S_{n+1} - S_n = a_1 + 2nd$, 即 $a_{n+1} = a_1 + 2nd$, 故 $\{a_n\}$ 为等差数列, 公差为 $\frac{d}{2}$.

笔记 我们在证若干个命题等价的时候往往没有必要证两两等价, 我们可以选择证明第一个命题推出第二个命题, 第二个推出第三个, $\cdots$, 最后一个推出第一个, 这样就形成一个闭环, 于是你可以知道这个逻辑链上的命题均是等价的.

以及, 我们证明一个数列为等差数列, 只需验证差分为定值即可.

最后我想介绍一下关于等差数列的一个更宽泛的理解方式.

我们一开始就提过, 数列是将一些自然数映射到实数上. 那我们不妨考虑所有的实数, 我们构造一个映射, 使得把所有实数映射到某些实数上, 而之前的自然数也对应到相应的数上, 也就是, 我们考虑原映射的扩张. 这样我们可以分析这个扩张的性质, 来得到原数列具有的一些性质.

你可能会觉得这有点抽象, 没关系, 我们拿等差数列举例子.

设有一个等差数列 $\{a_n\}$, 公差是 d, 那么 $a_n = a_1 + (n-1)d$, 你注意到这等价于一个映射 $a\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{R}$, $\quad n \mapsto a_1 + (n-1)d$. 我们考虑 a 的扩张:$\tilde{a}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad x \mapsto a_1 + (x-1)d$, 你意识到这其实就是你在初中学过的一次函数 $y = dx + (a_1 - d)$, 它的图像是一条直线. 而 a 的图像是横坐标为正整数时相对应的那些点. 比如考虑自然数列 $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$, 我们在下面展示数列与相应的扩张的图像:

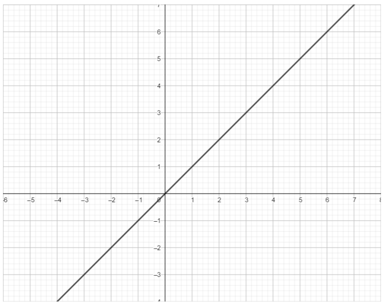


图 1.9: 扩张映射

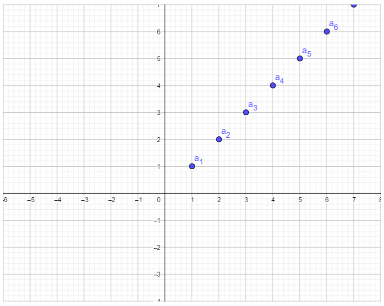


图 1.10: 原数列映射

而我们看得很清楚, 对于一条直线, 当你横向移动相一致的距离时, 纵向也会变化一致的距离. 而所谓等差数列, 就是从直线上横向等距取点再依次标上顺序, 纵向当然也是等距变化的, 这就是为什么差分是相等的. 而且对于直线, 由于点是线性均匀分布的, 我们显然有这么个性质:

$$\tilde{a}(x)+\tilde{a}(y)=2\tilde{a}(\frac{x+y}{2}) \tag{1.25}$$

这一点很自然地可以推出命题1.9, 因为命题对直线的所有元素都成立, 那么数列作为直线的子集也会满足这个性质.

更一般的, 有:

$$\tilde{a}(x_1)+\tilde{a}(x_2)+\cdots+\tilde{a}(x_n)=n\tilde{a}\left(\bar{x}\right). \tag{1.26}$$

这里 $\bar{x}$ 为 $x_1,\cdots,x_n$ 的平均值. 基于这一点, 我们也可以给出等差数列任意的 n 项 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_n}$ 的和:

$$\sum_{k=1}^{n}a_{i_k}=\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}(i_k)=n\tilde{a}\left(\frac{i_1+\cdots+i_n}{n}\right) \tag{1.27}$$

如果你能够接受数列的下标出现小数的话, 那么我们也可以将求和的结果写为 $na_{\bar{i}}$, $\bar{i}$ 是下标的平均值. 比如 $a_2+a_3=2a_{2.5}$, 这对于数列来讲当然是不太严谨的表述, 但是从扩张映射的角度来说是非常自然的.

当然, 我们可以稍微考虑一些更实际的情况, 比如在刚才式 (1.26) 中, 倘若 $x_1,\cdots,x_n$ 有重复, 总共有 r 种不同的值: $x_1,\cdots,x_r$, x_1 的值出现了 p_1 次, x_2 的值出现了 p_2 次, $\cdots$, x_r 的值出现了 p_r 次, 那么我们也可以将式 (1.26) 写为:

$$p_1\tilde{a}(x_1)+p_2\tilde{a}(x_2)+\cdots+p_r\tilde{a}(x_r)=n\tilde{a}(\bar{x}),\quad \bar{x}=\frac{p_1x_1+\cdots+p_rx_r}{n} \tag{1.28}$$

说白了就是加权平均, 自然的, 式 (1.27) 也可以改写为:

$$\sum_{k=1}^{n}a_{i_k}=n\tilde{a}\left(\frac{p_1i_1+\cdots+p_ri_r}{n}\right). \tag{1.29}$$

比方说 $2a_2+a_3=3a_{\frac{7}{3}}$. 这种做法往往可以给计算带来便利. 当然, 我们也可以直接用式 (1.27) 来计算前 n 项和:

$$S_n=a_1+\cdots+a_n=na_{\frac{1+\cdots+n}{n}}=na_{\frac{n+1}{2}},$$

即使这里我们仍然要用到 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ 这一结果.

那么我们接下来介绍等比数列, 在此之前我需要先将你对乘方这一概念的认识稍微扩充一下. 如果你已经了解过有理次幂, 下面可以跳过不看.

你在初中已经接触过, 知道所谓 a^n 的含义, 这也十分容易理解, 就是把 n 个 a 乘一块去. 但是, 你如

何理解 $a^{\frac{m}{n}}$ 呢? 比如 $a^{\frac{3}{2}}$, 把 $\frac{3}{2}$ 个 a 乘起来? 怪异.

每一个事物都企图能这么清晰地理解是不现实的, 我们应当换一种方式去理解其含义.

我们知道, 对于正整数 m, n, 有

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

这不难理解, 左边是把 n 个 a^m 相乘, 而 a^m 是把 m 个 a 相乘, 因此合起来就是把 $n \times m$ 个 a 相乘, 即右边.

事实上这个性质对所有的整数都成立, 只要你能理解负整数幂的含义. 比如 $a^{-1} = \frac{1}{a}$. 为什么呢? 因为 $a^{-1} \cdot a = a^{-1+1} = a^0 = 1$, 所以 a^{-1} 是 a 的倒数, 即 $\frac{1}{a}$. 类似地, $a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1 \Rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. 当然, 这里我们假定了一条性质:

$$\forall\, m, n \in \mathbb{Z},\ a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

其实倒不如说我们先定义负整数幂是正整数幂的倒数, 然后自然得出这个结论. 当然这些都很好理解, 你可以试着自己去完善相关性质与理论.

现在我们假定这个性质对于有理数 p, q 也成立. 即

$$p, q \in \mathbb{Q}, a \in \mathbb{R} \Rightarrow (a^p)^q = a^{pq}.$$

我们取 $p = \frac{m}{n}$, $q = n$, 那么 $pq = m$, 我们关心的是 $a^{\frac{m}{n}} := a^p$, 那我们不妨设 $x = a^{\frac{m}{n}}$, 则 x 满足关系:

$$x^n = a^m \tag{1.30}$$

我们定义这个方程的解为 $a^{\frac{m}{n}}$(如果 n 为偶数, 则取非负解). 关于解的存在与唯一性这里不加说明, 在学习幂函数后你可以自行思考. 当然, 我们也可以把开方运算拓展到任意整数次, 即:

$$\sqrt[n]{a} := x,\ x^n = a$$

且当 n 为偶数时, 取非负解. 那么我们可以把 $a^{\frac{m}{n}}$ 写为 $\sqrt[n]{a^m}$.

当然, 你可以验证, 刚才我们的假定是成立的[15]. 我们知道有理数总可以写成既约分数的形式 (即使我们尚未给出严谨的证明, 这一点在学习选修的知识后可以尝试自行证明), 于是我们设 $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{r}{s}$, 于是 $a^p = a^{\frac{m}{n}}$, 按照我们的定义, 它是方程 $x^n = a^m$ 的解. 而 $(a^p)^q = (a^p)^{\frac{r}{s}}$, 它是方程 $x^s = (a^p)^r$ 的解. 我们要证明 $(a^p)^q = a^{pq}$, 可以利用解的唯一性. 因为 $a^{pq} = a^{\frac{m}{n}\frac{r}{s}} = a^{\frac{mr}{ns}}$, 它是方程 $x^{ns} = a^{mr}$ 的解. 那么我们只需证明, $(a^p)^q$ 也是 $x^{ns} = a^{mr}$ 的解. 根据我们前面所说, 设 $x = (a^p)^q$, 则 x 满足方程 $x^s = (a^p)^r$, 再设 $y = a^p$, 则 $y^n = a^m$, 所以 $x^s = y^r$, $y^n = a^m$, 我们将两个式子做一下变形, 贴近我们想要的结果. 于是第一个等式可以在两边作 n 次幂, 则 $x^{ns} = y^{nr}$, 第二个式子可以在两边作 r 次幂, 于是得到 $y^{nr} = a^{mr}$, 从而 $x^{ns} = a^{mr}$, 于是 $(a^p)^q$ 是方程 $x^{ns} = a^{mr}$ 的解, 故 $(a^p)^q = a^{pq}$. 整个流程的思想是, 用已知推导未知. 我们已知整数上成立, 也已知有理数与整数的关系, 于是通过这种关系, 将关于有理数的命题转化为关于整数的命题, 从而成立. 这种做法十分常见, 大家可以多多品味.

这种定义方式比较基础, 但不太直观. 如果你能很好地理解 n 次根号, 我们也不妨将 $a^{\frac{m}{n}}$ 直接定义为 $\sqrt[n]{a^m}$, 上面的性质当然也显然成立, 但这里相较于刚才的方程的解的定义来说就没那么基础, 比如你得先完善 n 次根号的相关性质. 而根据我们刚才所说, n 次根号其实也定义为方程的解. 因此我们干脆合二为一, 直接给出方程的解的定义.

我应当提醒你, 我们的指数其实可以扩展到所有实数, 不过对于实数幂的定义方式, 我们会在后面介绍. 这里你只需要默认其存在.

[15]注意, 我们只是从假定中获得了思路, 但我们定义和假定是没有关系的, 所以假定的正确性尚未验证.

好啦, 这写得有些冗长. 我们打住不再多聊, 切回正题.

类似于等差数列, 我们也可以想想, 等比数列的 "等比" 指的是什么? 比, 指的是比值, 即后一项与前一项的比值. 等比, 指的是后一项与前一项的比值为定值, 不过我们一般要求这个定值不为零.

定义 1.30 (等比数列)

称数列 $\{a_n\}$ 为等比数列 **(Geometric sequence)**, 若 $\{a_n\}$ 满足:

$$\exists\, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,\ \forall\, n \in \mathbb{N}_+. \tag{1.31}$$

称 q 为数列的公比 **(Common ratio)**.

定义方式是类似的. 例子也比较多, 比如本节开头的找规律, 其实就是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列.

例题 1.8

1. $2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots$ 是等比数列, 首项为 2, 公比为 2;
2. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{2^{n-1}}, \cdots$ 是等比数列, 首项为 1, 公比为 $\frac{1}{2}$;
3. $1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n+1}$ 是等比数列, 首项为 1, 公比为 -1.

以及, 等比数列也完全由数列的首项与公比决定, 这一点与等差数列是类似的. 不过我们要求等比数列的任意一项均不为零.

很容易发现等比数列的通项公式是

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

这不难证明, 你只需要将 $\frac{a_2}{a_1} = q,\ \frac{a_3}{a_2} = q, \cdots,\ \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$ 所有等式乘起来, 左边的结果是 $\frac{a_n}{a_1}$, 右边是 q^{n-1}, 移项即可.

等比数列也可以有类似命题1.9的性质:

命题 1.12

设 $\{a_n\}$ 为等比数列, 公比为 q, 则

1. $a_m = a_n q^{m-n},\ \forall\, m, n \in \mathbb{N}_+$;
2. $\forall\, i, j, m, n \in \mathbb{N}_+,\ i + j = m + n \Leftrightarrow a_i a_j = a_m a_n$;
3. 数列 $\{b_n\}$ 也为等比数列, 若 $b_n = A a^r_{pn+k},\ \forall\, n \in \mathbb{N}_+,\ pn + k > 0$, 这里 $A, r \in \mathbb{R},\ p, k \in \mathbb{N}$ 均为常数;
4. 若数列 $\{b_n\}$ 也为等比数列, 那么数列 $\{a_n b_n\}$ 与 $\frac{a_n}{b_n}$ 均为等比数列. 该结论可推广到有限个等比数列相乘除的情况.

证明不难.

你发现其实我们就说把加减改成了乘除, 形式基本没变, 这大概就是所谓的共性罢!

接下来我们讲等比数列的前 n 项和, 这个求法就更有技巧性.

首先, 按定义, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-1}$, 接下来, 我们将 S_n 乘以 q, 那么有:

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^n = (S_n - a_1) + a_1 q^n. \tag{1.32}$$

于是整理一下, 移项就得到:

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}. \tag{1.33}$$

当然, 这里要求 $q \neq 1$, 当 $q = 1$ 时, $\{a_n\}$ 为常数列, 它的前 n 项和为 na_1. 你可能会觉得 $q \neq 1$ 与 $q = 1$

两种情况形式差异很大，但其实并不是这样的. 在你学习了函数的极限之后，你就会发现 $q=1$ 其实是 q 趋于 1 的极限情况.

我很难向你解释说这么干的动机是什么，或许这只是前辈的灵光一闪. 但毫无疑问，这种做法为相当一部分的情况提供了思路. 我们称这种方法为**错项相减法**. 具体原因你可以观察一下两个和式的特征：

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}, \tag{1.34}$$

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n. \tag{1.35}$$

你可以观察到下面的第一项是上面的第二项，下面的第二项是上面的第三项，下面的第三项是上面的第四项，$\cdots$，下面的第 $n-1$ 项是上面的第 n 项. 因此当我们作差时，它们会相互抵消，留下下面的第 n 项与上面的第 1 项.

另外，从上面的结果，我们可以得到一个极其实用的恒等式：

$$q \neq 1 \Rightarrow 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

$q \neq 1$ 是为了保证分母不为零，如果我们移项，那么就可以得到对所有实数均成立的恒等式：

$$q^{n+1} - 1 = (q-1)(q^n + q^{n-1} + \cdots + q + 1).$$

更一般地，对于任意两个实数 a, b，你可以注意到：

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

如果 n 是奇数，那么有 $a^n + b^n = a^n - (-b)^n$，于是利用上式可以得到 $a^n + b^n$ 的因式分解方式. 这些都是很实用的因式分解方法.

注 这里我们仍然可以试试用裂项求前 n 项和：

我们猜测裂开之后仍然是等比数列，而且显然公比还是 q，但是前面系数有所改变，大概长成 ka_1q^{n-1} 的样子，k 是个常数，于是我们代入差分式得到：

$$a_n = b_{n+1} - b_n = ka_1q^n - ka_1q^{n-1} = ka_1q^{n-1}(q-1).$$

而 $a_n = a_1q^{n-1}$，对比系数得到 $k(q-1)=1$，所以 $k = \frac{1}{q-1}$，因此 $b_n = \frac{1}{q-1}a_1q^{n-1}$. 于是：

$$S_n = b_{n+1} - b_1 = \frac{1}{q-1}a_1q^n - \frac{1}{q-1}a_1 = a_1\frac{q^n-1}{q-1}.$$

和前面计算结果一致.

言归正传，我们继续介绍等比数列前 n 项和的相关性质.

命题 1.13

设 $\{a_n\}$ 为等比数列，q 为公比，$\{S_n\}$ 为其前 n 项和，则

1. $\{S_n\}$ 不是等比数列；
2. 设 $k \in \mathbb{N}_+$，定义 $S_0 = 0$，则数列 $\{S_{(n+1)k} - S_{nk}\}$，$n \in \mathbb{N}$ 为等比数列，公比为 q^k.

等比数列的前 n 项和所具有的性质没有等差数列那么多，但是等比数列有一个更亲和的概念：

定义 1.31 (前 n 项积)

设有数列 $\{a_n\}$，称 $a_1a_2\cdots a_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积，记为 T_n，即：

$$T_n = a_1a_2\cdots a_n. \tag{1.36}$$

容易知道数列 $\{T_n\}$ 的递推公式为 $T_1 = a_1$, $T_{n+1} = T_n a_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}_+$. ♣

你会发现等比数列的特征在前 n 项积上体现得比较多. 比如我们很容易计算 T_n:

$$T_n = a_1 a_2 \cdots a_n = a_1 \cdot a_1 q \cdot \cdots \cdot a_1 q^{n-1} = a_1^n q^{1+\cdots+(n-1)} = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

你会发现在刚才计算过程中, 指数位置是一个等差数列求和, 这并非偶然. 这也是我们要提到的, 等差数列与等比数列的联系.

比如说我们现在有个数列 $\{a_n\}$, $a_n = a_1 q^{kn+r}$, $k, r \in \mathbb{Z}$, $\{a_n\}$ 显然是等比数列, 而指数位置的 $kn+r$ 是一个等差数列. 我们可以断言:

命题 1.14

数列 $\{a_n\}$ 为等比数列当且仅当存在等差数列 $\{b_n\}$ 与常数 q 和 A, 使得

$$a_n = Aq^{b_n}. \tag{1.37}$$

♠

我们也稍微证一下吧!

证明 $\Rightarrow$

若 $\{a_n\}$ 为等比数列, 设其公比为 q, 则 $a_n = a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{q} q^n$, 于是令 $b_n = n$, $A = \frac{a_1}{q}$, 则满足条件.

$\Leftarrow$

设 $b_n = kn + r$, 于是 $a_n = Aq^{kn+r}$, 那么 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q^r \neq 0$ 为常数, 故 $\{a_n\}$ 为等比数列.

当然, 我们可以进一步思考等比数列与等差数列是如何对应起来的. 或者说, 从幂, 到指数, 是如何对应起来的, 这就是我们要讲的对数.

定义 1.32 (对数)

如果 $a^n = k$, 那么我们称 n 为以 a 为底, k 的对数 **(Logarithm)**, 记为 $\log_a k$, a 称为底数, k 称为真值. 为了避免无意义的表达式出现, 我们要求底数和真值必须大于零, 以方便我们概括. ♣

其实你会发现对数就是与指数相对的概念. 比如两个恒等式:

$$a^{\log_a k} = k,\ \log_a a^k = k.$$

第一个式子的含义是, 先取对数再取指数, 则值不变. 第二个式子的含义是, 先取指数再取对数, 则值不变. 就好比你加个 a 减个 a, 或者减个 a 再加个 a, 没有变化. 所以取对数和取指数是互逆的运算.

当然, 我们也很推荐把取对数理解为一个映射:

$$\log_a \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad k \mapsto \log_a k. \tag{1.38}$$

我们取 $a = q$, 这样就把 $a_n = Aq^{kn+r}$ 映到了 $\log_q a_n = kn + \log_q(Aq^r)$, 符合等差数列的形式. 当然, 这里我们利用到了对数的性质:

命题 1.15 (对数的性质)

设 $a, b, c > 0$, 则:

1. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$;
2. $\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c$;
3. $\log_a b^c = c \log_a b$, 这里允许 c 为任意实数;
4. $\log_{a^c} b = \frac{1}{c} \log_a b$, 这里允许 c 为任意实数;

5. 换底公式：$\log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b}$.

这些都是可以按定义验证的,只需要稍微用一下指数的性质:

命题 1.16 (指数的性质)

设 $a > 0, m, n \in \mathbb{R}$[a], 则:

1. $(a^m)^n = a^{mn}$;
2. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

[a]注意,这里比起一开始我介绍的有理数幂,扩展到了实数幂,因此它的作用更加广泛

这个命题的证明不作要求,在学习了选修的知识后你可以自行证明. 你可以默认它是对的,然后用它来证明刚才的命题.

于是利用对数的性质,我们可以给出 $\log_q a_n$ 的表达式,见上面.

当然,你也可以通过指数映射,把一个等差数列映到等比数列去. 这些都是我们之后要讨论的,这里不宜过多讨论.

最后我们介绍一类由等差数列和等比数列衍生出来的数列.

设 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$ 为等比数列. 我们定义 $c_n = a_n b_n$, 也就是说, $\{c_n\}$ 是一个等差数列乘等比数列得到的. 它的通项可以写为:

$$c_n = a_n b_n = (a_1 + (n-1)d) b_1 q^{n-1}.$$

我们关心它的前 n 项和的求法. 这里仍然可以利用错位相减法.

$$S_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n,$$

我们两边乘以 q, 得到

$$qS_n = a_1 b_1 q + a_2 b_2 q + \cdots + a_n b_n q = a_1 b_2 + a_2 b_3 + \cdots + a_n b_{n+1}.$$

作差, 得到

$$\begin{aligned}(1-q)S_n &= a_1 b_1 + (a_2 - a_1) b_2 + (a_3 - a_2) b_3 + \cdots + (a_n - a_{n-1}) b_n - a_n b_{n+1} \\ &= a_1 b_1 + d b_2 + d b_3 + \cdots + d b_n - a_n b_{n+1}.\end{aligned}$$

中间那部分明显是个等比数列求和. 我们之前对于等比数列求和时运用的错位相减法中, $d = 0$, 因此中间那里直接没了. 你可以将之前的结论视为本结论的特殊情况. 于是有

$$(1-q)S_n = a_1 b_1 + d b_1 q \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} - (a_1 + (n-1)d) b_1 q^n,$$

$$S_n = \frac{a_1 b_1}{1-q} + d b_1 q \frac{1 - q^{n-1}}{(1-q)^2} - (a_1 + (n-1)d) b_1 \frac{q^n}{1-q}.$$

我们没有必要再做进一步的整理. 这个结论不需要记忆,你只需要掌握我们如何推导的即可.

注 在之前你可能觉得裂项法的确不错,但也没简便到哪去. 但是在这里,我觉得,裂项法简直是妖孽一般的存在,我展示给你看:

我们猜测 b_n 仍然长成一个等差乘等比的样子 (此 b_n 非彼 b_n, 这里的 b_n 是我们之前在等差数列那

里介绍裂项法时提到的 b_n, 不是刚才的等比数列的 b_n). 不妨猜测 $b_n=(kn+t)b_1q^{n-1}$, 于是

$$\begin{aligned}c_n=b_{n+1}-b_n&=(k(n+1)+t)b_1q^n-(kn+t)b_1q^{n-1}\\&=b_1q^{n-1}[q(k(n+1)+t)-(kn+t)]\\&=b_1q^{n-1}[k(q-1)n+qk+qt-t].\end{aligned}$$

然后对比系数得到:

$$\begin{cases}k(q-1)=d,\\qk+qt-t=a_1-d\end{cases}.$$

从而 $k=\frac{d}{q-1}$, $t=\frac{(q-1)a_1-(2q-1)d}{(q-1)^2}$.

于是

$$\begin{aligned}S_n=b_{n+1}-b_1&=(kn+k+t)b_1q^n-(k+t)b_1\\&=\left(\frac{d}{q-1}n+\frac{(q-1)a_1-qd}{(q-1)^2}\right)b_1q^n-\frac{(q-1)a_1-qd}{(q-1)^2}b_1.\end{aligned}$$

咱就不继续化简了, 反正是这个意思. 你看着最后长得比较复杂, 其实计算量比上面小多了.

1.3.3 数列的性质

这一小节主要讨论数列的相关性质. 放轻松, 这小节是轻松愉悦的.

1.3.3.1 有界性

首先你得理解什么叫有界. 有界, 就是有边界, 有范围. 向上, 有上界; 向下, 有下界.

定义 1.33 (数列的有界性)

设有数列 $\{a_n\}$, 若存在实数 M, 使得

$$\forall\, n\in\mathbb{N}_+,\ a_n\le M,$$

则称 $\{a_n\}$ 上有界 **(Upper bounded)**, M 为 $\{a_n\}$ 的上界 **(Upper bound)**. 类似地, 若存在实数 m, 使得

$$\forall\, n\in\mathbb{N}_+,\ a_n\ge m,$$

则称 $\{a_n\}$ 下有界 **(Lower bounded)**, m 为 $\{a_n\}$ 的下界 **(Lower bound)**.
若 $\{a_n\}$ 上下均有界, 则称 $\{a_n\}$ 有界 **(Bounded)**, 反之称 $\{a_n\}$ 无界 **(Unbounded)**. ♣

有一说一, 在说数列的有界性之前, 我应该先介绍集合的有界性, 但这个概念我干脆丢到第六章第一节去了, 和序关系一块讲. 不过我现在这么定义也不影响大家理解, 举几个例子大家就会很明白了.

例题 1.9

1. 常数列 $c,c,\cdots,c,\cdots$ 有界, 不大于 c 的数均为下界, 不小于 c 的数均为上界.
2. 自然数列 $1,2,\cdots,n,\cdots$ 下有界, 不大于 1 的数均为它的下界. 但它上无界, 因为你可以预见它跑到无穷去了.
3. 等比数列 $1,-1,1,\cdots,(-1)^{n-1},\cdots$ 有界, 不大于 -1 的数均为它下界, 不小于 1 的数均为它上界.

事实上关于有界这件事有很多都可以讲, 但不是现在. 定义本身也挺简单的, 无需多提. 不过你可以注意一下:

命题 1.17

若 M 为数列 $\{a_n\}$ 的上界, 则任何比 M 大的数均为 $\{a_n\}$ 上界; 若 m 为数列 $\{a_n\}$ 的下界, 则任何比 m 小的数均为 $\{a_n\}$ 下界.

建议你自行验证. 这件事情告诉我们, 上界和下界如果存在, 则并不唯一.

1.3.3.2 单调性

什么是单调呢? 说到单调, 你可能想到一个词叫 "一成不变", 不错, 单调反映的的确是一成不变, 不过说的不是值一直不变, 而是值的变化一成不变. 增, 就一直增下去, 减, 就一直减下去.

定义 1.34 (数列的单调性)

设有数列 $\{a_n\}$, 如果它满足:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_+,\ a_n \leq a_{n+1}, \tag{1.39}$$

我们就说 $\{a_n\}$ 是单调增加的 **(Increasing)**, 简称单调增, 如果上述不等式中不等号是严格的, 即 $a_n < a_{n+1}$, 那么我们说 $\{a_n\}$ 是严格单调增的 **(Strictly increasing)**.

类似的, 如果 $\{a_n\}$ 满足:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_+,\ a_n \geq a_{n+1}, \tag{1.40}$$

我们就说 $\{a_n\}$ 是单调减小的 **(Decreasing)**, 简称单调减, 如果上述不等式中不等号是严格的, 即 $a_n > a_{n+1}$, 那么我们说 $\{a_n\}$ 是严格单调减的 **(Strictly decreasing)**.

如果 $\{a_n\}$ 是单调增或是单调减的, 我们就说 $\{a_n\}$ 是单调的 **(Monotonic)**, 如果 $\{a_n\}$ 是严格单调增或是严格单调减的, 那就说 $\{a_n\}$ 是严格单调的 **(Strictly monotonic)**.

这当然也是一个很简单的概念, 拿来形容数列的值是怎么变化的. 单调增, 就是说数列的值越来越大; 单调减, 就是说数列的值越来越小. 举个例子:

例题 1.10

1. 常数列 $c, c, \cdots, c, \cdots$ 是单调的, 它单调增, 也单调减, 但不严格单调;
2. 自然数列 $1, 2, \cdots, n, \cdots$ 是单调增的, 也是严格单调增的;
3. 等比数列 $1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots$ 不是单调的.

单调本身没啥. 真正的用途要到后面才看得出来. 你可以思考两个小结论, 权且当练习了, 但我不要求你做, 毕竟这没啥难度:

命题 1.18

若 $d > 0$, 则等差数列 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 单调增; 若 $d < 0$, 则等差数列 $\{a_n\}$ 单调减.

命题 1.19

单调增的数列必有下界, 单调减的数列必有上界.

1.3.3.3 周期性

周期也很顾名思义, 指的是数列的项按周期性规律变化.

定义 1.35 (数列的周期性)

设有数列 $\{a_n\}$, 如果存在正整数 T, 使得:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_+,\ a_{n+T} = a_n, \tag{1.41}$$

我们就称 $\{a_n\}$ 为周期数列 **(Periodic sequence)**, T 称为数列的周期 **(Period)**. 显然, 若 T 是数列的周期, 那么 $nT,\ n \in \mathbb{N}_+$ 均为数列的周期, 因此周期不是唯一的. 我们称这样的最小的 T 为最小正周期 **(Fundamental period)**. 以后我们说数列的周期, 若不加说明, 一般指其最小正周期. ♣

这么个定义就已经把事情说得很清楚了. 也没啥要特别解释的. 举几个例子吧.

例题 1.11

1. 常数列 $c, c, \cdots, c, \cdots$ 是周期数列, 最小正周期为 1;
2. 自然数列 $1, 2, \cdots, n, \cdots$ 不是周期数列;
3. 等比数列 $1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots$ 是周期数列, 最小正周期是 2.

周期性并不深刻. 我给一个小结论供你思考思考:

命题 1.20

周期数列必然有界. 单调的周期数列必为常数列. ♠

好啦, 数列的性质到这里就差不多了. 这些性质在后面会马上用到, 但在此之前我们先介绍一下递推数列.

1.3.4 递推数列

啥叫递推数列呢? 所谓递推数列, 指的是利用**递推关系 (Recursion relation)** 与给定的数列若干项来得出数列的通项公式. 这一小节主要是向你介绍几种常见的递推公式与它们的通项公式的推导方式.

1.3.4.1 一阶常系数线性递推数列

所谓**一阶常系数线性递推数列 (Linear recurrence with constant coefficients)**, 指的是满足如下形式的递推数列:

$$a_{n+1} = ca_n + d,\ c, d \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_+, \tag{1.42}$$

且 a_1 给定. 如果 a_{n+1} 前面有系数, 你可以在两边除以这个系数, 从而得到刚才的式子. 一阶指的是这个递推式仅涉及某一项与它的前一项, 常系数指各个系数均为常数, 线性指次数为 1.

我们也说过, 我们要推导一个陌生的东西, 往往会选择将其转化为我们已知的. 我们现在已知等差数列和等比数列, 因此我们想着去把这个递推公式转换成等差数列或者等比数列. 两种都是可行的, 我们依次介绍:

1. 转化为等差数列

假如 $c = 1$, 那么 $a_{n+1} = a_n + d$, 这就显然是一个等差数列, 我们熟知它的通项公式. 但一般来讲 $c \neq 1$, 因此我们需要作适当的变换来构造等差数列的结构.

我们将两边除以 c^{n+1}, 得到:

$$\frac{a_{n+1}}{c^{n+1}} = \frac{a_n}{c^n} + \frac{d}{c^{n+1}}. \tag{1.43}$$

如果我们重新令一个数列, 令 $b_n = \frac{a_n}{c^n}$, 代入上式得到:

$$b_{n+1} = b_n + \frac{d}{c^{n+1}}. \tag{1.44}$$

这个就长得比较好, 毕竟系数都是 1 了, 不过常数项此时是个变动的. 无妨, 你且看我操作:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= b_n + \frac{d}{c^{n+1}}, \\ b_n &= b_{n-1} + \frac{d}{c^n}, \\ &\cdots, \\ b_2 &= b_1 + \frac{d}{c^2}. \end{aligned}$$

我们把这些式子全部加起来, 得到:

$$b_{n+1} + b_n + \cdots + b_2 = b_n + b_{n-1} + \cdots + b_1 + \frac{d}{c^{n+1}} + \frac{d}{c^n} + \cdots + \frac{d}{c^2}.$$

两边可以消去 $b_n + \cdots + b_2$, 后面跟了个等比数列求和, 整理一下有

$$b_{n+1} = b_1 + \frac{d}{c^2}\frac{\frac{1}{c^n} - 1}{\frac{1}{c} - 1},$$

即

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{c^{n+1}} &= \frac{a_1}{c} + \frac{d}{c^2}\frac{1 - c^n}{c^{n-1}(1 - c)}, \\ a_n &= a_1 c^{n-1} + \frac{d(1 - c^{n-1})}{1 - c}. \end{aligned}$$

这就给出了 $c \neq 1$ 的情况下, 一阶常系数线性递推数列的通项公式.

2. 转化为等比数列

假如 $d = 0$, 那么 $a_{n+1} = ca_n$, 这就显然是一个等比数列, 我们熟知它的通项公式. 但一般来讲 $d \neq 0$, 因此我们需要作适当地变换来构造等比数列的结构.

如果你把 a_n 看作自变量, a_{n+1} 看作因变量, 那么这就是你在初中学过的一次函数, 它是一条不过原点的直线. 而我们期待的等比数列的递推式是一条过原点的直线. 因此我们可以选择适当的平移, 将已有的式子变为目标的式子.

设 $b_n = a_n - \lambda$, 则

$$b_{n+1} + \lambda = c(b_n + \lambda) + d.$$

我们期待做了一次代换之后, 能把常数项消去, 这样的 λ 应该满足:

$$\lambda = c\lambda + d,$$

这个方程我们称为一阶常系数线性递推数列的**特征方程**, λ 称为**特征根**. 这种方法又叫**特征根法**, 在之后我们仍会用到.

于是解出 $\lambda = \frac{d}{1-c}$, 而 $b_{n+1} = cb_n$ 直接推出 $b_n = c^{n-1}b_1$, 我们把关系代入得到:

$$\begin{aligned} a_n - \frac{d}{1-c} &= c^{n-1}(a_1 - \frac{d}{1-c}), \\ a_n &= a_1 c^{n-1} + \frac{d(1 - c^{n-1})}{1 - c}. \end{aligned}$$

两种方法结果理所应当都是一样的, 不过第二种的计算过程比第一种要简单一些. 它们的思想同等重要.

第一种方法其实也是错位相减法. 它通常用于求一阶线性递推数列:

$$a_{n+1} = ca_n + f(n),\ \forall\, n \in \mathbb{N}_+.$$

这里 f 是一个 $\mathbb{N}_+ \to \mathbb{R}$ 的映射[16]. 想求通项公式的套路是类似的, 我们先将两边除以 c^{n+1} 得到

$$\frac{a_{n+1}}{c^{n+1}} = \frac{a_n}{c^n} + \frac{f(n)}{c^{n+1}},$$

然后令 $b_n = \frac{a_n}{c^n}$, 有

$$b_{n+1} = b_n + \frac{f(n)}{c^{n+1}},$$

利用错位相减法, 得到

$$b_{n+1} = b_1 + \frac{f(n)}{c^{n+1}} + \frac{f(n-1)}{c^n} + \cdots + \frac{f(1)}{c^2}.$$

于是你只需要计算出 $\frac{f(n)}{c^{n+1}} + \frac{f(n-1)}{c^n} + \cdots + \frac{f(1)}{c^2}$, 就可以得到 $\{b_n\}$ 的通项公式, 从而得到 $\{a_n\}$ 的通项公式. 这里涉及到一些求和的技巧, 我们会在第五节介绍.

类似的你可以思考另一种一阶线性递推数列的求法:

$$a_{n+1} = p(n)a_n + d,\ \forall\, n \in \mathbb{N}_+.$$

建议试试特征根法, 不过此时 λ 也与 n 相关, 不是一个常数. 你甚至可以试试更一般的:

$$a_{n+1} = p(n)a_n + f(n),\ \forall\, n \in \mathbb{N}_+.$$

你自己思考这些问题对你理解上面的方法是很有帮助的.

1.3.4.2 二阶常系数线性递推数列

所谓**二阶常系数线性递推数列 (Quadratic recurrence with constant coefficients)**, 指的是满足如下形式的递推数列:

$$a_{n+2} = ba_{n+1} + ca_n,\ b, c \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_+, \tag{1.45}$$

且 a_1, a_2 给定. 如果 a_{n+2} 前面有系数, 你可以在两边除以这个系数, 从而得到刚才的式子. 如果带有常数项, 可以通过平移代换来消去常数项. 所以我们只需要讨论上式的情况.

我们的思路是类似的. 不过这里你无法将它转化为等差数列, 我们考虑将其转化为等比数列. 然而等比数列是一阶递推式, 这是二阶递推式, 因此我们在处理数列的时候, 新数列 $\{b_n\}$ 应该同时包含 $\{a_n\}$ 的两项, 这样才能将二阶降为一阶. 我们的做法是这样的:

我们希望在将递推式作适当变形后, 能够变为:

$$a_{n+2} - \lambda a_{n+1} = \mu(a_{n+1} - \lambda a_n),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \tag{1.46}$$

的形式, 这样我们可以令 $b_n = a_{n+1} - \lambda a_n$, 就有 $b_{n+1} = \mu b_n$, 从而得到一个等比数列. 那么 λ, μ 到底是多少呢? 既然我们这个式子是从原式变形得来, 我们整理后应当能得到原来的式子. 我们合并 "同类项" 得到:

$$a_{n+2} = (\lambda + \mu)a_{n+1} - \lambda\mu a_n.$$

[16] 其实我这里管它叫函数更合适, 可惜我们还没有讲. 你可以把函数简单地理解为数集到数集的映射.

对比系数, 我们知道

$$\begin{cases} \lambda + \mu &= b, \\ -\lambda\mu &= c \end{cases}. \tag{1.47}$$

这和韦达定理的形式相一致, 因此 λ, μ 实际上是方程:

$$x^2 = bx + c \tag{1.48}$$

的解 (如果存在), 这个方程称为二阶常系数线性递推数列的特征方程. 你注意到这和我们刚才推导一阶常系数线性递推数列发生的事情很像, 我们用一个变量 x 替代了递推式中的数列各项, 得到一个关于 x 的方程.

当然, 根据你初中学过的知识, 这个方程不一定有实数解. 对于 $\Delta = b^2 + 4c < 0$ 的情况, 我们另做讨论, 但不是现在. 毕竟这牵扯到我们下节要学的东西. 等你学完下节, 可以回来自己动手推推. 我们只考虑它有实数解的情况. 而 Δ 是否为零所对应的两种情况, 通项公式的形式其实有点差别, 我们分别讨论:

1.$\Delta = 0$

此时方程只有一个解, 我们记这个解为 α, 那么 $\lambda = \mu = \alpha$, 我们代回方程 (1.46), 得到:

$$b_{n+1} = \alpha b_n. \tag{1.49}$$

于是 $b_{n+1} = b_1\alpha^n$, 而 $b_1 = a_2 - \alpha a_1$, 所以 $b_{n+1} = (a_2 - \alpha a_1)\alpha^n \Rightarrow b_n = (a_2 - \alpha a_1)\alpha^{n-1}$, 这就给出了 $\{b_n\}$ 的通项公式, 同时也得到了 $\{a_n\}$ 的一阶线性递推数列:

$$a_{n+1} - \alpha a_n = (a_2 - \alpha a_1)\alpha^{n-1}, \tag{1.50}$$

即

$$a_{n+1} = \alpha a_n + (a_2 - \alpha a_1)\alpha^{n-1}. \tag{1.51}$$

这就是我们上面提到的错位相减法的应用实例. 我们在两边除以 α^{n+1}, 得到

$$\frac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}} = \frac{a_n}{\alpha^n} + (a_2 - \alpha a_1)\frac{1}{\alpha^2},$$

求和立得

$$\frac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}} = \frac{a_1}{\alpha} + (a_2 - \alpha a_1)\frac{n}{\alpha^2},$$

整理一下得到:

$$a_n = a_1\alpha^{n-1} + (a_2 - \alpha a_1)n\alpha^{n-2} = \left(\frac{a_1}{\alpha} + \frac{a_2 - \alpha a_1}{\alpha^2}n\right)\alpha^n. \tag{1.52}$$

这就是我们的通项公式. 这里 $\alpha = \frac{b}{2}$.

事实上你可以把它概括成 $a_n = (An + B)\alpha^n$ 的样子. 然后将 $n = 1, 2$ 的情况代入, 解一个二元一次方程组得到 A, B, 即待定系数法. 毕竟那个系数不是很好记. 现推也比较麻烦, 不如待定系数.

注 当然, 这个地方有更好的处理方式, 你可以设想一个 a_0 的存在, 它定义为 $a_2 - a_1$, 于是你可以将 $n = 0, 1$ 代入, 这样得到的二元一次方程组更加好解. 如果你觉得这不严谨, 那你可以去取一个扩张映射, 从 $\mathbb{N}$ 映到 $\mathbb{R}$, 这样就很自然地包含了 a_0 这一项.

2.$\Delta \neq 0$

此时方程有两个解, 我应当提醒你, 不管 λ, μ 如何对应两个解, 最终结果都是一样的. 所以你可以随

意代入. 我们不妨设两个解为 α, β, 令 $\lambda = \alpha,\ \mu = \beta$, 我们代回方程 (1.46), 得到:

$$b_{n+1} = \beta b_n. \tag{1.53}$$

于是 $b_{n+1} = b_1\beta^n$, 而 $b_1 = a_2 - \alpha a_1$, 所以 $b_{n+1} = (a_2 - \alpha a_1)\beta^n \Rightarrow b_n = (a_2 - \alpha a_1)\beta^{n-1}$, 这就给出了 $\{b_n\}$ 的通项公式, 同时也得到了 $\{a_n\}$ 的一阶线性递推数列:

$$a_{n+1} - \alpha a_n = (a_2 - \alpha a_1)\beta^{n-1}, \tag{1.54}$$

即

$$a_{n+1} = \alpha a_n + (a_2 - \alpha a_1)\beta^{n-1}. \tag{1.55}$$

两边除以 α^{n+1}, 得到

$$\frac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}} = \frac{a_n}{\alpha^n} + (\frac{a_2 - \alpha a_1}{\alpha\beta})(\frac{\beta}{\alpha})^n, \tag{1.56}$$

于是求和, 得到

$$\frac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}} = \frac{a_1}{\alpha} + (\frac{a_2 - \alpha a_1}{\alpha\beta})\frac{\beta}{\alpha}\frac{(\frac{\beta}{\alpha})^n - 1}{\frac{\beta}{\alpha} - 1}, \tag{1.57}$$

整理, 得

$$a_n = a_1\alpha^{n-1} + (a_2 - \alpha a_1)\frac{\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}}{\beta - \alpha} = \frac{\beta a_1 - a_2}{\beta - \alpha}\alpha^{n-1} + \frac{a_2 - \alpha a_1}{\beta - \alpha}\beta^{n-1}. \tag{1.58}$$

这就给出了通项公式. 你可以验证, 它关于 α, β 是对称的, 即, 你交换 α, β 的位置, 表达式不变. 因此我们说, 无论你一开始怎么分配 λ, μ, 最后算出来都是一样的. 不过和前面同理, 这个通项公式并不好记, 因此我们把它概括称 $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$, 然后通过待定系数法求解.

二阶常系数线性递推数列的推导方式很多, 这里仅介绍特征根法. 在学习了线性空间后, 你将学习到新的方法.

此外, 你也可以试试思考 n 阶常系数线性递推数列如何推导. 我们的思想是一样的, 逐步降低递推式的阶. 不过计算量会比较大, 这里不过多介绍.

1.3.4.3 一阶分式递推数列

我们所说的一阶分式递推数列, 指的是这样一种递推公式:

$$a_{n+1} = \frac{aa_n + b}{ca_n + d},\ a, b, c, d \in \mathbb{R}. \tag{1.59}$$

它的结构和我们之前所遇到的都不太一样. 要想解决它, 我们需要先从简单一点的情况看起.

注 如果你移个项, 就会得到

$$ca_{n+1}a_n + da_{n+1} - aa_n = b$$

所以形如 $Aa_{n+1}a_n + Ba_{n+1} + Ca_n = D$ 的递推式可以转化为一阶分式递推数列.

我们先来看这么一个例子:

例题 1.12 已知 $\{a_n\}$ 的递推公式为

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1},$$

且 $a_1 = 1$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

我们采取的策略是, 求个倒数:

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 1}{a_n} = \frac{1}{a_n} + 1.$$

看见没, 这玩意是等差数列的结构, 设 $b_n=\frac{1}{a_n}$, 那么 $b_{n+1}=b_n+1$, $b_1=1$, 从而 $b_n=n$, $a_n=\frac{1}{n}$.

因此我们知道, 对于 $b=0$ 的情况, 我们可以在两边取倒数来构造一阶常系数线性递推数列. 那我们现在的任务就是, 如何将 $b\neq 0$ 的情况转化为 $b=0$ 的情况. 很简单, 平移呗.

我们设 $b_n=a_n-\lambda$, 代入, 得:

$$b_{n+1}+\lambda=\frac{a(b_n+\lambda)+b}{c(b_n+\lambda)+d},$$

整理为:

$$b_{n+1}=\frac{(a-c\lambda)b_n+[b+a\lambda-\lambda(d+c\lambda)]}{cb_n+(d+c\lambda)}.$$

现在我们要求分子常数项为零, 即:

$$b+a\lambda-\lambda(d+c\lambda)=0,$$

你把它移个项发现, 它其实是这个方程:

$$\lambda=\frac{a\lambda+b}{c\lambda+d}. \tag{1.60}$$

这也很有意思, 它恰好也是把递推式中数列的项替换为 λ 得到的方程. 不过我们一般称这个方法为**不动点法**, 因为 λ 是映射 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\frac{ax+b}{cx+d}$ 的不动点, 即满足 $f(x)=x$ 的解. 不过恕我直言, 之前的特征根法某种意义上也可以算作不动点法, 只不过大家 (尤其是中学这群人) 喜欢分开叫. 你去观察一阶常系数线性递推数列, 发现我们实际上也是在求映射 $f(x)=cx+d$ 的不动点, 而对于二阶, 我们在求映射 $f(x)=x^2-bx-c$ 的不动点. 而且你发现, 只要我们在递推式两边减去这个不动点, 就能凑出来不错的结构. 不过对于一般的递推式 $a_{n+1}=f(a_n)$ 来讲, 我很难说这个结构长啥样, 大抵是因 f 而异的. 当你对一个数列递推式一筹莫展的时候, 就试试不动点吧. 当然, 实数不动点不一定存在, 就像我说二阶的那个特征方程不一定有实数解一样. 我们暂时不关心这类问题.

说回我们的问题, 我们解出这个分式方程 (其实就是个二次方程 $c\lambda^2+(d-a)\lambda-b=0$), 解的个数也有区别, 所以我们仍要进一步分类讨论:

1. 一个解

设解为 λ, 于是

$$b_{n+1}=\frac{(a-c\lambda)b_n}{cb_n+(d+c\lambda)},$$

两边取倒数, 则

$$\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{cb_n+(d+c\lambda)}{(a-c\lambda)b_n}=\frac{d+c\lambda}{a-c\lambda}b_n+\frac{c}{a-c\lambda}.$$

令 $c_n=\frac{1}{b_n}$, 就转化成了一阶线性递推数列, 接下来不再阐述, 你可以自行完善这个计算.

2. 两个解

设解为 λ,μ, 都代入, 得到:

$$b_{n+1}=\frac{(a-c\lambda)b_n}{cb_n+(d+c\lambda)}, \tag{1.61}$$

$$b_{n+1}=\frac{(a-c\mu)b_n}{cb_n+(d+c\mu)}. \tag{1.62}$$

此时你仍然可以沿用一个解的处理方式, 随便挑一个方程来继续求下去, 反正最后结果都一样. 但此时

我们有另外一种处理方式, 为了方便观察出结构, 我们写为原递推式:

$$a_{n+1}-\lambda=\frac{(a-c\lambda)a_n+(b-d\lambda)}{ca_n+d}, \tag{1.63}$$

$$a_{n+1}-\mu=\frac{(a-c\lambda)a_n+(b-d\mu)}{ca_n+d}, \tag{1.64}$$

接着我们把两式除一下:

$$\frac{a_{n+1}-\lambda}{a_{n+1}-\mu}=\frac{(a-c\lambda)a_n+(b-d\lambda)}{(a-c\mu)a_n+(b-d\mu)}=\frac{a-c\lambda}{a-c\mu}\frac{a_n+\frac{b-d\lambda}{a-c\lambda}}{a_n+\frac{b-d\mu}{a-c\mu}}.$$

你把刚才那个方程, $c\lambda^2+(d-a)\lambda-b=0$, 变形一下, 得到:

$$\begin{aligned}&c\lambda^2+(d-a)\lambda-b=0\\ \Rightarrow&\lambda(a-c\lambda)=-(b-d\lambda)\\ \Rightarrow&\lambda=-\frac{b-d\lambda}{a-c\lambda}.\end{aligned}$$

代入回去, 得到:

$$\frac{a_{n+1}-\lambda}{a_{n+1}-\mu}=\frac{a-c\lambda}{a-c\mu}\cdot\frac{a_n-\lambda}{a_n-\mu}. \tag{1.65}$$

这样我们就构造了等比数列. 具体细节我也不再讲述.

至于更多的一些常见的递推数列, 在学习后面的知识后会慢慢讲述.

1.3.5 数列的极限

先来看两个例子.

例题 1.13

1. 设数列 $\{a_n\}$, 通项公式为 $a_n=\frac{1}{n}$, 试描述 $\{a_n\}$ 在 n 足够大时的行为;
2. 设数列 $\{a_n\}$, 通项公式为 $a_n=n$, 试描述 $\{a_n\}$ 在 n 足够大时的行为.

我们无非关心 n 增加的时候, a_n 会跑哪去. 比如第一个数列, 当 n 特别大时, a_n 会很接近零. 用本小节的话讲, 就是 $\{a_n\}$ 的极限是零. 而对于第二个数列, 当 n 趋于无穷大时, a_n 也会趋于无穷, 用本小节的话来说, 就是极限不存在.

那么, 你大概对极限有了基本的印象, 即描述数列在项数趋于无穷时表现出来的性态. 但是光有印象是不够的, 我们更关心如何用数学语言, 严谨, 细致地描述数列极限的定义. 关键在于, 如何理解极限?

假如数列 $\{a_n\}$ 有极限 a, 那么当 $n\to\infty$ 时, a_n 就会趋于 a, 而趋于, 可以理解为充分靠近. 充分靠近, 就是和 a 的差值可以充分小, 小于任意给定的正实数.

定义 1.36 (数列的极限)

设有数列 $\{a_n\}$ 与实数 a, 我们称 a 为数列 $\{a_n\}$ 的极限 **(Limit)**, 若对于任意给定的正实数 ε, 都存在正整数 N, 只要 $n>N$, 就有 $|a_n-a|<\varepsilon$. 即:

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,N\in\mathbb{N}\ \text{s.t.}\ \forall\,n>N,\ |a_n-a|<\varepsilon. \tag{1.66}$$

♣

我们很喜欢管 (1.66) 叫 $\varepsilon-N$ 语言, 没啥原因, 就是因为这两个要素. 先给定一个界限 ε 来限制 $\{a_n\}$. 但无论这个界限 ε 多小, 限制多苛刻, 我们都会存在 N, 只要 $n>N$, a_n 就会跨过这个界限, 来和 a 贴贴. 所以 $\{a_n\}$ 的极限是 a. 一般来讲, ε 越小, N 越大. 我们要证明一个数列的极限是某个数, 只需要对于给定的实数 ε, 找到相应的 N 即可. 比方说对于例1.13(1), 我们如何证明 $\{a_n\}$ 的极限是 0 呢?

对 $\forall\,\varepsilon>0$, 取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$[17], 那么对 $\forall\,n>N$, 有:

$$|a_n-0|=|a_n|=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon.$$

故 $\{a_n\}$ 的极限为 0.

对于那些有极限的数列, 我们有专门的名字:

定义 1.37 (收敛与发散)

若 $\{a_n\}$ 的极限存在, 则称数列收敛 **(Converge)**. 若数列的极限为 a, 我们称数列收敛到 a, 记为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a. \tag{1.67}$$

我们也常常记为 $a_n\to a\ (n\to\infty)$, 读作 "当 n 趋于无穷大时, a_n 趋于 a". 若数列极限不存在, 我们称其发散 **(Diverge)**. ♣

所以我们说 $\{a_n\}$ 收敛, 指的是:

$$\exists\,a\in\mathbb{R},\ \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,N\in\mathbb{N}\ \text{s.t.}\ \forall\,n>N,\ |a_n-a|<\varepsilon.$$

这是容易的. 当然, 数列收敛也有几何意义, 它指的是, 对于任意一个以 a 为中心的 ε-邻域 $U(a,\varepsilon)$, 都存在一个正整数 N, 只要 $n>N$, a_n 就会落在这个邻域内, 因此只有至多有限项落在邻域外:

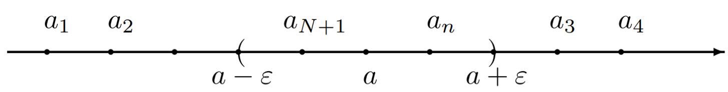


图 1.11: 数列收敛的几何表示

我们不妨思考一下, 如何描述数列发散, 即数列极限不存在? 还记得我们第一节讲过的吗, 对于含有 "∃" 和 "∀" 的命题, 写出它的否定是一件十分机械化的事情.

$$\forall\,a\in\mathbb{R},\ \exists\,\varepsilon>0,\ \forall\,N\in\mathbb{N},\ \exists\,n>N\ \text{s.t.}\ |a_n-a|>\varepsilon.$$

几何上讲, 数列发散指的是存在一个以 a 为中心的邻域, 使得邻域外有无穷多项.

还是以刚才的例1.13(2) 为例, 我们如何说明 $\{a_n\}$ 发散?

对 $\forall\,a\in\mathbb{R}$, 取 $\varepsilon=1$, 则对 $\forall\,N\in\mathbb{N}$, 取 $n=\max\{N+1,[a]+2\}$, 那么 $|a_n-a|=|n-a|>1$, 于是就发散.

事实上你很容易默认一个事实:

命题 1.21 (极限的唯一性)

若数列收敛, 则极限唯一. ♠

原因很简单, 当一个数列有极限, 那么在 n 充分大的时候, 它会被限制在那个数附近, 且 n 越大, 束缚越强, 以至于远离其它任何数. 或者说, 你不能同时充分靠近两个数, 这是做不到的.

证明 考虑收敛数列 $\{a_n\}$, 假设其有两个极限 $a,b,\ a\neq b$, 不妨设 $a>b$, 那么由定义:

$$\forall\epsilon>0,\ \exists\,N_1\in\mathbb{N}\ \text{s.t.}\ \forall\,n>N_1,\ |a_n-a|<\varepsilon,$$

[17] $[x]$ 是 Gauss 函数, 它将 x 映射到它的整数部分 $[x]$. 所以 $[x]+1$ 其实是比 x 大的最小正整数.

同样的，有

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\, N_2 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall\, n > N_2,\ |a_n - b| < \varepsilon.$$

于是我们取 $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$，$N = \max\{N_1, N_2\}$，那么对 $n > N$，上面两个式子都成立，于是稍微利用一下三角不等式：

$$|a-b| \le |a_n - a| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = a - b.$$

矛盾，因此极限唯一.

当然咱也有一些比较具象化的理解方法. 你可以想象一下，数列其实就是实数轴上的一些点，随着 n 的增大，点的分布越来越稠密，你可以找到包含 a 的一个邻域 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$，把这些点全部包含其中，而且这个邻域会越来越小. 如果 b 也是极限，那你同样可以找到一个 b 的 $\varepsilon-$ 邻域，把那些点同样囊括其中. 但 ε 很小的情况下 (小于 $\frac{|a-b|}{2}$)，这两个邻域是不交的，你显然不能同时落在两个不交的集合，就好比你不能同时身处南极和北极，因此 b 是不可以存在的.

注 事实上对于更抽象的结构来说，极限不一定是唯一的. 在以后你会接触到，度量结构上的极限是唯一的.

以及，极限反应的是数列变化的特征，所以你改变有限项的值不影响数列的敛散性：

命题 1.22

改变数列有限多项的值不影响数列的敛散性，且收敛数列的极限不变.

证明 若 $\{a_n\}$ 收敛，设极限为 a，$\{a_n\}$ 的第 $i_1, \cdots, i_n$ 项的值被改变后得到新数列 $\{a'_n\}$，则对 $\forall\, \varepsilon > 0$，对原数列 $\{a_n\}$，存在 $N_1 \in \mathbb{N}$，使得 $n > N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$，那么取 $N = \max\{N_1, i_n\}$，则对 $\forall\, n > N$，$|a'_n - a| = |a_n - a| < \varepsilon$，从而 $\{a'_n\}$ 收敛，且极限不变.

若 $\{a_n\}$ 发散，如果 $\{a_n\}$ 改变 n 项的值之后收敛，记新数列为 $\{a'_n\}$，那么将那 n 项值改回去之后则还原为 $\{a_n\}$，根据刚才的结论，收敛数列改变有限多项的值仍然收敛，故 $\{a_n\}$ 收敛，这和一开始假设矛盾. 故 $\{a'_n\}$ 仍然发散.

一个收敛的数列往往具有比较好的性质.

命题 1.23

一个收敛数列必然有界.

你可以想象，既然数列收敛，那么从你取 ε 开始，N 后面的所有项就被限制在了 $a-\varepsilon$ 到 $a+\varepsilon$ 间，即 $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$，$\forall\, n > N$. 因此后面是有界的，而前面有限个数当然是有界的，因为你可以直接取它们的最大值和最小值. 所以合并起来就是有界的.

证明 设 $\{a_n\}$ 收敛到 a，对 $\varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall\, n > N,\ |a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

而对 $n = 1, 2, \cdots, N$，设 $M_1 = \max\{a_1, \cdots, a_n\}$，$m_1 = \min\{a_1, \cdots, a_n\}$，于是取 $M = \max\{M_1, a+\varepsilon\}$，$m = \min\{m_1, a-\varepsilon\}$，则对 $\forall\, a_n$，$m \le a_n \le M$，故 $\{a_n\}$ 有界.

一个收敛数列，在极限附近的值应该和极限表现出类似的大小关系，毕竟它们非常接近.

命题 1.24

设 $\{a_n\}$ 收敛到 a.

1. 若 $a > l$ $(a < l)$，则对充分大的 n，有 $a_n > l$ $(a_n < l)$；
2. 若对充分大的 n，有 $a_n \le l$ $(a_n \ge l)$，那么 $a \le l$ $(a \ge l)$.

以上两条性质称为极限的保序性.

证明

1. 以 $a > l$ 为例, 取 $\varepsilon = a - l$, 于是存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 若 $a_n \geq a$, 则 $a_n > l$ 显然成立; 若 $a_n < a$, 那么 $|a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a - a_n < \varepsilon = a - l \Rightarrow l < a_n$.
2. 反证即可. 如果 $a_n \leq l$, 但 $a > l$, 那么由刚才的结论, $a > l$ 指出对充分大的 n, 有 $a_n > l$, 这一点和我们条件是矛盾的. 因此 $a_n \leq l \Rightarrow a \leq l$, 另一点类似.

于是根据命题1.23, 你很容易体会到它的一个推论:

推论 1.4

无界数列必不收敛.

证明也很简单, 反证嘛. 理解起来也很好想, 既然是一个无界数列, 当 n 增加的时候, 数列的项都跑没影了, 怎么会停留在某个具体的数旁边呢? 比如自然数 $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$, 显然这玩意没有极限, 因为人家稳步而坚定地前进, 不会停留驻足在任何过客身旁.

但这是否意味着有界数列就一定收敛?

显然不是. 即使你把数列限制在一个范围, 数列仍然可以很不安分地在这个范围里面到处跑, 而不是乖乖地聚拢到某个数旁边. 比如 $a_n = (-1)^n$, 它就在 $-1, 1$ 两个数间来回摆动, 不停留在任何一个数旁. 所以有界性只是收敛性的必要条件, 而不是充分条件. 从描述上你就可以看出来有界性比收敛性更加广泛. 在第六章你将学习到, 一个单调有界的数列将是收敛的.

此外我应当提醒你, 在命题1.24(2) 中, 将前面的不等号严格化, 并不意味着后面的不等号也要严格化. 即使 $a_n \leq l$, 仍然可以有 $a = l$, 比如 $a_n = \frac{1}{n} \geq 0$, 但它的极限是 0.

接下来我们介绍一下极限的代数性质:

定理 1.3 (极限的运算律)

设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均为收敛数列, 极限分别为 a, b, 那么通过四则运算定义的数列 $\{a_n \pm b_n\}, \{a_n b_n\}, \{\frac{a_n}{b_n}\}$ 均收敛, 且极限值为:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = ab$, 特别的, 若 $\{b_n\}$ 为常数列, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} b a_n = b \lim\limits_{n\to\infty} a_n = ba$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$, 此时要求 $b \neq 0$.

这份证明虽然只是极限定义的基础应用, 但里面会有一点点小技巧, 你在初次接触的时候可以多花点时间体会一下.

证明 在正式证明前我应当再次提醒你, 证明这个定理其实有两部分, 第一, 我们要证明这四个新的数列收敛; 第二, 我们要证明极限等于给定值. 不过如果你直接证明数列收敛到给定值, 那么其实就相当于也把前者给证了, 因此我们直接证明数列收敛到给定值.

1. 这里只证相加, 相减留作练习.

   要证对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 只要 $n > N$, 就有 $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$. 由已知条件, 存在 N_1, N_2 满足:

$$n > N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

以及

$$n > N_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 就有:

$$n > N \Rightarrow |(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

于是 $a_n + b_n$ 收敛到 $a + b$. [18]

2. 要证明对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N 满足定义式, 我们先对不等式作一些处理, 使其和我们已有的条件联系起来:

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| = |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b|.$$

而我们知道收敛数列必然有界, 因此存在 $M > 0$, 满足 $|a_n| \leq M$ 对所有 n 都成立, 于是上面式子进一步放缩:

$$|a_n b_n - ab| \leq M|b_n - b| + |b||a_n - a|.$$

现在里面的 M 和 $|b|$ 均为常数, $|b_n - b|$ 和 $|a_n - a|$ 都是可以控制的. 于是我们可以找到相应的范围:

由收敛性, 存在 N_1, N_2 满足:

$$n > N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|b|},$$

和

$$n > N_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

于是取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 就有:

$$n > N \Rightarrow |a_n b_n - ab| \leq M|b_n - b| + |b||a_n - a| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |b| \cdot \frac{\varepsilon}{2|b|} = \varepsilon.$$

于是这就指出 $a_n b_n$ 收敛到 ab

3. 我们的方法是类似的, 开头那些废话咱就不写了, 直接开始处理. 过程也简洁点, 只指出关键的部分, 完整过程你自己补充.

$$\begin{aligned}|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}| &= |\frac{ba_n - ab_n}{b_n b}| = \frac{|ba_n - ab_n|}{|b_n||b|} \\ &\leq \frac{|ba_n - ab| + |ab - ab_n|}{|b_n||b|} = \frac{|b||a_n - a| + |a||b_n - b|}{|b_n||b|}.\end{aligned}$$

而 b_n 极限是 b, 如果我取 $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$, 那么对于充分大的 n, 就有 $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$, 从而 $b - \frac{|b|}{2} < b_n < b + \frac{|b|}{2}$, 于是 $\frac{|b|}{2} < |b_n| < \frac{3|b|}{2}$. 于是上面式子进一步放缩:

$$|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}| < \frac{|b||a_n - a| + |a||b_n - b|}{\frac{|b|}{2} \cdot |b|} = \frac{2}{|b|}|a_n - a| + \frac{2|a|}{|b|^2}|b_n - b|.$$

于是你就可以安心地对 $|a_n - a|$ 和 $|b_n - b|$ 进行约束, 前者要求 $|a_n - a| < \frac{|b|\varepsilon}{4}$, 后者要求 $|b_n - b| < \frac{|b|^2\varepsilon}{4|a|}$. 就搞定了.

当然你也可以把 $\frac{a_n}{b_n}$ 看成 $a_n \cdot \frac{1}{b_n}$, 然后先证 $\frac{1}{b_n}$ 收敛到 $\frac{1}{b}$, 再利用极限的乘法的结论.

这里在证明极限的乘法的时候用到了一个技巧————“中间人”(Mid-man). 大概就是你们之前见过的所谓 “加一项再减一项” 的操作. 它的原理很简单, 就是利用三角不等式. 它的目的也很明确, 由于

[18] 这里也运用了三角不等式, 事实上三角不等式十分实用, 之后你会经常用到.

我目前只有一个对象变化时的关系，而现在是多个对象同时变化，那么我应当一个一个变，才能运用我已有的关系去阐明新的关系. 在刚才的定理中，a_nb_n 就是两个变化的对象乘在一起，因此变化更为复杂，无法直接求证. 我们选择构造中间一个过渡项 a_nb，这样 $|a_nb_n - a_nb|$ 和 $|a_nb - ab|$ 就都转化成了一个变量在变化 (前者还需要放缩一下)，也就是我们已有的关系. 之后你们会大量地使用这种技巧.

接下来我们介绍收敛数列间的一些关系：

命题 1.25

设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 分别收敛于 a 和 b

1. 若当 n 充分大时有 $a_n \geq b_n$，则 $a \geq b$;
2. 若 $a > b$，则当 n 充分大时，有 $a_n > b_n$.

这就像上面的极限的保序性的翻版，当然，证明可以引用一下结论.

证明

1. 显然，当 n 充分大时，$a_n - b_n \geq 0$，而 $\{a_n - b_n\}$ 收敛到 $a - b$，所以 $a - b \geq 0$，即 $a \geq b$.
2. 同理，$a > b \Rightarrow a - b > 0$，于是对充分大的 n，$a_n - b_n > 0$，即 $a_n > b_n$.

证明十分简单，没啥好说的. 不过基于此，我们可以得到下面一个十分重要的定理：

定理 1.4 (夹逼准则)

若数列 $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 都收敛于 a，且对所有充分大的 n，有

$$b_n \leq a_n \leq c_n,$$

则数列 $\{a_n\}$ 也收敛，而且极限也为 a.

证明十分容易，留作习题.

注 注意，我没有提前声明 $\{a_n\}$ 是收敛的. 所以这个定理往往也可以拿来判断一个数列是否收敛. 我们往往叫它夹逼准则 **(Squeeze theorem)**，或者三明治定理. 原因很简单，$\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 就像三明治的两块面包，把 $\{a_n\}$ 这个馅夹在中间，夹得死死的. 所以面包在哪，馅就得在哪. 面包怎么走，馅就得怎么走.

在本小节的最后我们介绍一个前置概念：

定义 1.38 (子列)

数列 $\{a_n\}$ 的若干项 $a_{k_1}, a_{k_2}, \cdots, a_{k_n}, \cdots$，$k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ 所组成的新的数列称为这个数列的子列 **(Subsequence)**.

比方说你去考虑自然数列 $1, 2, \cdots, n, \cdots$，如果你把偶数项取出来，组成一个新的数列，那么你就得到了偶数列. 因此偶数列其实是自然数列的子列.

以及我们要介绍一个前置定理：

定理 1.5 (子列的收敛性)

收敛数列的子列也收敛，且收敛到同一个极限.

也很好理解. 你可以把原数列想象成一个正在前往目的地的队伍，子列就是队伍的小队. 队伍所有人都在前往目的地，那么子列作为队伍里面的人，当然也会前往目的地，而且是同一个目的地.

证明 按定义证明即可. 对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}_+$ 使得只要 $n > N$，就有：

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

显然 $k_n \geq n$, 于是取 $N' = N$, 那么只要 $n > N'$, 就有 $k_n \geq n > N' = N$, 于是

$$|a_{k_n} - a| < \varepsilon.$$

从而 $\{a_{k_n}\}$ 收敛到 a.

在第六章你会学习到关于实数的一个十分重要的性质. 它揭示了有界数列的潜在的敛散性.

此外, 根据这个定理, 我们可以得到一个十分显而易见的小推论:

推论 1.5

若一个收敛数列极限不为零, 则它至多有有限项为零. ♡

原因很简单, 如果有无穷多个零, 那我把这些零全部取出来构成一个子列, 那么这个子列会收敛到零, 和极限不为零矛盾.

1.3.6 Stolz 定理

Stolz 定理在计算一类数列极限时极其实用, 因此我认为介绍它是有必要的.

1.3.6.1 发散到无穷大的数列

我们之前提到过, 无界数列是发散的. 而无界数列中有一类数列, 称为"发散到无穷大"的数列, 大致地说, 就是当 n 无限增大的时候, a_n 的绝对值可以任意的大, 而 a_n 的正负无妨.

定义 1.39 (发散到无穷大的数列)

若数列 $\{a_n\}$ 满足

$$\forall\, M > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}_+ \text{ s.t. } \forall\, n > N,\ |a_n| > M, \tag{1.68}$$

则称数列 $\{a_n\}$ 发散到无穷大 **(Diverge to infinity)**, 或称数列趋于无穷大, 记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty. \tag{1.69}$$

或 $a_n \to \infty\ (n \to \infty)$. ♣

当然, 稍作修改, 你就可以得到"发散到正无穷大"和"发散到负无穷大"的定义.

注 有两点可能会犯错的地方要提一下.

首先, 数列趋于无穷大, 不意味着数列有极限. 发散到无穷大的数列仍然是发散数列, 并不收敛. 而我们上面介绍的关于极限的性质与运算律, 一般也不成立, 因为那是针对收敛数列而言的.

其次, 我们说过, 这只是无界数列的一类数列. 发散数列不一定发散到无穷大, 比如 $\{(-1)^n\}$ 是个有界数列, 它在 $1, -1$ 二者间循环. 无界数列也不一定发散到无穷大, 比如 $0, 1, 0, 2, \cdots, 0, n, \cdots$ 无界, 但它后面的项并非全部充分大, 而我们要求发散到无穷大的数列, 后面所有项都会充分大, 所以这个无界数列不是发散到无穷大的.

不过我们可以稍微加个条件, 使得拥有此种性质的无界数列必然发散到无穷大:

命题 1.26

单调无界数列必然发散到无穷大. ♠

证明留作习题.

如果 $\{a_n\}$ 发散到无穷大, 那么我们称当 n 趋于无穷时, a_n 是无穷大量. 对应地, 若 $\{a_n\}$ 收敛到 0, 那么称 n 趋于无穷时, a_n 是无穷小量. 一件很显然的事情是, 如果 a_n 是无穷大量, 那么 $\frac{1}{a_n}$ 是无穷小量. 如果 a_n 是无穷小量, 那么 $\frac{1}{a_n}$ 是无穷大量. 因此利用倒数, 无穷大量和无穷小量可以相互变形.

1.3.6.2 Stolz 定理

我们之前在定理1.3介绍了极限的运算律. 对于数列相除所得的极限, 我们知道, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$, 那么有:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\frac{a}{b}.$$

那么我现在要提问, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, 上式极限是否仍然存在? 你可能会有点疑惑, 为什么要考虑如此奇怪的东西. 不妨先看下面三个例子:

例题 1.14 判断下列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 的情况:

1. $a_n = n$, $b_n = n^2$;
2. $a_n = n$, $b_n = n$;
3. $a_n = n^2$, $b_n = n$.

显然, 对于第一种情况, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, 因此极限存在, 且为 0; 对于第二种情况, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, 因此极限存在, 且为 1; 而对于第三种情况, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$.

于是你会注意到, 如果 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均发散到无穷大, 那么其比值的极限可以有多种情况. 这是因为数列在趋于无穷大时的行为是十分迥异的. 比如 $a_n = 2n$ 是 $b_n = n$ 增长速度的两倍, 而 $c_n = n^2$ 比 a_n 又更快, 它们甚至不在一个等级. 因此鉴于趋于无穷大速度的差异, 不同的无穷大量之间的相对增长的速度, 也就是它们的比值, 会表现出各种各样的情况.

而 Stolz 定理, 为我们提供了一个计算这类极限的工具:

定理 1.6 ($\frac{\infty}{\infty}$ 型 Stolz 定理)

设有 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 且 $\{b_n\}$ 严格递增趋于 $+\infty$, 如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=A,$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A.$$

其中 A 可以是实数, 也可以是 $\pm\infty$.

♡

概括一下就是: 如果数列的差分之比存在极限, 那么数列之比也收敛, 且二者相等.

证明 这里我们只证明 A 为实数的情况, 发散到无穷的情况则留作习题.

由于我们已有的关系式较为复杂, 而要证的式子结构较为简单, 因此我们先处理已有的关系式, 看看是否能变形出目标式. 这和之前将目标式变形来贴近已有关系的操作是不一样的.

既然 $\{b_n\}$ 发散到正无穷, 我们不妨将 $\{b_n\}$ 设为正项数列 (将非正项修改成正项, 反正修改有限项的值不改变数列敛散性). 根据已有极限, 我们知道, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N_1, 只要 $n > N_1$, 就有:

$$\left|\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}-A\right|<\varepsilon,$$

即

$$A-\varepsilon<\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}<A+\varepsilon.$$

由于 $\{b_n\}$ 是严格递增的, 因此 $b_{n+1}-b_n>0$, 故我们移项得:

$$(A-\varepsilon)(b_{n+1}-b_n)<a_{n+1}-a_n<(A+\varepsilon)(b_{n+1}-b_n).$$

注意一下 n 的取值, n 可以取 N_1 后面的所有数, 于是我们依次将 $N_1+1,\cdots,n-1$ 代入, 得到

$$\begin{gathered}(A-\varepsilon)(b_{N_1+2}-b_{N_1+1})<a_{N_1+2}-a_{N_1+1}<(A+\varepsilon)(b_{N_1+2}-b_{N_1+1}),\\(A-\varepsilon)(b_{N_1+3}-b_{N_1+2})<a_{N_1+3}-a_{N_1+2}<(A+\varepsilon)(b_{N_1+3}-b_{N_1+2}),\\\cdots,\\(A-\varepsilon)(b_n-b_{n-1})<a_n-a_{n-1}<(A+\varepsilon)(b_n-b_{n-1}).\end{gathered}$$

于是我们全部加起来, 得到:

$$(A-\varepsilon)(b_n-b_{N_1+1})<a_n-a_{N_1+1}<(A+\varepsilon)(b_n-b_{N_1+1}).$$

注意, 此时里面刚好只含有变量 a_n,b_n, 我们试着将这个不等式变形成目标式, 就是 $\frac{a_n}{b_n}-A$ 的样子:

$$\frac{a_{N_1+1}-Ab_{N_1+1}}{b_n}-\varepsilon\left(1-\frac{b_{N_1+1}}{b_n}\right)<\frac{a_n}{b_n}-A<\frac{a_{N_1+1}-Ab_{N_1+1}}{b_n}+\varepsilon\left(1-\frac{b_{N_1+1}}{b_n}\right).$$

这里 $a_{N_1+1}-Ab_{N_1+1}$ 是个常数, 因此当 $b_n\to\infty$ 时, $\frac{a_{N_1+1}-Ab_{N_1+1}}{b_n}\to 0$, 同理, $\frac{b_{N_1+1}}{b_n}\to 0$, 这样两边当然就剩下 ε, 也就是我们的目标式.

但我们当然不能就这么写, 我们还是要对这两项作适当的估计. 显然, 存在正整数 N_2, 当 $n>N_2$ 时, $|\frac{a_{N_1+1}-Ab_{N_1+1}}{b_n}-0|<\varepsilon$, 即 $-\varepsilon<\frac{a_{N_1+1}-Ab_{N_1+1}}{b_n}<\varepsilon$, 那么我们取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 只要 $n>N$, 就有

$$-2\varepsilon<-\varepsilon-\varepsilon(1-\frac{b_{N_1+1}}{b_n})<\frac{a_n}{b_n}-A<\varepsilon+\varepsilon(1-\frac{b_{N_1+1}}{b_n})<2\varepsilon.$$

于是稍微利用一下习题 39 的结论, 就得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$.

我们知道, 如果一个数列趋于 0, 那么其倒数组成的数列将发散到无穷大, 因此类似于 $\frac{0}{0}$ 的极限可以转化为 $\frac{\infty}{\infty}$ 的极限, 只需要你把分子除到分母, 分母除到分子即可. 但这往往会比较麻烦. 而 Stolz 定理告诉我们, 对于 $\frac{0}{0}$ 的极限, 我们有类似的结论:

定理 1.7 ($\frac{0}{0}$ 型 Stolz 定理)

设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均收敛到 0, 且 $\{b_n\}$ 严格递减. 如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=A,$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A.$$

其中 A 可以是实数, 也可以是 $\pm\infty$.

证明留作习题.

注

1. 注意, 对于 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的 Stolz 定理, 我们并没有要求 $\{a_n\}$ 也发散到 ∞, 只是为了与 $\frac{0}{0}$ 型相对应, 采取了这个记号.

2. 我们只是说, 如果差分的比值的极限存在, 那么比值的极限也存在, 且二者相等. 但反过来, 逆命题显然是不成立的. 比如 $a_n = (-1)^n$, $b_n = n$, 它们的比值极限显然是 0, 但是差分的比值极限并不存在.
3. 在你学习了 L'Hospital 法则后, 你可以将 Stolz 定理视作离散形式的 L'Hospital 法则.

1.4 向量, 复数与极坐标系

1.4.0.1 任意角与弧度制

在正式讲述本节的内容之前, 我们需要补充一些关于角的知识.

我们已经知道角的范围是 $0° \sim 360°$, 但这显然是不够用的, 生活中随处可见这个范围以外的角度. 因此我们需要重新给出一个更广泛的定义.

思考角的定义, 角作为一个图形而言, 定义为有着公共顶点的两条射线. 但这显然避开了一些我们在乎的信息, 比如这样一个图形实际上对应着两个角, 一个小的一个大的（加起来姑且认为是 $360°$）, 但图形本身并没有指出具体是哪个角（虽然一般而言我们认为是那个不大于 $180°$ 的角）. 而且和前面所述的局限性是一样的, 你看不出来这个图形到底指的是多少度角, 因此我们需要修正这个定义.

更动态一点地讲, 角的内涵在于旋转, 由一条射线旋转后得到另一条射线, 这个过程便反映了角的大小, 同样也有方向. 如果射线逆时针旋转, 我们称为**正角**; 射线顺时针旋转则称为**负角**, 毫无旋转则称为**零角**. 至于角的大小就没有什么好解释的了, 姑且可以用下面的式子来表示:

$$\theta = \frac{l}{2\pi r} \cdot 360°.$$

这里我们的确一般用 θ 或者其它小写希腊字母来表示角的大小, r 是你在射线上选取的一点到端点的距离（相当于选取了一个半径）, 而 l 是此点在旋转过程中走过的距离. 即使 r 是可以改变的, $\frac{l}{r}$ 也是一个不变量, 因此 θ 的定义是良好的（事实上 l/r 就是我们后面要讲的弧度制）.

一开始的射线叫作**始边**, 旋转完成后的射线叫作**终边**. 这样角度的大小就可以任意了.

值得一提的是, 角度可以作加法与减法. 加法的结果视作两次旋转的复合得到的总旋转的角度大小. 至于减法, 我们先引入相反的角的概念, 即某个角改变方向（正变负, 负变正）但不改变大小, 然后将减法视为加上相反的角. 例如逆时针旋转一圈, 这是 $360°$, 然后顺时针旋转半圈, 这是 $-180°$, 那么两个角加起来, 就是先逆时针旋转一圈再顺时针旋转半圈, 总的效果就是逆时针旋转半圈, 即 $180°$, 用算式表达来说就是 $360° + (-180°) = 180°$.

大多数谈论角的时候, 方便起见, 我们往往会选取角的端点作为坐标系原点, 以角的始边为 x 轴非负半轴, 建立平面直角坐标系, 那么我们可以简单地以角的终边的位置为依据, 将角分类为第一象限角, 第二象限角, 第三象限角与第四象限角. 如果终边落在坐标轴上, 则不属于任何象限.

从角的形成过程来看, 我们可以预测图形最终的形状, 但是如果先给出角的形状, 即使已经确定了始边和终边, 我们也无法断言角的大小, 但它们之间存在明显的数量关系, 即相差若干个 $360°$. 这当然也是显而易见的, 既然始边和终边相同, 这之间必然是相差了整数圈, 否则不可能对齐, 即整数个 $360°$. 对于任意给定的角 α, 与 α 形状相同的角组成了一个集合, 表达如下:

$$S_\alpha = \{\beta \mid \beta = \alpha + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

实际问题中大多数情况下具体是多少度并不重要, 相同的形状即有相同的参数, 因此为了方便起见我们经常将度数化到 $0° \sim 360°$ 或者 $-180° \sim 180°$ 之间.

前面给出角的定义表达式的时候我们还提到 l/r 也是一个不变量, 它的大小也仅与角的大小有关, 因此我们也可以将其作为角的一种衡量标准, 即所谓的**角的弧度制**, 它的单位是 rad. 特别地, 我们取 $r=1$, 那么对应的弧长就恰好是角的弧度大小, 可见一圈是 2π rad, 半圈是 π rad, $90°$ 为 $\frac{\pi}{2}$ rad. 当然, rad 实际上是无量纲的, 因此我们也可以省略不写. 角度与弧度有如下转化关系:

$$1° = \frac{\pi}{180}\ \text{rad},\ 1\ \text{rad} = \frac{180°}{\pi}.$$

这个关系需要熟知, 而且由于后续的学习中我们更常用弧度表示, 你需要自行给出并熟悉一些常见角的弧度表示.

1.4.1 向量

1.4.1.1 向量的基本概念

对于我们遇到的诸多的可以量化的概念, 我们可以简单地将其分成两类：有大小但是没有方向的量, 称为**数量**; 有大小也有方向的量, 称为**向量 (Vector)**. 例如物理中的质量, 体积, 温度, 就属于数量; 而速度, 加速度, 位移, 就属于向量. [19]我们已经很熟悉数量的运算与基本性质, 因此我们现在来研究向量的相关性质.

作为正式给出定义前的一些抽象性的探索, 我们需要好好想想 "有大小且有方向" 的含义. 如果只从这个角度考虑（就是不考虑其它的现实因素）, 那么向量似乎可以和箭头等效起来, 箭头的长度就是向量的大小, 箭头的方向就是向量的方向. 例如下面的图片:

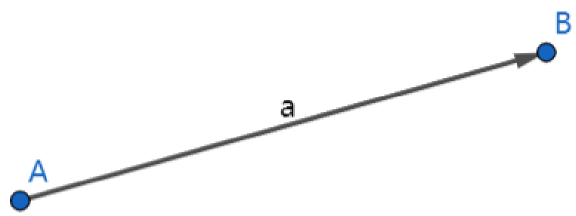


图 1.12: 向量的图形化

像这样的有明确的方向存在的线段 AB, 我们称为**有向线段 (Directed line segment)**. 像这样以 A 为起点, B 为终点的有向线段, 我们可以记为 $\overrightarrow{AB}$, 反过来也可以从这个记号看出 A 是起点, B 是终点, 线段是由 A 指向 B 的. 那么我们预想中的向量似乎可以用这样一个有向线段来表示, 而向量的大小就是有向线段的长度, 记作 $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. 更专业一点来讲, 向量的大小称作向量的**长度 (Length)** 或**模 (Norm)**, 记号与前面一致. 特别地, 对于长度为 1 的向量, 称为**单位向量 (Unit vector)**, 而长度为 0 的向量称作**零向量 (Zero vector)**, 记作 $\vec{0}$. 上图中的向量也可以用一个小写字母 $\vec{a}$ 来表示.

但值得一提的是, 有向线段包含三个要素：起点, 方向, 长度. 换句话讲, 即使两个有向线段的方向与长度是一致的, 如果它们起点不同, 那么它们也仍然是不同的有向线段. 而数学上几乎所有情况来讲, 向量只在乎方向和大小[20], 所以即使位置不同, 只要方向与大小是一致的, 我们也说向量是相同的. 用物

[19] 用物理的话来讲, 前者称为标量, 后者称为矢量.

[20] 事实上我们真正定义向量压根不是这么定义的, 现在这样具体的描述只是为了让你更好地掌握几何直观从而建立初步印象.

理的话讲, 叫作自由矢量. 这也就意味着我们可以对向量执行平移操作.

注 接下来我们不再讨论任何有关有向线段的事情, 除非特别说明, $\overrightarrow{AB}$ 指的是向量 AB 而不是有向线段 AB, 区别在于我们允许向量意义下的有向线段 AB 是可以被平移的.

对于方向的问题, 我们暂且保留不谈. 你可以按传统意义上的方向感去理解, 但后续我们需要给出一个更加确切的定义方式.

注意这里我们没有特别说明向量是平面中的还是空间中的, 事实上二者没有太大的差异. 前者称为平面向量, 后者称为空间向量.

1.4.1.2 向量的基本运算

我们所能对向量做的最基本的两件事是加法与数乘.

首先我们来看更加容易的数乘. 数乘的作用是将向量沿着原来的方向放大或缩小, 甚至令其反向. 如下图:

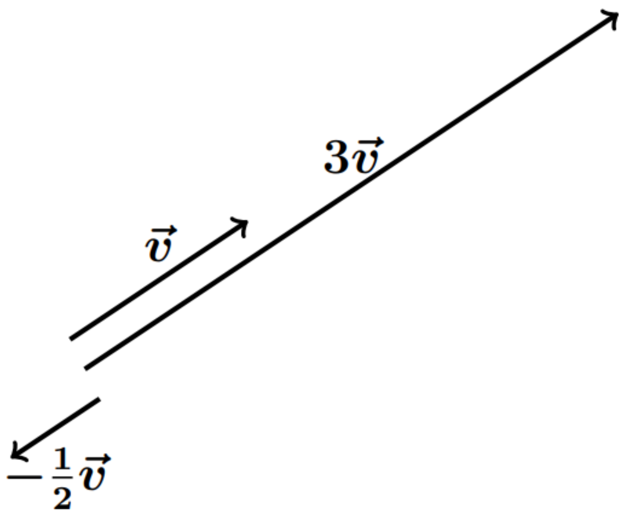


图 1.13: 向量的数乘

确切地说, 如果我们有向量 $\vec{v}$, 那么由 $\vec{v}$ 与常数 λ 进行数乘得到的新向量 $\lambda\vec{v}$ 与原向量的关系在于:

$$|\lambda\vec{v}| = |\lambda||\vec{v}|.$$

以及 $\lambda\vec{v}$ 与 $\vec{v}$ 的方向相同 (如果 $\lambda > 0$) 或相反 (如果 $\lambda < 0$) . 顺带一提, 我们规定零向量的方向是任意的.

简单来讲, $\lambda\vec{v}$ 将 $\vec{v}$ 的模放大或缩小到原来的 $|\lambda|$ 倍, 而且由 λ 的正负决定方向是否改变.

值得一提的是, 对两个非零向量 $\vec{v}, \vec{w}$, 如果存在 $\lambda \neq 0$ 使得 $\vec{w} = \lambda\vec{v}$, 那么我们就说 $\vec{v}, \vec{w}$ **共线**. 特别地, 如果 $\lambda = -1$, 我们称 $\vec{v}, \vec{w}$ 互为**相反向量**, $\vec{v}$ 的相反向量记作 $-\vec{v}$. 反过来, 如果两个非零向量共线, 那么彼此都可以通过数乘互相转化. 我们默认零向量与任何向量共线.

然后我们来介绍向量的加法. 如图:

从位移的角度看这是十分自然的: 总位移是两段位移的总效果, 是总起点到总终点的位移, 因此我们将两段位移对应的向量首尾相连就可以得到总的向量. 从图像上来看形成了一个三角形, 这称为向量

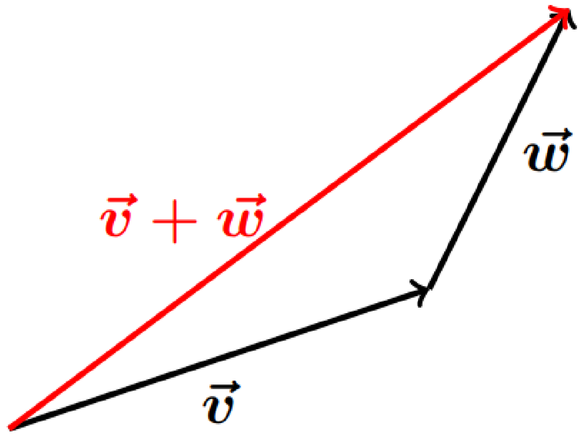


图 1.14: 向量的加法

加法的三**角形法则**.

类似还有**平行四边形法则**: 假设有两个力作用在同一点, 那么合力所对应的矢量恰为以两个力矢为边形成的平行四边形的对角线. 从结果上来讲, 两个法则给出的结果当然是一样的, 数学上而言并没有本质区别.

通过上述两种运算我们可以得到一个极其重要的概念. 对向量 $\vec{v},\vec{w}$, 以及任意常数 λ,μ, 向量 $\lambda\vec{v}+\mu\vec{w}$ 称为 $\vec{v},\vec{w}$ 的**线性组合 (Linear combination)**. 顺便, 如果 $\vec{a}$ 可以表为 $\vec{v},\vec{w}$ 的线性组合, 那么称 $\vec{a}$ 可以被 $\vec{v},\vec{w}$ 线性表出.

现在我们不加证明地阐述上述运算所满足的若干基本性质, 你可以自行验证.

加法交换律 $\forall\,\vec{v},\vec{w},\ \vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}$;

加法结合律 $\forall\,\vec{v},\vec{w},\vec{u},\ (\vec{v}+\vec{w})+\vec{u}=\vec{v}+(\vec{w}+\vec{u})$;

加法单位元 $\forall\,\vec{v},\ \vec{v}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{v}=\vec{v}$;

加法逆 $\forall\,\vec{v},\ \vec{v}+(-\vec{v})=(-\vec{v})+\vec{v}=\vec{0}$;

数乘结合律 $\forall\,\lambda,\mu,\vec{v},\ (\lambda\mu)\vec{v}=\lambda(\mu\vec{v})$;

数乘单位元 $\forall\,\vec{v},\ 1\vec{v}=\vec{v}$;

左右分配律 $\forall\,\lambda,\mu,\vec{v},\vec{w},\ \begin{cases}\lambda(\vec{v}+\vec{w}) & =\lambda\vec{v}+\lambda\vec{w},\\ (\lambda+\mu)\vec{v} & =\lambda\vec{v}+\mu\vec{v}.\end{cases}$

事实上满足这些性质的集合我们称为**线性空间 (Linear space)** 或**向量空间 (Vector space)**, 但这里的向量是广义的, 而我们前面所述的平面向量或空间向量都是一种狭义的特殊情况. 因此平面向量与空间向量均构成了线性空间. 我们在选修部分会详细讨论此事.

值得一提的是, 既然加法逆 (即相反向量) 是始终存在的, 我们可以顺理成章地定义什么是向量的减法:

$$\vec{v}-\vec{w}:=\vec{v}+(-\vec{w}).$$

这并没有什么新奇的.

1.4.1.3 内积与外积

（学习本节之前请先跳转 2.2 节, 初步了解三角函数的定义与性质后再进行阅读. ）

假如, 我是说假如, 向量也可以有乘法, 那么乘法应该是什么样的?

有两种可能性, 向量乘向量得到一个数, 向量乘向量得到一个新的向量. 这两种都是可以的, 前者对应着**点乘 (Dot product)** 或称**数量积 (Scalar product)**, 记作 $\vec{a}\cdot\vec{b}$; 后者对应着**叉乘 (Cross product)** 或**向量积 (Vector product)**, 记作 $\vec{a}\times\vec{b}$. [21]

我们下面分别介绍两种乘法.

首先是数量积. 我们需要思考, 想要找到一种乘法, 使得两个向量的大小与方向都成为影响因素. 我们很自然地期望结果与向量的长度成正比, 即 $\vec{a}\cdot\vec{b}\propto|\vec{a}|,|\vec{b}|$. 但对于方向, 比起随便两个不同方向的向量的结果都不一致, 我们更希望有一点不变量在里面, 比如说, 我们只关心夹角的大小, 并不关心两个向量具体指向哪个方向, 而且夹角越小, 乘积越大. 设两个向量的夹角为 θ, 那么我们可以提出这样一种乘法:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}:=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta.$$

这也正是我们标准内积的定义, 在物理中的诸多用到内积的概念与其也是吻合的, 例如功的定义.

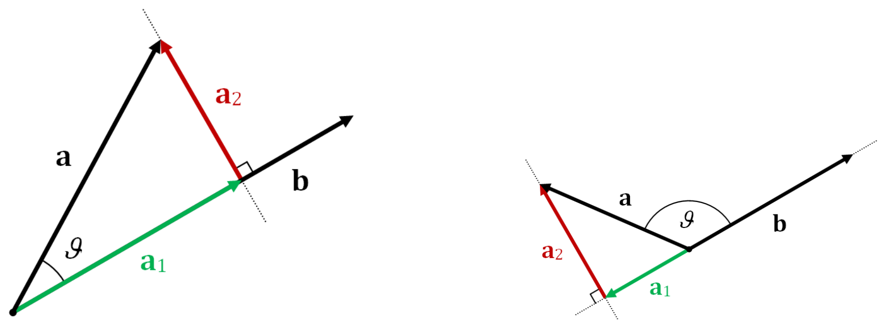
注 向量的夹角如下定义:

设有向量 $\vec{a},\vec{b}$, 我们将 $\vec{a},\vec{b}$ 平移到一起使得起点重合, $\vec{a}$ 平移后记为 $\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}$ 平移后记为 $\overrightarrow{OB}$, 那么 $\angle AOB$ 的大小记为 θ, 作为向量的夹角, 也可以记作 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$. [22]

值得一提的是, 我们要求 θ 的大小介于 0 到 π 之间. 特别地, 如果 $\theta=0$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向; 如果 $\theta=\pi$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 反向; 如果 $\theta=\frac{\pi}{2}$, 称 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直或正交, 记作 $\vec{a}\perp\vec{b}$.

容易发现, 同向时, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$; 反向时, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$; 垂直时, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. 特别地, 零向量和任何向量的数量积均为零.

值得一提的是我们可以考虑向量在某个方向上的投影, 比方说刚才的 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影, 我们可以将 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平移至起点重合, 然后以 $\vec{a}$ 的终点向 $\vec{b}$ 所在的直线上作垂线, 连接起点与垂足, 作为投影, 例如下面两种情况:



当然其实并没有本质的区别啦. 我们来看看投影向量与原向量的关系是什么. 首先 $\vec{a_1}$ 显然与 $\vec{b}$ 是共线的, 因此 $\vec{a_1}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a_1}||\vec{b}|$, 正负分别对应同向和反向的情况, 即两张图. 对于前者, 根据三角函数的定义, $|\vec{a_1}|=|\vec{a}|\cos\theta$, 那么

$$\vec{a_1}\cdot\vec{b}=|\vec{a_1}||\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\vec{a}\cdot\vec{b}.$$

[21] 值得一提的是, 点乘更广泛地也叫内积 (Inner product), 不过叉乘不叫外积, 外积是另外一个东西.

[22] 我十分不建议这种记号, 即使它在高中经常被采用. 因为这与我们后面要讲的一般的内积的记号重复了.

第二种情况可以得到相同的结果. 总而言之, 记 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影为 $\mathrm{proj}_{\vec{b}}\vec{a}$, 那么最重要以及也是最本质的一条公式为:

$$\mathrm{proj}_{\vec{b}}\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}.$$

从 $\mathrm{proj}_{\vec{b}}\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线的条件出发, 我们进一步可以得到 $\mathrm{proj}_{\vec{b}}\vec{a}$ 的表达式 (或者也可以说定义式):

$$\mathrm{proj}_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\vec{b}.$$

当然你还可以注意到图中有另外一个向量 $\vec{a_2}$, 它恰好与 $\vec{a_1}$ 垂直, 且 $\vec{a}=\vec{a_1}+\vec{a_2}$, 这就是 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的正交分解.

然后是向量积. 向量积的定义大概有着浓厚的历史因素与物理动机, 因此我在这里并不阐述为何如此定义. 向量积方向的确定依赖于右手定则: 同样地考虑 $\vec{a},\vec{b}$ 两个向量, 我们伸出右手, 用食指指向 $\vec{a}$, 中指指向 $\vec{b}$, 那么大拇指的方向就是 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的方向. 如图所示:

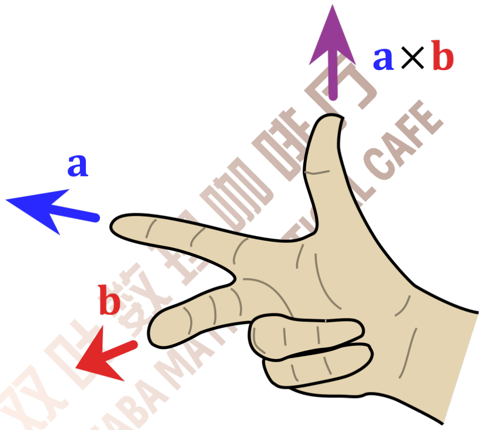


图 1.15: 右手定则

或者你可以想象右手握拳并伸出大拇指, 并将手指弯曲的走向与从 $\vec{a}$ 旋转到 $\vec{b}$ 的走向相统一, 此时大拇指的指向就是 $\vec{a}\times\vec{b}$.

准确来讲, $\vec{a}\times\vec{b}$ 的方向为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 所张成的平面的法向, 且满足右手定则. 不过这细致的内容我们会放在以后讲, 这里我们仅略微介绍向量积的定义:

$$\vec{a}\times\vec{b}:=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\vec{n}.$$

这里 θ 为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角, $\vec{n}$ 为单位向量且与 $\vec{a},\vec{b}$ 构成右手系. 你可以注意到 $|\vec{a}\times\vec{b}|$ 恰好是 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 张成的平行四边形的面积, 进一步为以二者为边的三角形的面积的 2 倍, 所以如果我们能够掌握一种便于求向量积的方式, 我们就可以更简便地计算三角形或平行四边形的面积.

然后我们按照惯例介绍一些性质, 请自行验证:

点乘交换律 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

点乘齐次性 $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$;

点乘分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;

叉乘反交换律 $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$;

叉乘齐次性 $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$;

叉乘分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$, $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$.

以及还有一种运算叫作**混合积**, 定义为 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$, 它的绝对值恰好是以 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为三条棱张成的平行六面体的体积. 它满足轮换性质:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}).$$

我们在下一节会进一步介绍这些运算.

1.4.1.4 向量的坐标表示

我们回忆初中讲过的平面直角坐标系, 它的好处在于将几何上的点转化为了坐标中的数字, 并且由数字间的关系可以反馈出几何上的联系. 平面向量或空间向量也是一个几何化的概念, 如果我们能够有类似的坐标化的手段, 就可以简化我们讨论向量的难度. 这就是我们下面要讲的坐标表示.

我们前面说过向量可以平移, 那么对于我们所研究的某个平面中的向量, 假设已经给定平面直角坐标系, 那么我们不妨将所有向量的起点都平移到原点处, 这样不同的终点就对应了不同的向量, 同时具有相同终点的向量也是相同的, 这和我们开头提到的一致. 此时向量也称为**位置向量**, 因为标志了终点的位置, 简称为**位矢**.

于是自然地, 向量和终点, 也即平面中的点一一对应, 而平面中的点也和坐标一一对应, 因此向量就和坐标能够对应起来. 譬如一个向量平移后的终点落在点 $(4,3)$ 处, 那么我们就可以说这个向量的坐标是 $(4,3)$. 但这里的坐标到底意味着向量的什么?

回想平面直角坐标系如何赋予点坐标. 当我们确定坐标系的原点与坐标轴, 那么对于平面中任何一个点, 它在坐标轴上的投影的大小便决定了它的横纵坐标, 例如点 $(4,3)$ 的坐标之所以是 $(4,3)$, 是因为它在横轴上的投影是 4, 在纵轴上的投影是 3. 那么类似地考虑向量, 首先对于数轴, 当我们取定正方向的一个单位向量 $\vec{e}$, 那么数字 k 所对应的点所对应的向量便恰好是 $k\vec{e}$. 反过来对于任意一个向量 $\vec{a}$, 因为和 $\vec{e}$ 共线, 显然可以通过 $\vec{e}$ 数乘得到, 如果这个系数是 k, 即 $\vec{a}=k\vec{e}$, 那么此时 $\vec{a}$ 的终点便恰好对应 k.

当我们把向量的范围扩大到平面上, 也可以有类似的结果. 首先对于任何向量 $\vec{a}$, 我们记横纵坐标轴的标准单位向量为 $\vec{e_1},\vec{e_2}$, 那么考虑投影 $\vec{a_1}:=\mathrm{proj}_{\vec{e_1}}\vec{a}$, $\vec{a_2}:=\mathrm{proj}_{\vec{e_2}}\vec{a}$, 由前面所述, 存在实数 x,y 使得 $\vec{a_1}=x\vec{e_1}$, $\vec{a_2}=y\vec{e_2}$. 注意 $\vec{a}=\vec{a_1}+\vec{a_2}$, 于是

$$\vec{a}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}. \tag{1.70}$$

此式即所谓**平面向量基本定理**. 这里不难发现 (x,y) 就是 $\vec{a}$ 的终点的坐标, 因此向量的坐标实际上指的是它被 $\vec{e_1},\vec{e_2}$ 线性表出时的系数. 而用于表出向量的 $\vec{e_1},\vec{e_2}$ 称为**基向量 (Basis vector)**, 特别地对于这个向量组 $\vec{e_1},\vec{e_2}$, 称为**标准正交基 (Orthonormal Basis)**, 因为它们单位长度且正交, 而且与坐标轴正方向同向.

但注意, 其实我们不要求基向量必须得是 $\vec{e_1},\vec{e_2}$. 它们可以不是单位长度, 比如将 $\vec{e_1},\vec{e_2}$ 都取成原来的两倍, 记作 $\vec{i_1},\vec{i_2}$, 那么此时分解便为

$$\vec{a}=\frac{x}{2}\vec{i_1}+\frac{y}{2}\vec{i_2}.$$

于是在基向量 $\vec{i_1},\vec{i_2}$ 下 $\vec{a}$ 的坐标便是 $(\frac{x}{2},\frac{y}{2})$. 它们也未必需要正交, 比如设标准正交基 $\vec{e_1},\vec{e_2}$ 下坐标为 $(1,0)$ 和 $(1,1)$ 的向量为 $\vec{v_1},\vec{v_2}$, 那么对于 $\vec{a}=4\vec{e_1}+3\vec{e_2}$, 将 $\vec{v_1},\vec{v_2}$ 代入就有

$$\vec{a}=\vec{v_1}+3\vec{v_2}.$$

也就是将 $\vec{v_1},\vec{v_2}$ 作为基向量时 $\vec{a}$ 的坐标为 $(1,3)$.

此时你可能对基向量的要求有所疑惑. 回想基向量的作用, 基向量使得平面中所有向量都能够被它

们线性表出. 从这一点上讲, 刚才的三组基向量都是可用的. 但是对于向量组 $\vec{w_1}, \vec{w_2}$, 这里它们在标准正交基下的坐标为 $(1,0),(2,0)$, 它们能线性表出的向量并不充足, 譬如它们表示不了 $\vec{e_2}$, 即不存在实数 λ, μ 使得

$$\vec{e_2} = \lambda\vec{w_1} + \mu\vec{w_2}.$$

仔细想想, 这是因为 $\vec{w_1}, \vec{w_2}$ 共线, 所以它们的线性组合也和 $\vec{w_1}, \vec{w_2}$ 共线, 因此表示不了不共线的向量. 因此我们不能将 $\vec{w_1}, \vec{w_2}$ 作为基向量.

方便起见以后我们也会用标准正交基下的坐标来指代平面中的向量, 即用 $\vec{e_1} = (1,0), \vec{e_2} = (0,1), \vec{i_1} = (2,0), \vec{i_2} = (0,2)$ 等.

另外我如果在向量组中继续加入向量, 例如考虑向量组 $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{i_1}$, 这个向量组也可以表示所有向量, 比如 $\vec{a} = (4,3)$ 可以表为

$$\vec{a} = 4\vec{e_1} + 3\vec{e_2} + 0\vec{i_1}.$$

但它同时还可以表为

$$\vec{a} = 2\vec{e_1} + 3\vec{e_2} + \vec{i_1}.$$

也就是说向量组 $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{i_1}$ 在线性表出某个向量时方式未必唯一, 这很致命, 因为此时我们再说坐标就会产生混淆, 因为我们不知道究竟是哪一个线性组合的系数. 我们绝对不允许这样的情况出现, 所以综合来讲, 基向量的要求是能够唯一地线性表出所有向量. 特别地对于平面情况, 有如下定义:

定义 1.40 (基向量)

称 $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ 构成平面的一组基向量, 若对同平面内任意向量 $\vec{a}$, $\exists!\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ s.t.

$$\vec{a} = \lambda\vec{v_1} + \mu\vec{v_2}. \tag{1.71}$$

这里 (λ, μ) 称为 $\vec{a}$ 在这组基下的坐标. ♣

注 注意定义蕴含了基向量非零, 不然零向量前面的系数可以任意改变而不影响整体结果.

这个定义虽然精确, 但并不好应用, 因为看起来对于每个向量我们都需要验证 (λ, μ) 的存在性. 所以我们需要进一步发掘这个定义的含义.

现在假设我们已经有一组基向量 $\vec{v_1}, \vec{v_2}$, 它们在标准正交基下的坐标为 $(a,b),(c,d)$, 对于任意向量 $\vec{a} = (i,j)$, 由 λ, μ 的存在性, 有

$$\begin{cases} \vec{v_1} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2}, \\ \vec{v_2} = c\vec{e_1} + d\vec{e_2}, \\ \vec{a} = i\vec{e_1} + j\vec{e_2}, \\ \vec{a} = \lambda\vec{v_1} + \mu\vec{v_2} \end{cases}.$$

将第一, 二个式子代入第四个式子, 然后和第三个式子对比系数得到:

$$\begin{cases} i = \lambda a + \mu c, \\ j = \lambda b + \mu d \end{cases}.$$

注意这里 a,c,b,d,i,j 为已知数, 是关于 λ, μ 的二元一次方程组, 解出来得到

$$\begin{cases} \lambda = \frac{id-jc}{ad-bc}, \\ \mu = \frac{ia-jb}{ad-bc} \end{cases}.$$

也就是说, 只要 $ad-bc\neq 0$, 对于任意的 i,j, 解都存在. 而 $ad-bc\neq 0$ 实际上等价于 $\vec{v_1},\vec{v_2}$ 不共线. 所以基向量等价于不共线向量. 但对于更高维空间, 我们不能这么说. 此时我们需要引入更加精确的概念.

不过我们在高中范围内只需要考虑标准正交基 $\vec{e_1},\vec{e_2}$ 下的坐标运算, 所以关于基的讨论暂且停止.

现在我们要利用坐标表示来研究向量的运算.

记平面向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的坐标分别为 $(x,y),(z,w)$, 那么

$$\vec{a}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2},\quad \vec{b}=z\vec{e_1}+w\vec{e_2}.$$

于是

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b}&=(x\vec{e_1}+y\vec{e_2})+(z\vec{e_1}+w\vec{e_2})\\&=(x\vec{e_1}+z\vec{e_1})+(y\vec{e_2}+w\vec{e_2})\\&=(x+z)\vec{e_1}+(y+w)\vec{e_2}.\end{aligned}$$

也就是说 $\vec{a}+\vec{b}$ 的坐标是 $(x+z,y+w)$, 恰好是 $\vec{a},\vec{b}$ 的坐标对应分量相加.

而对于实数 λ 与 $\vec{a}$ 的数乘 $\lambda\vec{a}$, 有

$$\lambda\vec{a}=\lambda(x\vec{e_1}+y\vec{e_2})=(\lambda x)\vec{e_1}+(\lambda y)\vec{e_2}.$$

也就是说 $\lambda\vec{a}$ 的坐标是 $(\lambda x,\lambda y)$, 恰好是 $\vec{a}$ 的各坐标分量乘上 λ.

于是综合而言, 对于 $\vec{a},\vec{b}$ 的任意线性组合 $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$, 它的坐标是 $(\lambda x+\mu z,\lambda y+\mu w)$, 为各坐标分量的线性组合.

从上面计算发现, 坐标表示的引入使得向量的运算可以脱离几何图形, 而单纯地化为数字的计算, 这大大简化了我们要考虑的事物. 当然, 对于内积和外积也有相应的坐标写法, 比如内积:

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=(x\vec{e_1}+y\vec{e_2})\cdot(z\vec{e_1}+w\vec{e_2})\\&=xz\vec{e_1}\cdot\vec{e_1}+yz\vec{e_2}\cdot\vec{e_1}+xw\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}+yw\vec{e_2}\cdot\vec{e_2}\\&=xz+yw.\end{aligned}$$

可见向量的内积恰为对应坐标分量相乘再加起来. 比如 $(4,2)\cdot(1,3)=4\cdot 1+2\cdot 3=4+6=10$. 这样算起来十分容易.

不过对于外积, 首先我们要补充说明空间向量的基. 首先是空间直角坐标系. 平面是两根正交的数轴, 空间就是三根正交的数轴, 如图

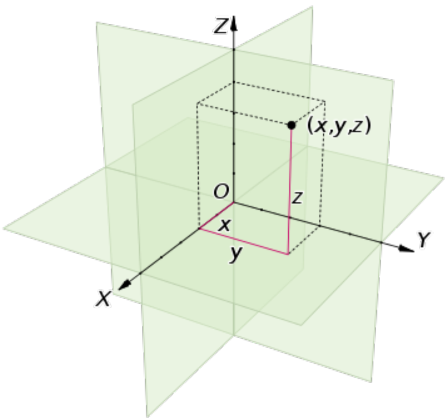


图 1.16: 空间直角坐标系

可以看见空间被分为了八个区域, 称为八个**卦限**. 按如下坐标正负

$$
\begin{gathered}
(+,+,+),\ (-,+,+),\ (+,-,+),\ (-,-,+),\\
(+,+,-),\ (-,+,-),\ (+,-,-),\ (-,-,-),
\end{gathered}
$$

依次记为第一卦限到第八卦限. 点的坐标由其到各坐标轴上的投影决定, 例如图中的点坐标为 $(2,3,4)$. 同样, 将 x,y,z 轴的标准单位向量记为 $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$, 那么此位矢也可表为 $2\vec{x}+3\vec{y}+4\vec{z}$, 坐标同样记为 $(2,3,4)$. $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ 就是空间中的标准正交基.

空间向量同样满足上面所述的规则, 即对于 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1),\vec{b}=(x_2,y_2,z_2),\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$, 有

$$
\begin{gathered}
\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\xi\vec{c}=(\lambda x_1+\mu x_2+\xi x_3,\lambda y_1+\mu y_2+\xi y_3,\lambda z_1+\mu z_2+\xi z_3),\\
\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_3.
\end{gathered}
$$

进一步, 对于外积, 有

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\times\vec{b}=&(x_1\vec{x}+y_1\vec{y}+z_1\vec{z})\times(x_2\vec{x}+y_2\vec{y}+z_2\vec{z})\\
=&x_1x_2\vec{x}\times\vec{x}+x_1y_2\vec{x}\times\vec{y}+x_1z_2\vec{x}\times\vec{z}\\
&+y_1x_2\vec{y}\times\vec{x}+y_1y_2\vec{y}\times\vec{y}+y_1z_2\vec{y}\times\vec{z}\\
&+z_1x_2\vec{z}\times\vec{x}+z_1y_2\vec{z}\times\vec{y}+z_1z_2\vec{z}\times\vec{z}\\
=&(x_1y_2-y_1x_2)\vec{z}-(x_1z_2-z_1x_2)\vec{y}+(y_1z_2-z_1y_2)\vec{x}.
\end{aligned}
$$

也即其坐标为 $(y_1z_2-z_1y_2,z_1x_2-x_1z_2,x_1y_2-y_1x_2)$. 利用后面要学的行列式, 我们可以更加美观地记为

$$
\begin{vmatrix}
\vec{x} & \vec{y} & \vec{z}\\
x_1 & y_1 & z_1\\
x_2 & y_2 & z_2
\end{vmatrix}.
$$

1.4.2 复数

老实说, 这一节同样应该在初步学习函数尤其是三角函数之后再进行学习, 但鉴于复数和刚才所讲的向量其实有一定相似度, 所以我们选择放在一起讲.

首先, 复数的起源是解方程.

我们在初中就已经学过一元二次方程的求解, 对于一般的 $x^2+bx+c=0$ 的情况, 我们知道当 $\Delta=b^2-4c<0$ 时, 方程无实根, 然后就此搁笔. 但不妨揣摩一下这句话, 无 "实" 根, 是否意味着如果我们不要求根是实的, 就可以有根? 这启发人们将实数扩大到了一个更大的范围, 使得在新的范围下遇到的代数方程原则上都是有解的, 这就是复数.

我们从最简单的二次方程看起:

$$x^2+1=0.$$

毫无疑问, 它没有实根, 因为 $x\in\mathbb{R}$ 就不可能让等式左边小于 1. 但在我们预设的一个更大范围下, 这个方程有解, 我们记其中一个解为 i. 也即:

$$i^2=-1.$$

形式上我们也可以说 $i=\sqrt{-1}$, 不过并不建议在根号下写负数以免混淆. 而且我们要求 i 能够像实数一

样进行运算且具有类似性质, 比如我们期望:

$$(-i)^2 = (-1 \cdot i)^2 = (-1)^2 \cdot i^2 = -1.$$

可见 $-i$ 是 $x^2+1=0$ 的另外一个解. i 一般称为**虚数单位**, 为 “imaginary” 的首字母.[23]

注 原则上这个方程有两个解, 将哪个解定义为 i 并不影响复数体系, 结果是完全一样的, 所以不要在这个地方纠结.

虽然我们将 $\sqrt{-1}$ 记作 i, 但这并不意味着 i 是 “正” 的, 或者 i 比 $-i$ 大. 结合选修的内容我们可以断言复数域 $\mathbb{C}$ 并不是有序域. 所以 i 的大小根本无从谈论, 后面说复数的大小指的是其模长大小.

那么问题回到一般的二次方程 $x^2+bx+c=0$, 我们知道它有通解 $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}$, 当 $\Delta \geq 0$ 时这个式子并无问题, 而 $\Delta < 0$ 时, 我们可以认为:

$$\sqrt{b^2-4c} = \sqrt{(-1)(4c-b^2)} = \sqrt{-1}\sqrt{4c-b^2} = i\sqrt{4c-b^2}.$$

于是 $\frac{-b\pm i\sqrt{4c-b^2}}{2}$ 便为此时的解. 注意观察这个解的结构, 它有如下形式:

$$z = x+iy, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

于是我们定义:

$$\mathbb{C} := \{x+iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathbb{C}$ 称为**复数集**, 里面的元素称为**复数 (Complex number)**. 与之相伴的是如下极其重要的定理:

定理 1.8 (代数学基本定理)

任何代数方程:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0, \quad a_k \in \mathbb{C},\ k = 0, \cdots, n,\ a_n \neq 0 \tag{1.72}$$

在复数域 $\mathbb{C}$ 上有解, 只要左边不为常数.

♡

注 其证明现阶段不要求掌握. 复分析中一个比较常见的证法是利用 Liouville 定理:

> 有界整函数为常数.

记左边为 f, 若 f 不为常数且无解, 注意 f 是整函数因而在 $\mathbb{C}$ 上连续, 所以必然存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $f \geq \varepsilon$. 于是 $0 < \frac{1}{f} \leq \frac{1}{\varepsilon}$ 且 $\frac{1}{f}$ 也为整函数, 从而 $\frac{1}{f}$ 为常数, 于是 f 为常数, 矛盾.

有一说一这是我当年复分析期中考试原题, 还好我复习了, 当时是班上最高分.

利用因式分解, 我们可以得到更强的推论:

推论 1.6 (代数学基本定理 Plus)

方程 (1.72) 在 $\mathbb{C}$ 上有 n 个解 (含重根).

♡

不过本定理并未给出具体求解的方式, 而 Galois 理论指出一元五次方程以上没有通用求根公式, 所以就此打住.

我们考虑实数和复数的关系, 对 $z = x+iy$, 不难发现 $y=0$ 时, 复数恰好就是实数, 所以每个实数 x 都可以写作 $x+0i$ 的形式, 从而得到 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{C}$ 的自然嵌入:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{C}, \\ x &\mapsto x+0i. \end{aligned}$$

[23] 工程中更多用 j 表示, 但我们会坚持使用 i.

当然也可以说 $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. 由于汉语里实虚相对, 所以我们将 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 中的元素称为**虚数 (Imaginary number)**, 特别地对于 $x = 0$ 的虚数, 称为**纯虚数**. 可见 x 决定了复数是否实, y 决定复数是否虚, 故称 x 为**实部 (Real part)**, 记为 $\mathrm{Re}z$; y 为**虚部 (Imaginary part)**, 记作 $\mathrm{Im}z$.

由于实虚相对, 1 和 i 看起来是无关的, 因此似乎我们可以将其类比为向量中的基, 这样复数 (作为线性空间) 就自然同构到平面中的向量:

$$\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2,$$
$$x + iy \mapsto (x, y).$$

此时 1 对应到横轴的单位向量 $\vec{e_1}$, i 对应到纵轴的单位向量 $\vec{e_2}$. 因此我们想象复数同样地位于一个平面上, 并拥有类似的坐标系, 横着的称为**实轴 (Real axis)**, 竖着的称为**虚轴 (Imaginary axis)**, 这个平面称作**复平面 (Complex plane)**, 如图:

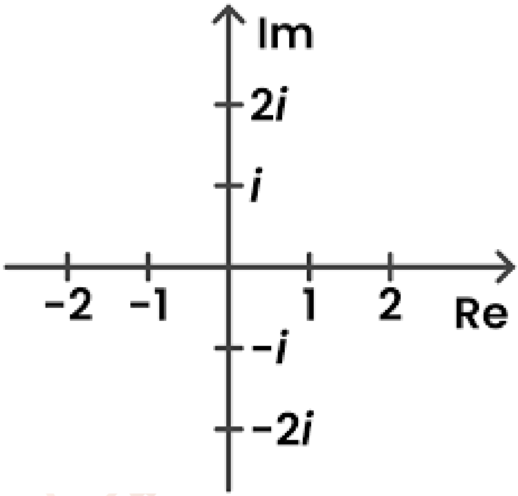


图 1.17: 复平面

我们之前在向量部分未提到的是, 平面向量有一个参数也较为重要 (即使我们并不通过此来研究), 它是位矢与 x 轴正半轴的夹角. 我们说横纵坐标可以确定一个向量, 但从另外一个方面, 向量的模与夹角同样能够确定这个向量. 比如我们记 $\vec{a} = (x, y)$ 的夹角为 θ, 模长为 r, 那么根据几何关系我们得到:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta \end{cases}.$$

对应到复数, 这个角我们称之为复数的**辐角 (Argument)**, 记为 $\arg z$. 并将向量的模长的概念直接迁移到复数上, 定义复数 $z = x + iy$ 的**模**为:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

但同时你会发现, 我们并未规定这个角的范围, 比如 i 的辐角可以是 $\frac{\pi}{2}$, 但也可以是 $\frac{\pi}{2} + 2\pi$, 因为你不确定它到底转了几圈, 而且这个圈数完全不影响复数本身, 所以辐角实际上是一个集合:

$$\arg z := \{\theta + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

这里 θ 为任意满足

$$\begin{cases} x = |z|\cos\theta, \\ y = |z|\sin\theta \end{cases}$$

的数. 那么为了方便起见, 我们会人为地只取位于 $[-\pi,\pi]$ 或 $[0,2\pi]$ 中的辐角, 称之为**辐角主值 (Principle Argument)**, 记为 $\mathrm{Arg}z$. 于是在此概念下我们得到复数的**三角表示 (Trigonometrical representation)**:

$$z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta).$$

而 $z=x+iy$ 称为复数的**代数表示 (Algebraic representation)**, 如果我们接触到复数域上的函数, 那么我们有 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, 于是得到复数的**指数表示 (Exponential representation)**:

$$z=|z|e^{i\theta}.$$

注 注意 0 的辐角是任意的.

值得一提的是基于这个指数关系式我们可以得到著名的 Euler 恒等式.

定理 1.9 (Euler 恒等式)

$$e^{i\pi}+1=0.$$

关于复数的基本概念就到这里, 接下来我们介绍复数的基本运算.

我们在一开始提过复数和向量有一定程度上的相似性, 不仅仅是表达式, 还有运算. 比如我们如下定义复数的加法:

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2).$$

也就是说复数的加法就是把实部虚部对应相加. 同理可以得到减法的规则. 但是, 复数作为一个更大的数系, 我们仍然期望它能够进行乘法, 比如它应当满足如下过程:

$$\begin{aligned}(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)&=x_1\cdot x_2+iy_1\cdot x_2+x_1\cdot iy_2+iy_1\cdot iy_2\\&=x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+x_2y_1).\end{aligned}$$

而除法为:

$$\begin{aligned}\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}&=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}\\&=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.\end{aligned}$$

注意这里我选择在分子分母同乘 x_2-iy_2, 使得分母变为了实数, 这种技巧叫做分母实数化. 而与原复数实部相等, 虚部相反的复数称作它的**共轭复数 (Complex conjugate)**, z 的共轭复数记作 $\bar{z}$. 显而易见的我们有如下性质:

命题 1.27 (共轭复数的性质)

$\forall\, z\in\mathbb{C}$,

1. $\mathrm{Re}z=\mathrm{Re}\bar{z},\ \mathrm{Im}z=-\mathrm{Im}\bar{z}$.
2. $|z|=|\bar{z}|,\ \mathrm{Arg}z=-\mathrm{Arg}\bar{z}$.
3. $z\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2$.
4. $z=\bar{z}\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$.

注 代数上看复数和共轭复数是实部相等虚部相反, 几何上看复数和共轭复数关于实轴对称.

注意到代数表示下复数的乘除结果较为复杂, 我们可以用其它的表示来计算:

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= |z_1||z_2|(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)) \\
&= |z_1||z_2|(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)).
\end{aligned}$$

简单概括来讲就是模相乘, 辐角相加. 同样可以得到除法就是模相除, 辐角相减. 当然这件事从指数表达上看应当更加自然, 但指数表示并非一个初等的结论所以我不建议使用, 但后面出于方便起见我们会使用这种记法, 但请你自动理解为三角表示,

作为这件事的一个直接推论是

定理 1.10 (De Moivre 公式)

$\forall\, z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C}$,

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta),\ \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

证明 归纳.

于是如此定义的四则运算自然地满足交换律, 结合律, 分配律等性质, 从而 $\mathbb{C}$ 可以构成域, 称为复数域. 但注意复数域不是有序域, 下面是一个简单的论证.

> 若 $i > 0$, 那么 $i \cdot i > 0 \Rightarrow -1 > 0$ 矛盾; 否则 $i < 0$, 则 $(-i) > 0 \Rightarrow (-i)\cdot(-i) > 0 \Rightarrow -1 > 0$ 同样矛盾.

所以复数不能比大小.

介绍了复数的基本性质之后, 我们来看一个具体问题.

例题 1.15 已知 $x^2 = a,\ a \neq 0$ 在 $\mathbb{C}$ 上有两个不同的根 $\pm\sqrt{a}$. 那么 $x^n = a$ 有哪些根?

首先设 $a = Re^{i\varphi}$. 如果 $x = re^{i\theta}$ 为方程的解, 那么有

$$r^n e^{in\theta} = Re^{i\varphi}.$$

这里其实是两个方程:

$$\begin{cases} r^n = R, \\ n\theta = \varphi + 2k\pi. \end{cases}$$

第一个方程没有疑问, $r = \sqrt[n]{R}$. 而对于第二个方程, 对于不同的 k, 可以有不同的 θ 作为辐角, 简单来讲如下

$$\frac{\varphi}{n},\ \frac{\varphi}{n} + \frac{1}{n}2\pi, \cdots, \frac{\varphi}{n} + \frac{n-1}{n}2\pi.$$

共 n 个 θ 的取值, 所以总共有 n 个解.

特别地当 $a = 1$ 时, 称方程的解为 n **次单位根**. 特别地记 3 次单位根为 ω.

关于单位根有很多有趣的性质, 这点我们会在习题中体现.

1.4.3 极坐标系

从前面关于向量和复数的讨论中我们可以看见不只是平面直角坐标系, 或者说横纵坐标能够确定点的位置. 角度和距离同样可以.

特别地, 本小节讨论平面情况.

回顾平面直角坐标系的建立过程, 首先在平面上选定一点称为原点, 然后选定一对正交的方向建立坐标轴, 这样根据点相对于横纵坐标轴和原点的位置可以赋予一对参数作为坐标. 那么类似的, 我们可以在平面上选定一点 O 称为**极点**, 选定一条从 O 出发的射线 l 作为**极轴**, 然后对于平面内任何一点 P, 称位矢 $\overrightarrow{OP}$ 的模为**极径**, 记作 ρ; 而 $\overrightarrow{OP}$ 与 l 的夹角为**极角**, 记作 θ. 有序数对 (ρ, θ) 称为点 P 的**极坐标** **(Polar coordinate)**.

不难发现极径对应模长, 极角对应辐角. 那么同样的极角的取值也不是唯一的, 彼此之间相差整数倍的 $2k\pi$. 所以一个点可以有无穷多极坐标表示, 但只有一个直角坐标表示. 同样方便起见我们限制 $\rho \geq 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi$, 这样极坐标的表示也唯一.

以及通过复数的代数表示和三角表示的互化我们能得到直角坐标和极坐标的互化:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}.$$

极坐标常见应用于雷达等领域中, 极坐标的图也和雷达高度相似, 比如下图是每隔 30° 分割一次的极坐标图:

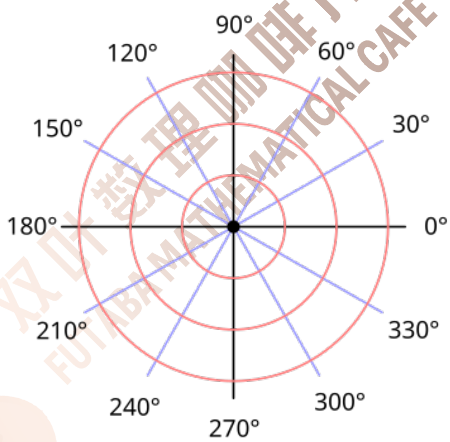


图 1.18: 极坐标

极坐标在研究某些曲线时有更简洁的表达式, 以及某些积分有更简便的计算, 不过这是后话了.

1.5 求和与求积

本节介绍关于求和和求积的基本概念与常见公式.

1.5.1 求和求积的基本概念

定义 1.41 (求和与求积)

对 $a_i,\ i = 1, \cdots, n$, 记它们的和为:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

积为:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n.$$

其中 i 称为求和 (积) 指标, 1 和 n 分别代表求和 (积) 的上限与下限, a_i 为被求和 (积) 的元素, $\sum$ 与 $\prod$ 称为求和符号与求积符号.

♣

注 我们通常用小写拉丁字母如 i, j, k 等作为求和指标, 我们并未要求上下限一定得是正数, 不过一般要求是整数, 常见的下限是 0 或 1, 这个按需选取. 注意求和的上下限本质上只是代表着元素的顺序.

有时求和指标的取值未必如 1 到 n 那样美好, 我们将指标可能取到的值组成一个集合 I, 称作指标集, 此时求和与求积也写为

$$\sum_{i \in I} a_i, \quad \prod_{i \in I} a_i.$$

由于元素的排列顺序不影响最终结果 (因为交换律成立), 所以这个记号是良定义的. 类似的记号与概念我们在前面讲集合的运算时接触过.

顺带一提 $i \in I$ 也可以写为 i 要满足的条件 (默认 i 是整数), 于是 $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 也写作 $\sum_{1 \leq i \leq n} a_i$.

求和指标允许换元. 后面我们会通过例子来展现.

本节所讨论的求和和求积都是有限个数的和与积, 对于上下标有无穷 ∞ 的情况, 请参见无穷级数一节.

$\sum$ 和 $\prod$ 本质上只是代表一种操作, 因此这些符号可以直接拓展到一般的群上, 而不仅仅对数字使用.

借助我们前面介绍的对数, 求积可以轻易地转化为求和:

$$\ln \prod_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \ln a_i.$$

所以后面我们主要以求和为主, 结论可以视情况迁移到求积中.

显而易见, 求和满足一些基本性质:

命题 1.28

1. 线性性: $\sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i + \mu \sum_{i=1}^{n} b_i$.

♠

注意当同时出现多个求和与求积符号时, 运算顺序为从右到左, 或者具体来讲比如:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \right).$$

a_{ij} 意味着这些数同时依赖于 i, j. 注意, 原则上我们认为被求和的元素一定会依赖于求和指标, 即使同时它还依赖于其它的参数, 而所有参数中求和指标已经被代入具体的值, 所以最终的求和结果便不再依赖于这些指标, 举个例子:

例题 1.16

$$\sum_{i=1}^{n} is = s + 2s + \cdots + ns = \frac{n(n+1)}{2} s.$$

is 显然依赖于 i 也依赖于 s, 但对 i 求和之后, i 就被代入具体的值而运算掉, 从而结果与 i 无关, 只依赖于 s. 如果这个时候我们再对 s 也进行某个范围的求和, 就可以得到具体的数.

另外一方面, 即使被求和的元素的表达式没有出现求和指标, 我们也认为它潜在地包含求和指标, 只是取值不随求和指标的变化而改变, 例如

例题 1.17

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 = n.$$

这里你可以认为 $a_i = 1,\ i = 1, \cdots, n$.

这里关于求和规则我们最后再介绍两个很重要的规则:

定理 1.11 (有限求和可以换序)

设 n, m 为常数, 则

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

也即此时求和结果与指标运算前后无关.

注 注意 n, m 为常数很重要, 否则如 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij}$ 求和的上下限彼此之间存在依赖的就不能随意换序, 需要进一步考虑指标范围的变化. 但实际上这个才是我们后面要经常遇到的问题, 而大多数换序的技巧也是在这种情况体现的.

这件事可以想象为 m 行 n 列的点阵, 每个点代表一个数字, 现在想把所有的数加起来. 左边是先把每一列加起来再把结果加起来, 右边是先把每一行加起来再把结果加起来. 结果自然应该是相同的. 类比这种思想我们也可以得到类似于上下三角的求和换序规律.

定理 1.12

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{ij}.$$

这件事最重要的意义在于某些求和的计算难易度与求和顺序存在很大关系. 一个经典的例子体现在初等数论的 Möbius 函数中, 这里暂时不作介绍.

定理 1.13 (分离变量)

设 $a_{ij} = b_i c_j$, 这里 b_i 仅和 i 有关, c_j 仅和 j 有关, 那么

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} c_j\right).$$

这个规则一定程度上简化了计算复杂度, 比如

例题 1.18

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} ij = \sum_{i=1}^{n} i \cdot \sum_{j=1}^{m} j = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{m(m+1)}{2} = \frac{nm(n+1)(m+1)}{4}.$$

1.5.2 求和的常见公式

求和的相当一部分思路都是基于前面所说的裂项, 我们要做的是针对每一种被求和元素的形式来猜想对应的裂项形式.

1.5.2.1 平方和与立方和

我们已经在等差数列的部分知道如何对自然数列求和:

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

这里每一项的次数是 1, 进一步有平方和:

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{1.73}$$

当然这个结果可能你未必清楚但其十分重要, 现在我们使用裂项证明它.

首先如果 $a_n-a_{n-1}=n^2$ 是二次的, 那么我们自然猜想 a_n 应该是三次的, 不妨直接待定系数, 设 $a_n=an^3+bn^2+cn$(注意我们之前说过常数一定会消, 所以直接取 0 即可), 那么

$$\begin{aligned}
n^2&=an^3+bn^2+cn-a(n-1)^3-b(n-1)^2-c(n-1)\\
&=a(3n^2-3n+1)+b(2n-1)+c\\
&=3an^2+(2b-3a)n+(a-b+c)\\
&\Rightarrow\begin{cases}3a=1,\\2b-3a=0,\\a-b+c=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{3},\\b=\frac{1}{2},\\c=\frac{1}{6},\end{cases}
\end{aligned}$$

于是我们知道 $b_n=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$. 特别地 $b_0=0$, 于是

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=b_n-b_0=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}=\frac{n(2n^2+3n+1)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

同理我们可以证明立方和:

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}. \tag{1.74}$$

同理设 $b_n-b_{n-1}=n^3$, $b_n=an^4+bn^3+cn^2+dn$, 那么

$$\begin{aligned}
n^3&=an^4+bn^3+cn^2+dn-a(n-1)^4-b(n-1)^3-c(n-1)^2-d(n-1)\\
&=a(4n^3-6n^2+4n-1)+b(3n^2-3n+1)+c(2n-1)+d\\
&=4an^3+(3b-6a)n^2+(2c-3b+4a)n+(d-c+b-a)\\
&\Rightarrow\begin{cases}4a=1,\\3b-6a=0,\\2c-3b+4a=0,\\d-c+b-a=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{4},\\b=\frac{1}{2},\\c=\frac{1}{4},\\d=0.\end{cases}
\end{aligned}$$

于是 $b_n=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, $b_0=0$, 那么

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=b_n-b_0=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

虽然这个过程看起来很顺利, 但当对于一般的 n, 待定系数将变得十分复杂, 需要一些更加强大的技巧. 这里不作介绍.

1.5.2.2 连续 k 项积的求和

我们说连续 k 项积指的是形如

$$n(n+1)\cdots(n+k-1)$$

的表达式, 我们要做的是对其求和. 同样借助裂项的思路, 而且为了让 b_n 具有形式上的美观性, 我们大胆猜想 b_n 可能是连续 $k+1$ 项积的常数倍, 例如我们先计算连续 $k+1$ 项积的差:

$$\begin{aligned}&n(n+1)\cdots(n+k-1)(n+k)-(n-1)n(n+1)\cdots(n+k-1)\\=&n(n+1)\cdots(n+k-1)((n+k)-(n-1))\\=&n(n+1)\cdots(n+k-1)(k+1).\end{aligned}$$

可见 $b_n=\frac{n(n+1)\cdots(n+k)}{k+1}$, 于是

$$\sum_{i=1}^{n}i(i+1)\cdots(i+k-1)=b_n-b_0=\frac{n(n+1)\cdots(n+k)}{k+1}.$$

特别地, 当 $k=2$ 时, 有

$$1\times2+2\times3+\cdots+n\times(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

这个计算你或许在小学竞赛或者初中竞赛见过, 但现在你已经知道它的一般情况了.

1.5.2.3 连续 k 项积的倒数的求和

首先我们来看一个特殊情况.

例题 1.19 计算

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}.$$

解 这个裂项十分常见, 我们知道 $\frac{1}{i(i+1)}=\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}$, 所以自然取 $b_n=-\frac{1}{n+1}$, 立马得到:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=b_n-b_0=-\frac{1}{n+1}-(-1)=\frac{n}{n+1}.$$

如果要提炼一下这个思想, 本质上是先将分子裂为两个高一次的多项式的差, 然后希望多项式能与分母约分, 从而得到形式上较好的 b_n, 比如这里的裂项细节如下:

$$\frac{1}{i(i+1)}=\frac{(i+1)-i}{i(i+1)}=\frac{i+1}{i(i+1)}-\frac{i}{i(i+1)}=\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}.$$

那么类似地, 对于 $i(i+1)(i+2)$ 作为分母的情况, 我们也可以有类似的操作:

$$\frac{1}{i(i+1)(i+2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(i+2)-i}{i(i+1)(i+2)}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{i(i+1)}-\frac{1}{(i+1)(i+2)}\right).$$

所以我们有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)(i+2)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{i(i+1)}-\frac{1}{(i+1)(i+2)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right).$$

因此推广到一般情况, 我们便可以发现:

$$\frac{1}{i(i+1)\cdots(i+k)} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{i(i+1)\cdots(i+k-1)} - \frac{1}{(i+1)\cdots(i+k)}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)\cdots(i+k)} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(n+1)\cdots(n+k)}\right).$$

这里 $k! = 1\cdot 2\cdots k$, 称为 k 的**阶乘**.

还有诸多常见的求和我们会在后面介绍.

第一章 练习

1. 判断下列表达式是否成立:
   (a). $1 \in \mathbb{N}$;
   (b). $\frac{\pi}{2} \in \mathbb{Q}$;
   (c). $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$;
   (d). $\{1,2,3\} \neq \{3,2,1\}$.
2. 设 A 和 B 为命题, X 和 Y 为集合, E 为性质. 试着用真值表或者其它什么方式来验证下列结论:
   (a). $\neg\neg A := \neg(\neg A) = A$;
   (b). $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$;
   (c). $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$;
   (d). $\neg(\forall\, x \in X : E(x)) = (\exists\, x \in X : \neg E(x))$, 试着从这点出发去理解 “所有的读者都觉得这本书真不错” 的否定是” 有读者觉得这本书并没有那么不错”;
   (e). $\neg(\exists\, x \in X : E(x)) = (\forall\, x \in X : \neg E(x))$, 比方说, “南七中学没女生” 的否定是 “南七中学有女生”;
   (f). $\neg(\forall\, x \in X : (\exists\, y \in Y : E(x,y))) = (\exists\, x \in X : (\forall\, y \in Y : \neg E(x,y)))$(Hint: 把关于 y 的部分看作一个关于 x 的性质), 比方说, “这本书的每一个读者都觉得这一小节里面有难懂的知识” 的否定是 “这本书有读者觉得这一小节里面都是不难懂的知识”;
   (g). $\neg(\exists\, x \in X : (\forall\, y \in Y : E(x,y))) = (\forall\, x \in X : (\exists\, y \in Y : \neg E(x,y)))$, 比如说 “南七中学有人全科满分” 的否定是 “南七中学所有人都有至少一科没拿满分”.
3. 证明:

$$(A \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

4. **(空集的唯一性)** 我在 1.1.1 的结尾问过空集是否可以各种各样. 而我们的结论是: 空集是唯一的. 接下来我将带领你去证明这个结论.

   首先我应当向你展示空集的更严谨的定义:

$$\varnothing_X := \{x \in X \mid x \neq x\}$$

   称为 X 的空集.

   (a). (空集拥有一切性质[24]) 设 E 为性质, 证明: $\forall\, x \in X$

$$x \in \varnothing_X \Rightarrow E(x)$$

[24] 尽管这听起来似乎有些怪异

(b). (空集的唯一性) 证明：若 X 和 Y 为集合, 那么 $\varnothing_X = \varnothing_Y$, 也就是说, 只有一个空集, 这个集合记为 $\varnothing$, 它是任何集合的子集.

5. **(子集的传递性)** 证明：

$$(X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq Z) \Rightarrow (X \subseteq Z)$$

6. **(集合运算的代数性质)** 证明命题1.1.
7. 设 X, Y 为非空集合, 证明：

$$X \times Y = Y \times X \Leftrightarrow X = Y$$

于是你发现 Cartesian 积的交换性是十分苛刻的. 一般情况下 Cartesian 积是不可交换的.

8. (一道简单, 轻松而愉悦的题目) 设 A 和 B 为 X 的子集, 试着去弄清楚下面的运算结果是什么：
   (a). $(A^C)^C$;
   (b). $A \cap A^C$;
   (c). $A \cup A^C$;
   (d). $(A^C \cup B) \cap (A \cap B^C)$;
   (e). $(A^C \cup B) \cup (A \cap B^C)$;
   (f). $(A^C \cup B^C) \cap (A \cup B)$;
   (g). $(A^C \cup B^C) \cap (A \cap B)$.
9. (又是一道简单, 轻松而愉悦的题目) 给定集合 A, B, C, 用 A, B, C 和 $\cap, \cup, \setminus$ 去表示下列集合：
   (a). $D = \{x \mid (x \in A) \wedge [(x \in B) \vee (x \in C)]\}$;
   (b). $E = \{x \mid [(x \in A) \wedge (x \in B)] \vee (x \in C)\}$;
   (c). $F = \{x \mid (x \in A) \wedge [(x \in B) \Rightarrow (x \in C)]\}$.
10. 对下列 $\mathbb{R}^2$ 的子集, 判断哪些可以构成 $\mathbb{R}$ 子集的笛卡尔积：
   (a). $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{Z}\}$;
   (b). $\{(x, y) \mid 0 < y \leq 1\}$;
   (c). $\{(x, y) \mid y > x\}$;
   (d). $\{(x, y) \mid (x \notin \mathbb{Z}) \wedge (y \in \mathbb{Z})\}$;
   (e). $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$.
11. 设 X 为集合, 证明：

$$\bigcup_{A \in \mathcal{P}(X)} A = X \qquad \bigcap_{A \in \mathcal{P}(X)} A = \varnothing$$

12. 设 X 和 A 为 U 的子集, Y 和 B 为 V 的子集, 证明：
   (a). 若 $A \times B \neq \varnothing$, 则 $A \times B \subseteq X \times Y \Leftrightarrow (A \subseteq X) \wedge (B \subseteq Y)$;
   (b). $(X \times Y) \cup (A \times Y) = (X \cup A) \times Y$;
   (c). $(X \times Y) \cap (A \times B) = (X \cap A) \times (Y \cap B)$;
   (d). $(X \times Y) \setminus (A \times B) = ((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B))$.
13. 设 $\{A_i \mid i \in I\}$ 和 $\{B_j \mid j \in J\}$ 为一个集合的子集族, 证明：
   (a). $(\bigcap_i A_i) \times (\bigcap_j B_j) = \bigcap_{(i,j)} A_i \times B_j$;
   (b). $(\bigcup_i A_i) \times (\bigcup_j B_j) = \bigcup_{(i,j)} A_i \times B_j$.
14. 计算复合映射 (设映射的定义域为自然定义域, 即不加以人为的限制)：
   (a). $f = 5x + 3,\ g = x^2,\ f \circ g$;

(b). $f=\sqrt{x+2},\ g=x^2+x-2,\ g\circ f$.

15. 计算:
   (a). $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto 2x+1$ 在 7 处的纤维;
   (b). $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R},\quad x\mapsto x^2+2x+1$ 在 9 处的纤维.
16. 设 $f:A\to B, A_0\subseteq A,\ B_0\subseteq B$
   (a). 证明 $A_0\subseteq f^{-1}(f(A_0))$ 且 f 为单射时两者相等;
   (b). 证明 $f(f^{-1}(B_0))\subseteq B_0$ 且 f 为满射时两者相等.
17. 证明命题1.6.
18. (一道轻松愉悦的练手题) 证明恒等映射的集合值映射仍然是恒等映射.
19. 证明命题1.7.
20. 设 $f:X\to Y,\ g:Y\to V$, 证明:
   (a). 若 f 与 g 均为单射 (或者满射), $g\circ f$ 也是单射 (或者满射)
   (b). f 为单射 $\Leftrightarrow \exists\, h:Y\to X$ 使得 $h\circ f=\mathrm{id}_X$
   (c). f 为满射 $\Leftrightarrow \exists\, h:Y\to X$ 使得 $f\circ h=\mathrm{id}_Y$
21. 设 $f:X\to Y$ 为映射, 证明以下命题等价:
   (a). f 为单射;
   (b). $f^{-1}(f(A))=A,\ A\subseteq X$;
   (c). $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B),\ A,B\subseteq X$.

   (Hint: 证明几个命题等价, 只需证明一条等价链, 于是这一条链上的命题都互相等价, 不需要把每一对命题都证明等价.)
22. 讨论投影映射 $\mathrm{Pr}_k:\prod\limits_{i=1}^{n}X_i\to X_k$ 在 x_k 处的纤维.
23. 证明: 对非空集合 X, $\mathcal{P}(X)$ 与 $\{0,1\}^X$ 等势. (Hint: 构造两个集合间的双射.)
24. 设 $f:X\to Y$ 为映射而 $i:A\hookrightarrow X$ 为 X 的子集 A 到 X 的嵌入, 证明:
   (a). $f|_A=f\circ i$;
   (b). $(f|_A)^{-1}(B)=A\cap f^{-1}(B),\ B\subseteq Y$.
25. 试着根据定义1.27, 给出例1.4中数列的严谨的表达方式 (就是用 Cartesian 积的形式表示这个数列):
   (a). $1,2,\cdots,n,\cdots$;
   (b). $1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$;
   (c). $1,\sqrt{2},\cdots,\sqrt{n},\cdots$.
26. 给定数列的通项公式, 试着给出较优美而简洁的递推公式:
   (a). $a_n=kn+b$;
   (b). $a_n=aq^n$;
   (c). $a_n=aq^{\frac{1}{n}}$.
27. 证明命题1.9.
28. 证明命题1.10.
29. 证明命题1.12.
30. 证明命题1.13.
31. 验证命题1.15.

32. 求下面数列的前 n 项和:

(a). $a_n = 2n,\ \forall\, n \geq 1$;

(b). $a_n = (-1)^n,\ \forall\, n \geq 1$;

(c). $a_n = 2n + 2^n,\ \forall\, n \geq 1$;

(d). $a_n = \begin{cases} 2^n,\ n = 2k-1 \\ 2n,\ n = 2k \end{cases},\ k \in \mathbb{N}_+$;

(e). $a_n = (n+1)2^{n-1},\ \forall\, n \geq 1$;

(f). $a_n = n^2,\ \forall\, n \geq 1$(Hint: 试试裂项, 构造一个三次多项式 $b_n = An^3 + Bn^2 + Cn$).

33. 求解递推数列:

(a). $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 3,\ \forall\, n \geq 1$;

(b). $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 3},\ \forall\, n \geq 1$;

(c). $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n,\ \forall\, n \geq 1$;

(d). $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + n,\ \forall\, n \geq 1$;

(e). $a_1 = a_2 = 1,\ \sqrt{a_{n+2}a_n} - \sqrt{a_{n+1}a_n} = 2a_n,\ \forall\, n \geq 1$(Hint: 构造 $b_n = \sqrt{\frac{a_{n+1}}{a_n}}$);

(f). (Fibonacci 数列)$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,\ \forall\, n \geq 1$, 这是一个非常经典的用无理数去表示有理数的例子;

(g). $a_1 = 2,\ 2a_{n+1}a_n + a_{n+1} - a_n = 2,\ \forall\, n \geq 1$;

(h). $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2,\ \forall\, n \geq 1$(Hint: 考虑两边取对数).

34. 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2b_n + a_n \end{cases},\ \forall\, n \geq 1$$

且 $b_1 = -2,\ b_2 = -1$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式. (Hint: 试着通过方程组得到 $\{a_n\}$ 的递推公式与初值)

35. 证明:

$$\frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \cdots + \frac{1}{2^n+1} < 1,\ \forall\, n \geq 1$$

(Hint: 直接计算左边的和式结果是做不到的, 但把每一项分母的 1 的去掉之后就得到了等比数列, 等比数列的求和则轻而易举, 因此你可以小小地放缩一下.)

36. 计算下列极限, 并用 $\varepsilon - N$ 语言证明之:

(a). $\alpha > 0$ 为常数, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha}$;

(b). $|q| < 1,\ \lim\limits_{n\to\infty} q^n$;

(c). $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}$, 这里 $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$ 称为 n 的阶乘.

(Hint: 当你不知道如何处理指数时, 别忘了有对数这东西. 以及, 适当的放缩会让 N 更好找.)

37. 证明极限的减法运算律.

38. 证明定理1.4.

39. 证明: 若数列 $\{a_n\}$ 满足: 任给 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 只要 $n > N$, 就是

$$|a_n - a| < M\varepsilon$$

这里 M 为常数. 那么 $\{a_n\}$ 收敛到 a.

40. 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$; 反之不一定成立 (举例说明). 但如果 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

41. 证明：若 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\{b_n\}$ 为有界数列, 那么 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.
42. 证明：若 $\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = a$, 且 $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = a$, 那么 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.
43. 计算下列极限：
   (a). $a_n = \frac{4n^2+5n+2}{3n^2+2n+1}$;
   (b). $a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot n}$;
   (c). $a_n = (1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{6})\cdots(1-\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}})$;
   (d). $a_n = (1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})$;
   (e). $a_n = (1+q)(1+q^2)(1+q^4)\cdots(1+q^{2^n})$, $(|q|<1)$.
44. 计算下列极限：
   (a). 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 求 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$;
   (b). 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, 求 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}$;
   (c). 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, 求 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}$.
45. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为 m 个正数, 证明：$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$
46. (自然常数 e) 在后面你将学习到, 数列 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 是收敛的, 它收敛到一个无理数, 称为自然常数, 记为 e, 即：

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

   请利用这个极限计算下面数列的极限：
   (a). $a_n = (1+\frac{1}{2n+1})^{2n+1}$;
   (b). $a_n = (1-\frac{1}{n-2})^{n+1}$;
   (c). $a_n = (\frac{1+n}{2+n})^n$;
   (d). $a_n = (1+\frac{1}{n^3})^{2n^3}$.
47. 证明命题1.26.
48. 证明 $\frac{\infty}{\infty}$ 型 Stolz 定理中, 当 A 为 $\pm\infty$ 的情形.
49. 证明 $\frac{0}{0}$ 型 Stolz 定理.
50. 进行下列常见角度与弧度的互化:
   (a). 30°;
   (b). 45°;
   (c). 60°;
   (d). $\frac{2}{3}\pi$;
   (e). $\frac{3}{4}\pi$;
   (f). $\frac{5}{6}\pi$.
51. 记 $\vec{a} = (1,1,0)$, $\vec{b} = (1,0,2)$, $\vec{c} = (0,3,1)$, 计算:
   (a). $3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$;
   (b). $\vec{b} \times \vec{c}$;
   (c). $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.
52. **(极化恒等式)** 对任意向量 $\vec{a}, \vec{b}$, 证明 $\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right)^2$.
53. 记 $z_1 = 1+i$, $z_2 = 3-2i$.
   (a). 计算 $2z_1 + z_2$;
   (b). 计算 $|z_1 z_2|$.

54. 计算:

(a). $1+\omega+\omega^2$;

(b). $1+\zeta_n+\cdots+\zeta_n^{n-1}$.

这里 ω 为三次单位根, ζ_n 为 n 次单位根.

55. 进行下面直角坐标和极坐标的互化:

(a). 直角坐标 $(1,1)$;

(b). 直角坐标 $(1,-1)$;

(c). 极坐标 $(2,\frac{\pi}{3})$;

(d). 极坐标 $(4,\frac{3}{4}\pi)$.

56. 计算

(a). $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$;

(b). $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}i^3j^3$;

(c). $\sum_{j=1}^{n}(2j-1)(n-j+1)$.

57. 计算

(a). $1^4+2^4+\cdots+n^4$;

(b). $1^5+2^5+\cdots+n^5$.

58. 计算

(a). $2^2+4^2+\cdots+(2n)^2$;

(b). $1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2$.

59. 计算

(a). $\sum_{i=1}^{n}i(i+2)(i+4)\cdots(i+2k)$;

(b). $\sum_{i=1}^{n}i(i+m)(i+2m)\cdots(i+km)$.

60. 计算

(a). $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+2)(i+4)\cdots(i+2k)}$;

(b). $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+m)(i+2m)\cdots(i+km)}$.

第二章 函数

2.1 函数概念与性质

2.1.1 函数的概念与表示

函数其实并非一个新鲜的概念，它描述的是数之间的变化关系，比如温度随着时间推移的变化；或者说数之间的对应关系，比如汽车在每种速度下有着相应的油耗。其抽象内核正是我们前面所介绍过的映射。

而函数，说白了就是数集到数集的映射，不过很多时候也会顺口把一些抽象的映射也说成函数，因此你只要把函数理解成映射就基本没有什么迷糊或混淆的可能性。

函数相关的概念与映射当然也是一致的，例如定义域、到达域、值域、图像。你只要原封不动地将前面的概念里面的"映射"替换为"函数"，就能得到相关的定义。不过对于函数而言，我们通常用*自变量 (Independent variable)* 来代指定义域中的元素，用*因变量 (Dependent variable)* 来代指值域中的元素。一般用 x, y 来分别表示自变量与因变量。

不过需要声明，在高中阶段我们考虑的函数基本都是一元实值函数，即从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数。所以不可避免地会涉及到实数的诸多良好性质。当你试图去研究抽象的映射所具有的性质时，你必须基于定义域与到达域的集合上所具有的结构来进行分析。

以及，我们本章所介绍的函数除非特别声明，均为连续函数。对于连续性的讨论请见选修部分。

关于函数的例子可以回顾映射一节，这里不再赘述。

众所周知，函数有三种表示方式，分别为：列表法、图示法、解析式法。其中列表法在实际应用中使用较多，但其弊端明显：当定义域元素过多或无限时，列表困难而不可能；图示法十分直观，但难以观察到函数各处的具体取值；解析式法简洁而本质，但没有图示直观。我们往往采用后两种方法，并以解析式为主。解析法需在表达式末尾指出自变量所属的定义域，如不引起理解障碍，也可省去。

值得一提的是，有时候某个函数可能是由几个函数拼接而成的，我们称其为*分段函数 (Piecewise-defined function)*，例如某个函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在 $x \le 0$ 时为一次函数 $y = x$，但 $x > 0$ 时为二次函数 $y = x^2$，那么我们可以将解析式写为

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \le 0, \\ x^2, & x > 0. \end{cases}$$

注意，我们并不要求分段函数的各段是衔接起来的，在分界处的取值情况需视具体情况而论。

2.1.1.1 函数的零点

关于函数，一个十分常见的概念是零点。

定义 2.1 (零点)

满足 $f(x_0) = 0$ 的点 x_0 称为函数的零点 *(Zero)*。 ♣

注 你也可以认为零点就是方程 $f(x) = 0$ 的解，或者函数曲线与 x 轴交点的横坐标。这三者是一回事。

例题 2.1 一次函数 $y = ax + b$ 的零点是 $x = -\frac{b}{a}$。二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 可能有两个零点，可能有一个零点，也可能没有零点。

如果要求函数的零点，我们只能直接把方程解出来。但有时候我们只关心零点的存在性，对于连续函数而言，有一个很简单的办法：

定理 2.1 (零点存在性定理)

设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上连续，若 $f(a)\cdot f(b) < 0$，则存在 $x_0 \in (a,b)$ 使得 $f(x_0) = 0$。

该定理的道理也十分容易。从 x 轴上方到 x 轴下方 (或者反过来) 的一根连续的线，必然是要穿过 x 轴的，这个交点的存在性自然是理所当然的。其证明会在选修部分介绍。

作为该定理的直接推论，我们有

定理 2.2 (介值定理)

设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上连续，则 $f(x)$ 取到介于 $f(a), f(b)$ 间的任何值。即，对任意 c 介于 $f(a)$ 与 $f(b)$，存在 $x_0 \in (a,b)$ 使得 $f(x_0) = c$。

证明 令 $g(x) = f(x) - c$，则 $g(a) = f(a) - c$, $g(b) = f(b) - c$，于是 $g(a)\cdot g(b) < 0$，且 $g(x)$ 在 (a,b) 上连续，所以存在零点，记为 x_0，则 $f(x_0) = g(x_0) + c = c$。

很多情况下直接求函数零点是不现实的，但我们仍然有近似的手段：二分法。

设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，且 $f(a)\cdot f(b) < 0$。不妨设 $f(a) > 0$, $f(b) < 0$。考虑 $f(\frac{a+b}{2})$，

- 若 $f(\frac{a+b}{2}) = 0$，则 $\frac{a+b}{2}$ 为所求零点；
- 若 $f(\frac{a+b}{2}) > 0$，则令 $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = b$，继续考虑 $f(\frac{a_1+b_1}{2})$；
- 若 $f(\frac{a+b}{2}) < 0$，则令 $a_1 = a$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$，继续考虑 $f(\frac{a_1+b_1}{2})$；
  - 若 $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = 0$，则 $\frac{a_1+b_1}{2}$ 为所求零点；
  - 若 $f(\frac{a_1+b_1}{2}) > 0$，则令 $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$, $b_2 = b_1$，继续考虑 $f(\frac{a_2+b_2}{2})$；
  - 若 $f(\frac{a_1+b_1}{2}) < 0$，则令 $a_2 = a_1$, $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$，继续考虑 $f(\frac{a_2+b_2}{2})$；
    - 若 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) = 0$，则 $\frac{a_2+b_2}{2}$ 为所求零点；
    - $\cdots$；
    - $\cdots$；

如果算法在有限步终止则得到所求零点，否则按此流程可以取出一列闭区间套 $[a_n, b_n]$。于是根据紧致区间定理 (或者说闭区间套定理)，最后得到一个点 x_0，这个点就是我们要的零点。

事实上零点存在性定理的证明思路也是这个。但现在我们要做具体计算，不可能进行无限次计算。注意到每次产生一个新的子区间就将范围缩小到了原来的一半，因此只要迭代次数够多，我们就可以将零点的范围确定得足够精细，误差足够小。

例题 2.2 以多项式为例，数学家已经证明五次及以上方程不存在一般根式解，但我们仍然可以求得近似解。

考虑 $p(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6$，取 $x = 0, -2$，得 $p(0) = 6$, $p(-2) = -12$。于是我们断定 $(-2, 0)$ 间存在零点。我们取中点，得 $p(-1) = 3$，于是零点位于 $(-2,-1)$ 中，继续考虑 $p(-1.5) = -0.09375 < 0$，于是零点位于 $(-1.5,-1)$ 中。考虑 $p(-1.25) = 1.9716796875 > 0$，于是零点

位于 $(-1.5, -1.25)$ 中，继续考虑 $p(-1.375)\cdots\cdots$ 只要迭代次数足够多，我们确定的范围就越精确。你可以在范围中随意选取数字来近似零点。

但很遗憾，如果仅仅知道端点处的函数值异号，我们只能判断零点的存在性，但无从判断零点的个数。当存在多个零点时，我们也无法保证二分法近似的零点是我们所想的那个。因此我们需要一定程度上的加强：

定理 2.3 (零点存在性定理 Plus)

在零点存在性定理的条件下，若函数在区间上单调，则零点存在且唯一。♡

单调性是我们之后要介绍的概念，你可以简单地理解为函数一昧地增加或减少，体现在图像上就是曲线只下不上或者只上不下，因此穿过 x 轴且只穿过一次。同样地我们此时不予证明。

2.1.2 函数的性质

我们这里仅介绍一些直观而实用的性质。

2.1.2.1 单调性

单调性是描述函数值增减变化的性质。如果函数随着自变量的增长而增长，就是单调增；函数随着自变量的增长而减少，就是单调减。换言之，单调增就是 x 越大 y 越大，单调减就是 x 越大 y 越小。

定义 2.2 (单调性)

设 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为函数，若

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R},$$

则称 f 在 $\mathbb{R}$ 上是增加的 (*Increasing*)。若

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R},$$

则称 f 在 $\mathbb{R}$ 上是严格增加的 (*Strictly decreasing*)。将 $\leq, <$ 替换为 $\geq, >$ 就可以得到减少的 (*Decreasing*) 与严格减少的 (*Strictly decreasing*) 的概念。

如果一个函数在 $\mathbb{R}$ 上是增加的或减少的，那么我们就称它在 $\mathbb{R}$ 上是单调的 (*Monotone*)。类似也可以定义严格单调的 (*Strictly monotone*)。♣

注 上述定义是针对整个定义域而言的，而能够在整个定义域上都单调并非一件容易的事。单调性也是一个局部概念，能够形容函数在局部上的行为。

比如在定义中的表达式，如果将 $\mathbb{R}$ 更改为 A，则可以称 f 在 A 上单调。这里 A 是 $\mathbb{R}$ 的子集。

更常见的一种情况是，A 是某个区间，此时我们称 A 为函数的单调区间，也可以细分为单调增区间与单调减区间。

这个定义不难理解，我们来举一些例子。

例题 2.3 如图 2.1 所示，黑色的线是一次函数 $y = x$ 的局部图像，灰色的线是一次函数 $y = -x$ 的局部图像：

容易验证 $y = x$ 在 $\mathbb{R}$ 上是严格单调增的，$y = -x$ 在 $\mathbb{R}$ 上是严格单调减的。从图像上也十分直观，$y = x$ 的图像就像是上坡，$y = -x$ 的图像就像是下坡。

下面是二次函数 $y = x^2$ 的局部图像：

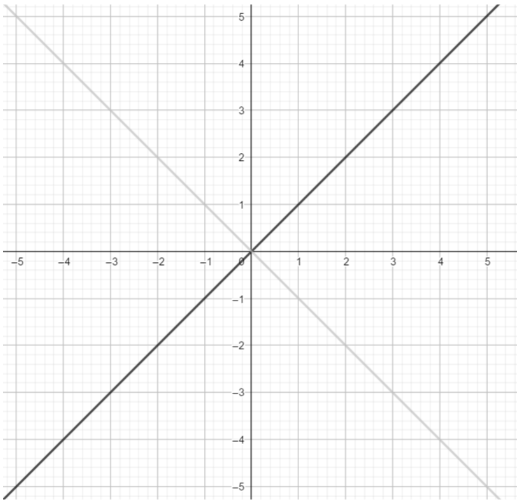


图 2.1: 一次函数的图像

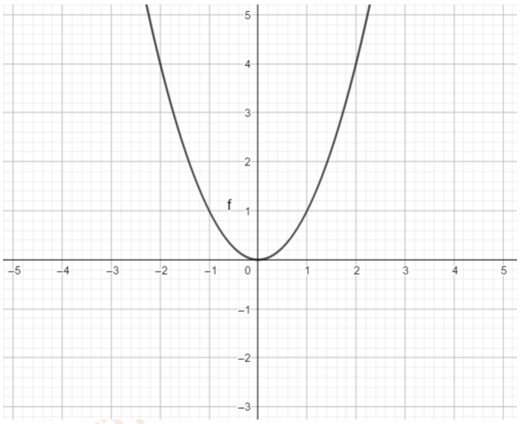


图 2.2: 二次函数的图像

图像呈现的趋势是先下降再上升，因此它在 $\mathbb{R}$ 上并不是单调的。但它在局部上是单调的，$(-\infty, 0]$ 是完整的单调减区间，$[0, \infty)$ 是完整的单调增区间。

例题 2.4 既单调增又单调减的函数一定是常函数。

容易看见，单调性是可以被子集继承的：

命题 2.1

若 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在 $A \subset \mathbb{R}$ 上单调，则 f 在任意 $B \subset A$ 上也单调，且二者单调性一致。

证明 分类讨论即可。留作习题。

和单调性直接相关的一个重要概念是最值与极值。

定义 2.3 (极值与最值)

设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为函数，若存在 $x_0 \in \mathbb{R}$，使得

$$f(x) \leq f(x_0), \ \forall x \in \mathbb{R},$$

则称 $f(x_0)$ 为函数 f 的最大值 *(Greatest value)*，x_0 称为 f 的最大值点 *(Greatest value point)*。类似可以定义最小值 *(Least value)* 与最小值点 *(Least point value)*。

若 x_0 满足存在其邻域 $U(x_0, \varepsilon)$ 使得

$$f(x) \leq f(x_0), \forall x \in U(x_0, \varepsilon),$$

则称 $f(x_0)$ 为函数 f 的极大值 (*Maximal value*)，x_0 称为 f 的极大值点 (*Maximal value point*)。类似可以定义极小值 (*Minimal value*) 与极小值点 (*Minimal value point*)。♣

注 极值与最值的区别在于作用的范围，最值是整体的概念，而极值是局部的概念。从图像上描述，最值是最高的山峰或者最深的山谷，而极值是山包包或山沟沟。最值必然是极值，因此如果我们要寻求函数的最值，我们只需要先求出函数的极值，再逐一比对各个函数值即可。这里面的区别在于，我们在后面会学习到如何通过函数解析式来判断极值位置，但我们无法直接判断最值。

注意，极值点与最值点均为横坐标，而不是“平面中的点”。

例题 2.5 仍然考虑例 2.1 中的函数，很容易注意到一次函数是没有最值的，但二次函数 $y = x^2$ 有最小值 0，在 0 处取得，不存在最大值。

例题 2.6 若一个函数存在最大值与最小值，且二者相等，则这个函数为常函数。

此外我们回顾例 2.3 中的二次函数，横坐标 0 无疑是个很特殊的点，它作为最小值点，同时也是单调增区间和单调减区间的公共点。这两者是否存在联系呢?

命题 2.2

若函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在 $(x_0 - \varepsilon, x_0]$ 上单调减 (增)，在 $[x_0, x_0 + \delta)$ 上单调增 (减)，这里 $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ 为常数，则 x_0 为 f 的极小 (大) 值点。反之不成立。♠

证明 这里只证明极小值点的情况。按定义，令 $\tau = \min(\varepsilon, \delta)$，考虑邻域 $U(x_0, \tau)$ 及其中任意点 x，若 $x \leq x_0$，则 $x \in (x_0 - \tau, x_0] \subset (x_0 - \varepsilon, x_0]$，由命题 2.1，$f$ 在 $(x_0 - \tau, x_0]$ 上单调减，因此 $f(x) \geq f(x_0)$。

同理，当 $x > x_0$ 时，$x \in [x_0, x_0 + \tau) \subset [x_0, x_0 + \delta)$，因此 f 在 $[x_0, x_0 + \tau)$ 上单调增，于是 $f(x) \geq f(x_0)$。

所以 x_0 为 f 的极小值点。

至于反过来，考虑函数 $f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin(\frac{1}{x^2}), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x - x^2 \sin(\frac{1}{x^2}), & x < 0 \end{cases}$，可以验证 0 是极小值点，甚至是最小值点，但左右两侧都不单调。其局部图像如下所示：

该例子不要求掌握，第一遍学习时可以跳过，学习三角函数与导数后再来研究也行。

不过我们后面利用导数来判断极值的方式就是基于命题2.2的结论进行的，因此请务必多加体会，虽然它并不困难。

2.1.2.2 凹凸性

上一小节我们考虑的是函数的增减性，这是很宽泛的。如果我们进一步研究这种增减性的变化，就得到我们本小节所关心的概念。

观察图 2.4，可以发现，一次函数 $y = x$ 的增减速度基本是恒定的，而 $y = x^2$ 从 0 向两边攀升得越来越快。这体现了二者增长性的差异。

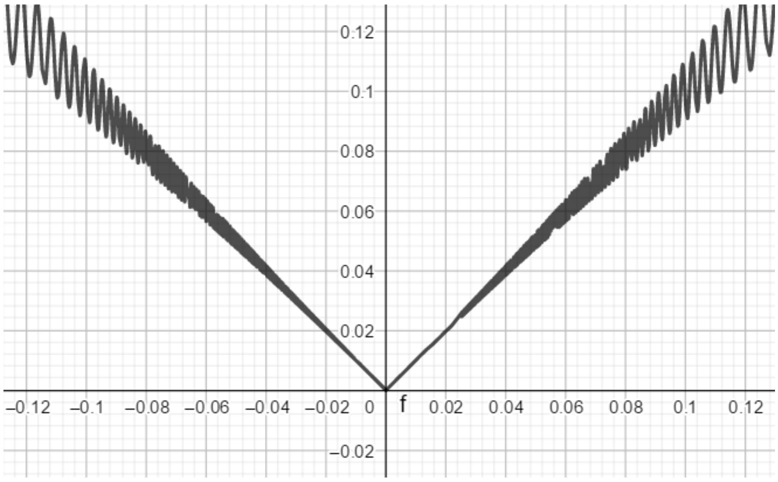


图 2.3: 极值两侧不单调的反例

不过目前我们对这种性质的感受尚且比较模糊，没有一种具体的描述方式。因此我们要尝试进一步理解这种性质对函数图像的作用。

现在想象有一条任意的曲线，从左到右延伸，我们不妨假设它一开始是上升的。如果上升速度是不变的，那么曲线应为直线的形状；如果上升速度逐渐增大，那么曲线应当逐渐向上弯曲；如果上升速度逐渐减小，那么曲线应当逐渐向下弯曲。对于前种情况，我们称曲线在相应的区间上是凸的 (*Convex*)，后者称为凹的 (*Concave*)。

如果一个函数在定义域上是凸的，则称为凸函数 (*Convex function*)，相应有凹函数 (*Concave function*)。

注 这里定义将前者定义为凸实际上是因为图像上方为凸集 (*Convex set*)，即任意两点连线上的点均位于集合内。不同教材对凹凸性的定义可能相反，因此必须仔细确认作者的定义后再阅读。

有时也用上凸和下凸分别去表示凹和凸。

这样的凹凸性还有一种体现方式。当我们连接曲线上两点时，如果曲线是凸的，那么该两点的割线将位于这段曲线上方；如果曲线是凹的，那么该两点的割线将位于这段曲线下方。这里的上方指的是与 y 轴正方向相同，下方指与 y 轴正方向相反。

注意，如果 $f(x)$ 在区间 I 上是凸的，则 $-f(x)$ 在区间 I 上是凹的。因此，我们只需讨论函数的凸性。

对于凸函数 $f(x)$ 以及它所表示的凸曲线 L，任取 L 上的两点 $M_1(x_1, f(x_1))$ 和 $M_2(x_2, f(x_2))$(不妨设 $x_1 < x_2$)，连接这两点的直线方程是

$$y = g(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1), \quad x \in [x_1, x_2].$$

根据上述凸性的描述，该直线在曲线 L 的上方，因此同一个 x 对应的 $g(x)$ 应该高于 $f(x)$，即

$$f(x) \le f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1), \quad x \in [x_1, x_2]$$

对 I 中的任意两点 x_1, x_2 成立。由于 x_1 与 x_2 之间的任何数 x 可表示为 $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$, $\alpha \in (0, 1)$。将上式中的 x 换为 $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$，上述不等式等价于

$$f(x) = f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2).$$

因此我们给出如下定义：

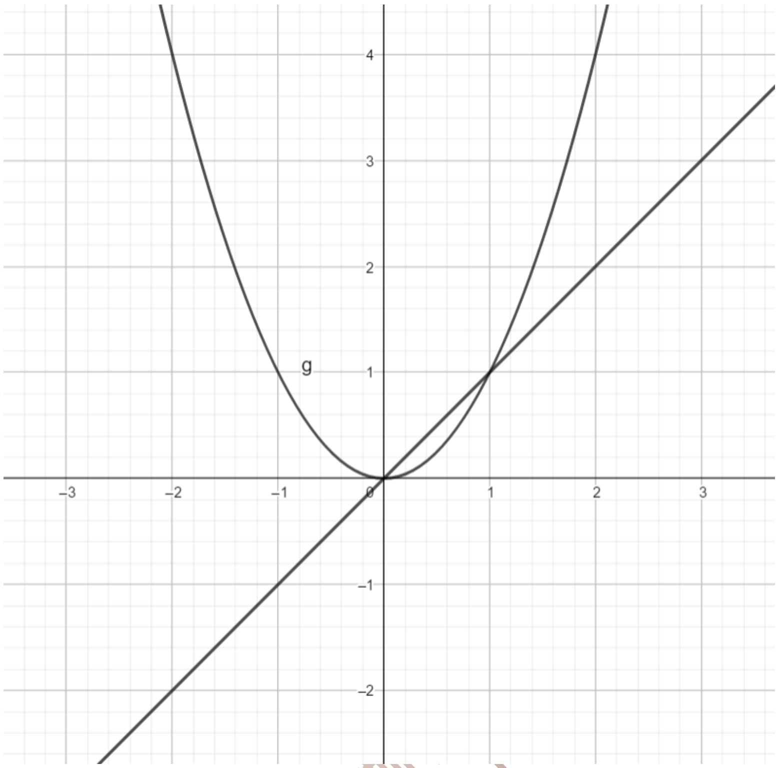


图 2.4: 一次函数与二次函数增减性的对比

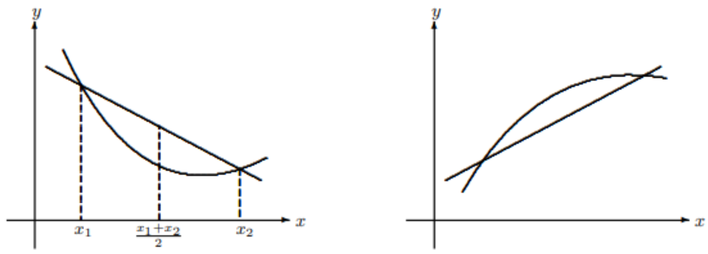


图 2.5: 凸函数 (左) 与凹函数 (右)

定义 2.4 (凸函数)

设 $f(x)$ 是区间 I 上的函数，如果任给 I 中两点 x_1, x_2，以及任意 $\alpha \in (0,1)$ 有

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2),$$

那么称函数是区间 I 上的凸函数，当上式的不等号改为 “$<$” 时，就称 $f(x)$ 为严格凸的。♣

例题 2.7 求证：函数 $f(x) = x^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上是凸函数。

证明 对任意两点 x_1, x_2 以及 $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$, $\alpha \in (0,1)$，有

$$(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)^2 = \alpha^2 x_1^2 + 2\alpha(1-\alpha)x_1x_2 + (1-\alpha)^2 x_2^2.$$

所以

$$(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)^2 - (\alpha x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2) = -\alpha(1-\alpha)(x_1-x_2)^2 < 0.$$

即 $f(x) = x^2$ 是 $\mathbb{R}$ 上的凸函数。

有一个直观的结果：

命题 2.3

如果存在两点 $x_1 < x_2$ 以及介于之间的 x_0，使得定义中不等式的等号成立，那么在区间 $[x_1, x_2]$ 上等号恒成立。

证明 留作习题。

根据定义，有如下结果。

定理 2.4

函数 $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数，当且仅当对任何 $x_1, x_2 \in I$，$x_1 < x_2$，以及任何 $x \in I$，$x_1 < x < x_2$ 有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

证明 先证必要性。

令

$$g(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1),$$

则根据函数凸性，有

$$g(x) \ge f(x) \Rightarrow \begin{cases} \frac{g(x)-f(x_1)}{x-x_1} \ge \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}, \\ \frac{f(x_2)-g(x)}{x_2-x} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}, \end{cases}$$

将 $g(x)$ 的表达式代入得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \ge \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}, \quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

合并即为所得结论。

再证充分性。

令 $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$, $\forall\, \alpha \in (0,1)$，然后代入任意一个不等式化简即可。

这个结论当然是极度直观的。

利用这件事我们可以证明凸函数是连续的。

此外，类似于极值点是单调性发生变化的点，对于凹凸性发生变化的点，我们同样有相关定义：

定义 2.5 (拐点)

设 $y = f(x)$ 在包含点 x_0 的区间上连续，如果点 x_0 是 $f(x)$ 的凸、凹区间的一个分界点，则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的一个拐点 (*Inflection point*)(或称扭转点)。

例题 2.8 0 是 $y = x^3$ 的拐点。

拐点的作用更多是在作图上。由于我们此时对拐点的判断方式十分粗糙，所以我们暂且结束对这方面的讨论，当我们学习导数后我们会重新研究这一块内容。

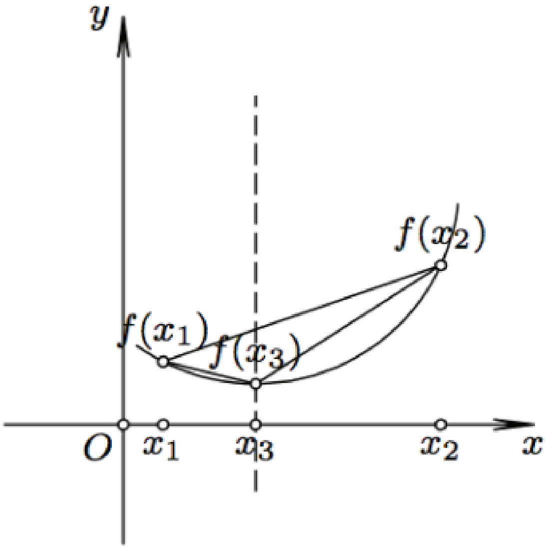


图 2.6: 凸函数的割线

2.2 初等函数

2.3 微积分初步

本节建议在学习 8.1 节后再阅读，否则可能会造成一些困惑。

2.3.1 导数及其应用

2.3.1.1 导数的定义

不得不说，微积分的基础定义与其发展动机是密切相关的，因此我们首先介绍两个来自几何与物理上的例子，藉此你可以较为轻松地理解后续的定义。

例题 2.9 通过初中平面几何的学习，你已经了解什么是圆的切线，它与圆接触得恰到好处。对于圆而言，你可以认为"恰到好处"指的是与圆恰有一个公共点，但很遗憾，这种描述无疑是具有特殊性的。当我们想要对一般曲线求类似的切线时，"交于一点"这个定义并不理想。如抛物线，显然只交抛物线于一点 A 的直线有多条，其中有的明显并不是我们想要的切线。而且，我们想要的"切线"似乎未必只交曲线于一点，比如下面第二张图，它在 A 点处似乎就是我们想要的"切线"，但它与曲线整体的交点并不唯一。此外，有些不圆润的曲线在尖角处可能有几条可能的"切线"。

那么该如何合理定义一条曲线的切线呢？我们注意到直线与曲线的相切其实是局部的事情，我们只在乎切点附近的曲线走向，而其它地方的曲线形状并不影响此处的接触。因此我们考虑仅选取"理应存在的切点"附近的点来模拟这种接触情况。

于是我们考虑一条一般曲线 C，M_0 为曲线 C 上一点，我们要考虑曲线在 M_0 处的切线情况，可以先在 M_0 附近任取一点 M，然后连接 MM_0。连接曲线上两点的直线称为曲线的割线 (*Secant*)。我们记这条割线为 L，然后让点 M 沿曲线 C 滑动到 M_0，如果 L 有一个"极限位置"，我们便将这个"极限位置"上的直线 l，定义为曲线 C 在点 M_0 处的切线。

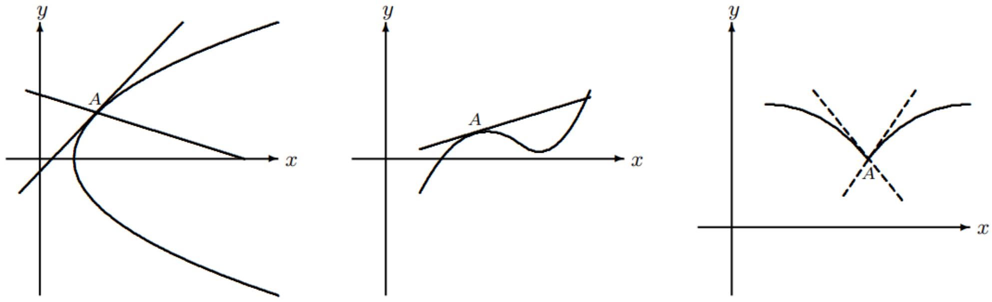


图 2.7: “切线”

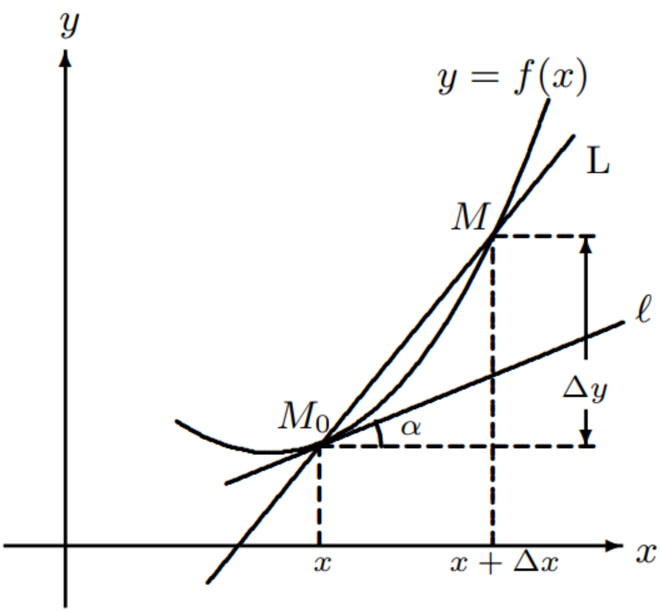


图 2.8: 直线的滑动

不错，这个定义看上去很合理，但还不够清晰。什么叫直线的“极限位置”？我们如何理解这个极限的过程？要想具体地描述它，我们需要进一步拆分这个极限。我们知道直线由其上任意一点与方向决定，如果方向不竖直，那么就可以用斜率来表示。因此直线的“极限位置”理应由直线上一点的极限位置与斜率的极限决定。按照我们前面所讲的，直线通过定点 M_0，这是已知的 (当然你也可以选取 M，认为它最终趋近于 M_0)。关键在于斜率，我们知道割线的斜率是

$$k_L = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

这里 M 的坐标为 $(x, f(x))$，M_0 的坐标为 $(x_0, f(x_0))$。这是一个关于 x 的函数，且 $x \to x_0$，于是我们考察这一过程的极限

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

如果它存在，那么它应当就是切线的斜率。于是我们就可以确定切线的方程。

例题 2.10 运动学中通常要考察质点的运动，对于一段运动过程，平均速度可以一定程度上反映过程，但显然无法给出这段运动的详尽信息，我们需要获知质点在任意时刻下的运动状态。如果这个质点在一维中运动，那么其位置可以表示为关于时间 t 的函数 $s(t)$。如果我们想要获知质点在 t_0 时刻的运动

状态，我们自然会分析质点在 t_0 时刻附近的行为。

我们考虑 t_0 到 t 这个时间段中的运动 (t 和 t_0 的大小关系并不重要)，其平均速度为

$$\overline{v}=\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0},$$

虽然它未必能完美描述质点在 t_0 时刻的运动状态，但它应当是接近的，且 t 越接近 t_0，还原程度越高。因此我们得到了一个极限过程 $t\to t_0$，并且考查 $\overline{v}$ 的极限

$$\lim_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0},$$

如果它存在，那么它应当可以完美反映 t_0 时刻的运动状态，我们称其为质点在 t_0 时刻的**瞬时速度**。

你很容易注意到两个例子中的式子是相似，甚至本质上是相同的。我们不妨跳出例子，单纯考虑这个极限表达式对于一个函数的意义，它其实精准刻画了函数在某点处接下来的瞬时走向 (只要它存在)，这就是我们的基本概念。

定义 2.6 (导数)

设 $y=f(x)$ 在 x_0 的邻域中有定义，若下列差商的极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则称它为 $y=f(x)$ 在 x_0 的导数 *(Derivative)*，记作 $f'(x_0)$，或 $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0}$，$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0}$，并称 $f(x)$ 在 x_0 可导 *(Derivable)*[a]

[a] 不过一般见不到 derivable 的说法，一般说 differentiable，即可微，在选修会介绍。

♣

显然，函数的导数的几何意义正是函数图像在一点切线的斜率。因此导数是一个局部的概念。

当然你也可以用“增量”的语言去描述它。对于函数 $f(x)$，当给自变量 x 在一点 x_0 处一个增量 Δx 时 (这里 Δx 可正可负，但不为零)，则函数值就相应有一个增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，而 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数，就是两个增量之比 (即差商) 的极限

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

注 Leibniz 机智地选择了导数记号 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，其好处在于保持导数等于一个“分数”，即使其分子和分母都趋于零。虽然导数并非通常的分数，但其表现犹如分数，这个记号使得像链式法则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

这样深刻的结果显得几乎是显然的。

Leibniz 的记号同样富有启发性。在其导数记号中，在极限形式下，希腊字母 (表示“差”的“Δ”) 转换成罗马字母 (表示“微分”的“d”)，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

这一点在后面的积分也有所体现。

如果函数在一点的导数不存在，一般来说它的图像在该点无法定义切线。一个特殊情形是在一点 $\frac{\Delta y}{\Delta x}\to\infty$ $(\Delta x\to 0)$，即函数的图象在该点切线的斜率是无穷大，也就是切线平行于 y 轴。今后我们一般不考虑这样的切线。

和讨论函数的连续性一样，也需要讨论函数的单侧可导性。它对研究函数在一点的导数，会提供较有用的信息。

定义 2.7 (单侧导数)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的右边近旁有定义，如果 $\Delta x > 0$，且

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称它为 $f(x)$ 在 x_0 的右导数 (*Right derivative*)，记成 $f'_+(x_0)$，并称 $f(x)$ 在 x_0 右可导 (*Right derivable*)。类似可定义 $y = f(x)$ 在 x_0 的左可导 (*Left derivable*) 和它的左导数 (*Left derivative*)。♣

显然，$f(x)$ 在 x_0 可导的充分必要条件是 $f(x)$ 在 x_0 左、右可导，并有

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

定义 2.8 (区间的可导性)

如果 $y = f(x)$ 在区间 I 的每一点都可导，则称 $f(x)$ 在 I 上可导。如果区间 I 包含有端点，则在该端点处，$f(x)$ 只需有相应的单侧可导性。♣

如果 $y = f(x)$ 在区间 I 中每一点都可导，则对于任意给定的 $x \in I$，对应关系

$$x \mapsto f'(x)$$

又确定了 I 上的一个函数，称为 $f(x)$ 的导函数 (*Derivative function*)，记成 $f'(x), y', \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ 等。我们也称 $f(x)$ 为 $f'(x)$ 的原函数 (*Primitive function*)。

注 如果我们记 $\mathcal{D}$ 为全体可导一元实值函数的集合，$\mathcal{F}$ 是全体一元实值函数的集合，那么你可以认为我们定义了一个映射：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : \mathcal{D} \to \mathcal{F}, \quad f(x) \mapsto f'(x)$$

习惯上我们称 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 为微分映射 (*Differential map*) 或微分算子 (*Differential operator*)。算子是映射的另一种称呼。

值得一提的是，对于一元实值函数而言，可导必连续，但这种连续性仅限于该点处。下面给出了一个在一点处可导，但附近不连续的例子：

例题 2.11 取函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$，那么 $f(x)$ 只在 0 处连续，但它同时也在 0 处可导。

定理 2.5

若 $f(x)$ 在 x_0 可导，则 $f(x)$ 在 x_0 连续。换句话说，若函数在一点 x_0 不连续，则在 x_0 不可导。♡

证明 由已知条件，极限

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

存在。所以

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \right) \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

或者说，在 x_0 的附近，$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 有界，即有 $r > 0$ 和 $M > 0$，使

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| < M \quad (0 < |x - x_0| < r).$$

即当 $0 < |x - x_0| < r$ 时有

$$|f(x) - f(x_0)| < M|x - x_0|.$$

令 $x \to x_0$，也可得证。

但反之并不成立，如下面两个例子：

例题 2.12 函数 $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 处连续，但是在 $x = 0$ 不可导。

证明 当 $x = 0$ 时

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = 1,$$
$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x - 0}{\Delta x} = -1.$$

所以 $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 处不可导。

注意，从图像可以看出，函数在 $x = 0$ 有一个尖点，即在 $x = 0$ 处不光滑，所以没有切线。

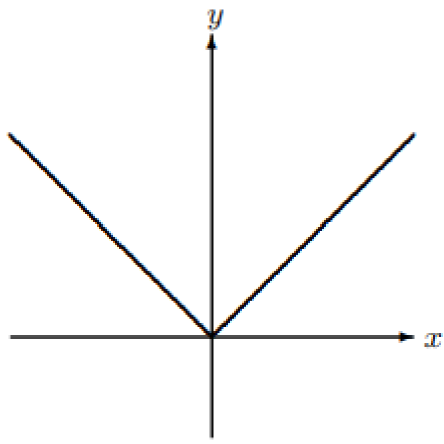


图 2.9: $|x|$ 的图像

例题 2.13 函数 $f(x) = x^{1/3}$ 在 $x = 0$ 连续，但不可导。

证明 在 $x = 0$ 处

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^{1/3}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(\Delta x)^{2/3}} = +\infty.$$

这个例子说明函数的导数不存在的另一种形式，即在一点有“斜率是无穷大”的切线。此时 $f(x) = x^{1/3}$ 的图形在 $(0,0)$ 处的切线平行于 y 轴。

以上两个例子中的连续函数只在一点不可导。很容易举出连续函数在若干点不可导的例子。更令人惊讶的是 Weierstrass 曾提出并构造了一个在实数轴上处处连续、但是处处不可导的函数！这些例子说明，函数的连续性和函数的可导性，是有较大差别的。对比连续和可导的定义，我们也可以感到这种差别：连续性只是定性地描述的一种局部性态，即当自变量变化很小时，函数对应的变化也很小。而可导性则给出这种变化的一种定量的刻画，即函数相应的变化与自变量的变化的比值的极限是存在有限的。

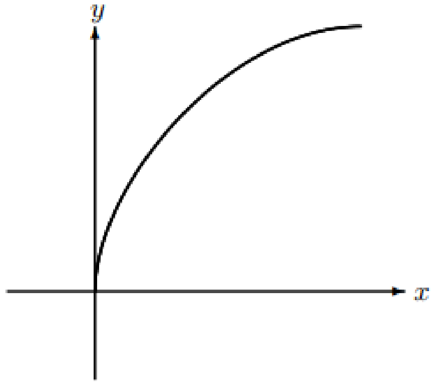


图 2.10: $x^{1/3}$ 的图像

2.3.1.2 基本初等函数的导数

我们已经介绍了导数的定义，自然就掌握了对任意函数求导数的基本方法。但问题在于，计算极限一般而言并不容易，尤其是当函数解析式复杂时，这几乎是一个正常人不愿去做的事。因此我们需要发掘一些新的方法。

我们先将视线放到初等函数上，按照前面所述，初等函数是基本初等函数经过有限次四则运算或复合得到的函数，因此我们分别研究基本初等函数的导数，与导数在四则运算与复合下的行为。

这一小节可以作为定义法求导数的例子。我们知道基本初等函数有六类：常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数。我们这里对部分情况进行计算，你可以在学习后续的求导法则后自行给出剩余情况。

当然，这同时也说明基本初等函数都是可导的。

例题 2.14 (常函数)：设 $f(x) = c$(常数)，求 $f'(x)$。

解

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

这就说明常函数 $f(x) = c$ 的导数为 0。

从直观上看，$f(x) = c$ 是一条水平直线，其上任意一点都有斜率为零的切线 (也是水平的直线)。在选修我们将证明导数处处为零的函数只能是 $f(x) = c$。

例题 2.15 (部分幂函数)：设 $f(x) = x^n$，$x \in (-\infty, \infty)$，其中 n 是自然数，求 $f'(x)$。

解 对任意实数 x，由二项式定理 (见 5.4 节) 得

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n.$$

故

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1} \right] = nx^{n-1}.$$

即 $f(x) = x^n$ 的导函数是 $f'(x) = nx^{n-1}$，导函数的定义域也是 $\mathbb{R}$。特别，当 $n = 1$ 时，函数 $f(x) = x$ 的导函数为常值函数 $y = 1$，即 $f(x) = x$ 在每一点的切线的斜率都是 1。

对于更一般的幂函数，我们需要一些新的法则来计算，这里暂且不作介绍。

例题 2.16 (部分三角函数)：设 $f(x) = \sin x$ 与 $g(x) = \cos x$，求 $f'(x)$ 与 $g'(x)$。

解 对任意一点 x，

$$\Delta f=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

由 $\cos x$ 的连续性以及基本极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x.$$

即 $(\sin x)'=\cos x$，类似可得 $(\cos x)'=-\sin x$。

例题 2.17 (对数函数)：设 $f(x)=\log_a x$, $x\in(0,+\infty)$, $a>0$, $a\neq 1$，求 $f'(x)$。

解 对任意 $x>0$，有 $\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$，且

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\frac{1}{\ln a}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

利用极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

得

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.$$

特别当 $a=e$ 时，上面的结果为

$$(\ln x)'=\frac{1}{x},\quad x\in(0,+\infty).$$

由此可见，对于以 e 为底的自然对数的导数比较简单。

2.3.1.3 导数的运算

我们先来介绍导数的四则运算。

定理 2.6 (导数的四则运算)

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 可导，则 $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$ 与 $\frac{f(x)}{g(x)}$(当 $g(x)\neq 0$ 时) 皆可导，并有

1. $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$;
2. $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$;
3. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$。

证明

1. 对任意 x，注意到

$$\begin{aligned}(f(x)\pm g(x))'&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f(x+\Delta x)\pm g(x+\Delta x))-(f(x)\pm g(x))}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\\&=f'(x)\pm g'(x).\end{aligned}$$

所以 $(f(x)\pm g(x))'$ 不仅存在，且恰等于 $f'(x)\pm g'(x)$。

2. 对任意 x，注意到

$$\begin{aligned}(f(x)\cdot g(x))' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x+\Delta x)g(x)+f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}f(x+\Delta x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}+g(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\ &= f(x)g'(x)+f'(x)g(x).\end{aligned}$$

这里用了一点 Mid-man 的小技巧，极限的结果是基于函数的连续性的 (因为可导)。所以 $(f(x)g(x))'$ 不仅存在，而且恰等于 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$。

3. 对任意 x 满足 $g(x)\neq 0$，连续性保证 $g(x+\Delta x)$ 在 Δx 非常小时亦不为零，于是

$$\begin{aligned}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)}\\ &= \frac{1}{\lim_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)g(x)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x}\\ &= \frac{1}{g^2(x)}\left(g(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)\\ &= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.\end{aligned}$$

这就表明 $(\frac{f(x)}{g(x)})'$ 不仅存在，且恰等于 $\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$。

这里也可以先证明 $(\frac{1}{g(x)})'=-\frac{g'(x)}{g^2(x)}$，然后利用乘积法则。

于是利用上述结果我们可以进一步计算基本初等函数的导数。

例题 2.18 若 $f(x)$ 可导，则 $cf(x)$ 也可导，且 $(cf(x))'=cf'(x)$，其中 c 是常数。

你当然可以按定义证明这件事，但你同样可以采用乘积法则进行计算：

$$(cf(x))'=(c)'f(x)+c(f'(x))=0+cf'(x)=cf'(x).$$

例题 2.19 (剩下三角函数)：求 $\tan x,\cot x,\sec x,\csc x$ 的导数。

解

$$(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

类似得 $(\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$。

$$(\sec x)'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=-\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

当然也可以写成 $\tan x\sec x$ 的样子。类似可得 $(\csc x)'=-\cot x\csc x$。

接着我们介绍复合函数的求导法则。

定理 2.7 (复合函数的求导法则)

设函数 $y=g(x)$ 定义在区间 I 上，函数 $z=f(y)$ 定义在区间 J 上，且 $g(I)\subset J$。如果 $g(x)$ 在点 $x\in I$ 处可导，而 $f(y)$ 在点 $y=g(x)$ 处可导，那么复合函数 $f\circ g$ 在点 x 处可导，且有

$$(f\circ g)'(x)=(f(g(x)))'=f'(g(x))g'(x).$$

证明 任取 $x_0\in I$，记 $y_0=g(x_0)$。这里我们只考虑 x_0 和 $g(x_0)$ 都不是所在区间的端点情况，对于出现

端点的情况，只需在下面的证明中做一些简单修改。定义

$$h(y)=\begin{cases}\frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}, & y\neq y_0,\\ f'(y_0), & y=y_0,\end{cases}$$

显然，$h(y)$ 在 y_0 连续：

$$\lim_{y\to y_0}h(y)=\lim_{y\to y_0}\frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}=f'(y_0)=h(y_0).$$

于是

$$\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}=h(g(x))\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0},$$

这是因为当 $g(x)=g(x_0)$ 时，上式两端都等于 0，当 $g(x)\neq g(x_0)$ 时，根据 $h(x)$ 的定义，上式为

$$\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}=\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0},$$

因此也成立。令 $x\to x_0$，根据 $h(x)$ 在 x_0 的连续性，就有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}&=\lim_{x\to x_0}h(g(x))\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\&=h(g(x_0))g'(x_0)=f'(g(x_0))g'(x_0).\end{aligned}$$

事实上你只需要注意到

$$\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}=\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

当 $x\to x_0$ 时，$g(x)\to g(x_0)$，于是右侧两式都应当趋于某个导数。当然，这里由于 $g(x)$ 可能会与 $g(x_0)$ 相等而导致式子不被定义，所以我们用修改后的 $h(y)$ 去表示之。

定理2.7也可以表示成

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

即，如果 z 是变量 x 的复合函数，中间变量为 y，那么为了求 z 对 x 的微商 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$，可先求 z 对中间变量 y 的微商 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$，再求中间变量 y 对 x 的微商 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，将所得结果相乘就得到 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$。我们称这个等式为链式法则 (*Chain rule*)。

对于多层复合函数，由上述定理也可以得到类似的求导法则，例如 $y=f(u)$ 对 u 可导，$u=g(v)$ 对 v 可导，$v=h(x)$ 对 x 可导，且后一个函数的值域包含在前一个函数的定义域中，则复合函数 $y=f\circ g\circ h(x)$ 对 x 也可导，而且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x).$$

利用链式法则我们可以得到一些新的结果。

例题 2.20 (指数型复合函数)：若 $f(x)>0$ 在定义域上成立，$g(x)$ 是任意函数，且二者均可导，则 $f(x)^{g(x)}$ 可导，且

$$(f(x)^{g(x)})'=\left(g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)f(x)^{g(x)}.$$

解 由于 $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$，如果我们先承认指数函数的可导性 (当然它是对的，只不过我们会在后面证明这件事)，那么它自然就是可导的。

考虑等式：

$$\ln f(x)^{g(x)}=g(x)\ln f(x).$$

我们将左边视作 $\ln x$ 和 $f(x)^{g(x)}$ 的复合函数，则对等式两边求导[1]得

$$\frac{1}{f(x)^{g(x)}}(f(x)^{g(x)})' = g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{1}{f(x)}f'(x)$$

于是

$$(f(x)^{g(x)})' = \left(g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)f(x)^{g(x)}.$$

于是作为这个例子的推论，我们有

例题 2.21 (一般的幂函数)：设 $f(x)=x^r$，$r\in\mathbb{R}$，$x\in\mathbb{R}_+$，求 $f'(x)$。

解

$$(x^r)' = (r\frac{1}{x})x^r = rx^{r-1}.$$

同样还有对数型复合函数：

例题 2.22 (对数型复合函数)：若 $f(x),g(x)>0$ 且可导，则 $\log_{f(x)} g(x)$ 也可导，且

$$(\log_{f(x)} g(x))' = \frac{f'(x)g(x)}{g'(x)f(x)}.$$

这个证明其实很简单，留作习题自行验证。

最后是反函数的求导法则。

定理 2.8 (反函数的求导法则)

设 $y=f(x)$ 在区间 I 上连续，且由反函数 f^{-1}，如果 f 在点 x_0 处可导，且 $f'(x_0)\neq 0$。则定义在区间 $J=f(I)$ 的反函数 f^{-1} 在点 $y_0=f(x_0)$ 也可导，且

$$(f^{-1})'(y_0)f'(x_0) = 1.$$

或写成

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

证明 我们同样只对 x_0 与 y_0 不为区间端点的情况进行证明，否则处理与前一个定理证明类似。

由于 $x=f^{-1}(y), x_0=f^{-1}(x_0)$，所以

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} = \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)^{-1}.$$

因为反函数 $x=f^{-1}(y)$ 也连续，所以当 $y\to y_0$ 时，$x\to x_0$，在上式两边令 $y\to y_0$ 即得定理的结论。

也许有小机灵鬼会直接对等式

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

两边求导来得到所需结论，但注意此时 f^{-1} 的可导性是未知的，所以这样是不合法的。

例题 2.23 (反三角函数)：求反三角函数的导数。

解 这里以 $\arcsin x$ 和 $\arctan x$ 为例。

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

[1]如果两个函数相等，则它们的导数当然也相等

你可以采取同样的方式计算 $\arccos x$ 的导数，但你只需要对等式

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

两边求导即得

$$(\arccos x)' = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

其可导性是由三角函数的可导性保证的。

以及对 $\arctan x$ 有

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

于是就有

$$(\mathrm{arccot} x)' = -(\arctan x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

例题 2.24 (指数函数)：求 $f(x) = a^x$，$a > 0, a \neq 1$ 的导数。

解

$$(a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = y \ln a = a^x \ln a.$$

特别地，当 $a = e$ 时，$(e^x)' = e^x$。这是十分重要的特征。

于是到现在，我们就掌握了六类基本初等函数的导数公式，汇总如下：

$$\begin{aligned}
(c)' &= 0; & (x^r)' &= rx^{r-1}; \\
(\sin x)' &= \cos x; & (\cos x)' &= -\sin x; \\
(\tan x)' &= \sec^2 x; & (\cot x)' &= -\csc^2 x; \\
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \\
(\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2}; & (\mathrm{arccot} x)' &= -\frac{1}{1+x^2}; \\
(e^x)' &= e^x; & (\ln x)' &= \frac{1}{x}; \\
(a^x)' &= a^x \ln a; & (\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a};
\end{aligned}$$

不错，于是我们看到基本初等函数的导函数都是初等函数。

于是基于这些结果，在加上本节介绍的导数运算法则，我们就可以说明所有初等函数都是可导的，且可以从理论上计算任何初等函数的导数。

2.3.1.4 高阶导数

本节小节需要组合数的知识作为前置。

导函数当然也是函数，所以我们自然要问导函数是否可导，它的导函数是什么。设 $y = f(x)$ 在区间 I 可导，它的导函数 $y' = f'(x)$ 也称为函数 f 的一阶导数。如果 $y' = f'(x)$ 作为 x 的函数仍然可导，则其导数称为 f 的二阶导数，并记为 $f''(x) := (f'(x))'$。以此类推，如果函数 f 的第 $n-1$ 阶导函数仍然可导，则其倒数称为 $f(x)$ 的 n 阶导数，并记为

$$y^{(n)}(x),\ f^{(n)}(x),\ \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}(x),\ \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(x).$$

显然有

$$f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))' \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1} f}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right).$$

也就是说，高阶导数其实就是微分算子的复合。

注 前三阶导我们一般用上撇的数量表示，如 f', f'', f'''，当导数阶数高于 3 时，我们改用带括号的上标表示，如 $f^{(4)}, f^{(5)}, \cdots$。

我们知道一个函数的导函数反应的是函数值的变化情况，因此一阶导 f' 描述了原函数 f 的变化情况，而二阶导 f'' 描述了一阶导 f' 的变化情况，三阶导 f''' 又描述了二阶导 f'' 的变化情况……。也就是说，高阶导数反映出函数的深层次信息，对高阶导数了解越多，对函数性质就把握得更精确而深入。

从导数的定义看，一个函数的导函数不必可导，甚至不必连续 (见习题)。因此对函数求导的阶要求越高，对函数的限制就越多。以 $f(x)=|x|$ 这个例子看，该函数在 $x=0$ 不可导，函数的图像在此有一个尖点，不光滑。因此一个函数可导，通常形象地称函数光滑[2]。函数具有越高的高阶导数，则函数就越“光滑”。因此，一般而言，函数的性态也就越好。

如果两个函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 都具有 n 阶导数，那么显然有

$$(u(x)+v(x))^{(n)}=u^{(n)}(x)+v^{(n)}(x).$$

但是，对于它们乘积的高阶导数，则有

定理 2.9 (Leibniz 公式)

若 $u(x)$ 和 $v(x)$ 都有 n 阶导数，则

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

♡

证明 对 n 归纳。$n=1$ 时是显然的，设当 $n \geq 1$ 时有

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)},$$

则

$$\begin{aligned}
(uv)^{(n+1)} &= \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k u^{(n-k+1)} v^{(k)}+C_n^k u^{(n-k)} v^{(k+1)}\right) \\
&= u^{(n+1)} v+\sum_{k=1}^{n} C_n^k u^{(n+1-k)} v^{(k)}+\sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} u^{(n+1-k)} v^{(k)}+u v^{(n+1)} \\
&= u^{(n+1)} v+\sum_{k=1}^{n}(C_n^k+C_n^{k-1}) u^{(n+1-k) v^{(k)}}+u v^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(n+1-k)} v^{(k)}.
\end{aligned}$$

于是由归纳法可知，定理成立。

很多时候求函数的高阶导数往往是一个找规律的问题，当你观察出 n 阶导数的形式时，你可以使

[2]有时候我们说函数光滑指的是函数无穷阶可导，所以你必须通过上下文判断“光滑”指的到底是什么。

用归纳法证明之。

但有时候规律并非那么容易寻求，我们需要采用一点小技巧，如下面的经典例子：

例题 2.25 设 $y = \arctan x$，求 $y^{(n)}(0)$。

解 由 $y' = \frac{1}{1+x^2}$ 可知，函数 $\arctan x$ 有任意阶导数，且

$$(1+x^2)y' = 1.$$

由 Leibniz 公式得到

$$(1+x^2)y^{(n)} + 2(n-1)xy^{(n-1)} + (n-1)(n-2)y^{(n-2)} = 0.$$

将 $x = 0$ 代入就得到递推公式

$$y^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2)y^{(n-2)}(0).$$

由于 $y(0) = 0, y'(0) = 1$，就得到

$$y^{(2k+1)}(0) = (-1)^k(2k)!, \quad y^{(2k)}(0) = 0, \ (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

这里实际上是发现直接求 $\arctan x$ 的 n 阶导数计算量较大，因此我们进行适当的变形来优化计算。最后是一个递推数列问题。

这里变形的动机实际上是注意到多项式的导数有着良好性质：

例题 2.26 设多项式 $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$，则

$$p^{(k)}(x) = \begin{cases} a_n \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} + a_{n-1}\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}x^{n-k-1} + \cdots + a_k k!, & k \le n, \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

也就是说，对一个多项式不停求导，最后必然变成 0。

你可以进一步思考上面的技巧何时可以运用。

2.3.1.5 单调，凸，与极值

我们在一开始就说过，导数"刻画了函数在某点处接下来的瞬时走向"，也就是说，导数决定了函数接下来是向上还是向下，即增加还是减少。而二阶导数则反映了一阶导数的增减，即原函数增减的快慢。所以我们会自然想到用一阶导数与二阶导数去研究函数的单调性与凹凸性。

当然，前提是函数相应阶数的导数存在，因此我们仅考虑可导的函数。

那么直观地，我们有如下结论：

定理 2.10

设 $f(x)$ 在区间 I 上可导。若 $f'(x) \ge 0$ 对任意 $x \in I$ 成立 (若为端点则考虑单侧导数)，那么 $f(x)$ 在 I 上单调增。若 $f'(x) \le 0$ 对任意 $x \in I$ 成立 (若为端点则考虑单侧导数)，那么 $f(x)$ 在 I 上单调减。

若不等号是严格的，则相应的单调性是严格的。

逆命题也成立。

这个定理的严格证明要用到微分中值定理 (见 8.2)，因此我们这里默认其正确，并不加证明地使用。

这件事情的重要之处在于，我们可以抛弃定义式的验证方式，转而以导数的方式去判断函数的单调性。这为计算带来了极大的方便。以及，我们可以精确地计算出完整的单调区间。

下面是一个直观的例子：

例题 2.27 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $f'(x_0) > 0$，则存在 δ 使得 $f(x_0) < f(x)$ 对任意 $x \in (x_0, x_0+\delta)$ 成立。

也就是说，如果函数在一点的导数大于零，那么至少存在右侧一小段曲线是高于该点的。类似的，也存在左侧一小段曲线低于该点。你也可以自行写出 $f'(x_0) < 0$ 的情况。

证明它只需要用到极限的基本性质。你可以自行验证它。

但注意，我们此时仅仅知道函数在一点的导数值，我们无法以此来判断其它地方的函数值，自然也无从判别两侧的单调性。这里我们只能比较 $f(x_0)$ 和附近的 $f(x)$，而无法对其它点进行比较。

特别地，如果 $f(x_0) = 0$，即 x_0 为零点，那么可以预料，如果 $f'(x_0) > 0$，那么曲线就是从下方穿过了 x 轴，x_0 的左边在 x 轴下方，右边在 x 轴上方；如果 $f'(x_0) < 0$，那么曲线就是从上方穿过了 x 轴，x_0 的左边在 x 轴上方，右边在 x 轴下方。但如果 $f'(x_0) = 0$，那么曲线究竟有没有穿过 x 轴呢？我们就需要判断更高阶导数了。

这件事情和我们接下来关于极值点的讨论有关。作为上例的直接推论，我们有

定理 2.11

设 x_0 为函数 $f(x)$ 的极值点，且 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f'(x_0) = 0$。

证明 若 $f'(x_0) \neq 0$，根据上例结论，与极值点矛盾。

注 注意，这里可导的条件实际上也蕴含了 x_0 在定义域的内部。如果 x_0 在定义域边界上，那么此时至多单侧可导，也未必有单侧导数为 0。

但反过来未必正确，例如考查 $f(x) = x^3$，在 0 处导数为零，但 0 并不是它的极值点。我们思考其原因，发现其导数 $f'(x) = 3x^2$ 在 0 的左右两边是同号的！所以原函数在 0 处的单调性未发生变化。

我们将满足 $f'(x_0) = 0$ 的点 x_0 称为驻点 *(Stationary point)*。根据刚才的讨论，驻点未必是极值点。要想这件事情成立，我们必须让单调性在驻点两侧发生变化，这正是二阶导数的作用。

定理 2.12

设 x_0 为函数 $f(x)$ 的驻点，且 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导。若 $f''(x_0) > 0$，那么 x_0 为极小值点；若 $f''(x_0) < 0$，那么 x_0 为极大值点。

证明 这里仅证明 $f''(x_0) > 0$ 的情况。

由 $f'(x_0) = 0$，$f''(x_0) > 0$，可知存在 x_0 的邻域 $U(x_0)$，使得对 $x \in U(x_0)$，当 $x < x_0$ 时，$f'(x) < f'(x_0) = 0$；当 $x > x_0$ 时，$f'(x) > f'(x_0) = 0$。

于是邻域中，$f(x)$ 在 x_0 左侧单调减，右侧单调增，所以 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点。

但我们会继续追问如果 $f''(x_0) = 0$ 怎么办？类似的，我们可以继续求更高阶导数的值。为了得到较一般的规律，我们先研究各阶幂函数的情况：

例题 2.28 以下是前几阶幂函数的极值点与相应的导数情况：

- $f(x) = x$，0 不是极值点。一阶导不为零。
- $f(x) = x^2$，0 是极值点。前一阶导为零，二阶导不为零。
- $f(x) = x^3$，0 不是极值点。前二阶导为零，三阶导不为零。
- $f(x) = x^4$，0 是极值点。前三节导为零，四阶导不为零。
- $f(x) = x^5$，0 不是极值点。前四节导为零，五阶导不为零。
- $f(x) = x^6$，0 是极值点。前五阶导为零，六阶导不为零。

- ……

观察发现，当幂函数前 $2k-1$ 阶导为零，第 $2k$ 阶导不为零时，0 是极值点；前 $2k$ 阶导为零，第 $2k+1$ 阶导不为零时，0 不是极值点。而且上述极值点均为极小值点，相应的最高阶非零导数为正。

注 上例中 0 同时也是函数的零点，这种函数值与前若干阶导数均为零的点称为多重零点 (*Multiple zero*)，即，若 x_0 满足

$$f(x_0)=0,\ f'(x_0)=0,\cdots,f^{(n-1)}(x_0)=0,\ f^{(n)}(x_0)\neq 0,$$

则称 x_0 为 f 的n 重零点 (*Zero of multiplicity* n) 或n 阶零点 (*Zero of order* n)。或者也可以如下定义：若存在相应阶可导函数 $g(x)$ 使得

$$f(x)=(x-x_0)^n g(x),\ g(x_0)\neq 0,$$

则称 x_0 为 f 的n 重零点。

所以我们可以用 $f'(x)$ 的零点重数来描述最高阶非零导数的相应阶数。比如下面命题描述的是 $f'(x)$ 的零点重数为奇数的情况。

于是我们猜想：

命题 2.4

设函数 $f(x)$ 在 x_0 处 $2n$ 阶可导，且 $f^{(k)}(x_0)=0,\ \forall\, k=1,\cdots,2n-1$。若 $f^{(n)}(x_0)>0$，则 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点；若 $f^{(n)}(x_0)<0$，则 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点。

证明 这里只证明 $f^{(2n)}(x_0)>0$ 的情况。

当 $n=1$ 时，前面已经证明过。设当 $n=m$ 时结论成立，则当 $n=m+1$ 时，有

$$(f'')^{(k)}(x_0)=0,\ \forall\, k=1,\cdots,2m-1,\quad (f'')^{(2m)}(x_0)>0.$$

于是根据假设，x_0 为 $f''(x)$ 的极小值点，于是 $f''(x)\geq f''(x_0)=0$ 对 x_0 的邻域 $U(x_0)$ 成立，从而 $f'(x)$ 在 $U(x_0)$ 上单调增，且 $f'(x_0)=0$，于是 $f(x)$ 在 x_0 左侧单调减，右侧单调增，为极小值点。

由归纳法知结论对所有 n 成立。

但我们自然要问，剩下的情况呢？如果 $f'(x)$ 的零点 x_0 的重数是偶数 (不低于 2)，情况又该如何？这就牵涉到另一个概念。

我们仍然从幂函数的情况入手。考虑 $y=x^3$，注意到，$f'(0)=0, f''(0)=0, f'''(0)=6\neq 0$，而 0 不是极值点，0 是拐点。

这并不是一个巧合。设想任意函数 $f(x)$，其导数 $f'(x)$ 的零点 x_0 的重数是偶数，如果为二阶，那么情况与 x^3 类似。对于二阶以上的情况，$f'''(x)$ 的零点 x_0 的重数就是奇数。利用上面命题结论，我们知道 x_0 是 $f'''(x)$ 的极值点，且 $f'''(x_0)=0$，因此 $f'''(x)$ 在 x_0 附近同号，即 $f''(x)$ 在 x_0 附近单调，又 $f''(x_0)=0$，所以 $f(x)$ 的凹凸性在 x_0 两侧发生变化，从而 x_0 是拐点。

当然，这依赖于我们利用二阶导数对凹凸性进行的分析。现在我们来介绍之。

我们之前说过，凹凸性反映的是单调性的变化，对于可导函数而言，即 $f'(x)$ 的增减。如果 $f'(x)$ 依然可导，那么 $f''(x)$ 自然反映的就是 $f'(x)$ 的变化情况。这就启发我们用二阶导数去研究函数的凹凸性。

直观地，我们有如下结论：

定理 2.13

设 $f(x)$ 是区间 I 上连续函数。

1. 若函数在 I 内部可导。则 $f(x)$ 在 I 上是 (严格) 凸函数，当且仅当其导函数 $f'(x)$ 在 I 内 (严格) 单调递增。
2. 若函数在 I 内部二阶可导，则 $f(x)$ 在 I 上是凸函数，当且仅当在 I 内部 $f''(x) \geq 0$。(而严格凸的充要条件是 $f''(x) \geq 0$ 且在任何子区间上不恒为零)。

我们仍然不加证明地承认它。

高中阶段遇到的绝大多数函数都是二阶可导的，所以往往只需要掌握第二条规律。但第一条定律也不难理解，比如下面是一个第二条规律不适用的例子：

例题 2.29 令函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$，那么容易验证 $f(x)$ 是凸的，且一阶可导，但在 0 处不二阶可导。

进而我们可以给出拐点的更可行而有效的判断方法：

定理 2.14

设 $f(x)$ 在 x_0 连续，在 x_0 的一个邻域 (不包含 x_0) 内可导。如果在 x_0 的左侧某个区间 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内 $f'(x)$ 严格单调增 (或减)，而在 x_0 的右侧某个区间 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内 $f'(x)$ 严格单调减 (或增)，那么 x_0 是 $f(x)$ 的拐点。

定理 2.15

设 $f(x)$ 在 x_0 连续，在 x_0 的一个邻域 (不包含 x_0) 内二阶可导。如果在 x_0 的左侧某个区间 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内 $f''(x) > 0 (< 0)$，而在 x_0 的右侧某个区间 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内 $f''(x) < 0 (> 0)$，那么 x_0 是 $f(x)$ 的拐点。特别当 $f(x)$ 在 x_0 处有二阶导数时，x_0 是拐点的必要条件是 $f''(x_0) = 0$。

对于高阶可导的情况，一种完全的判断方法可以参考前面的结论。如果函数的导数的零点的重数是有限的，那么情况就已经解决了。

注 拐点未必要是驻点，例如 $\tan x$，0 是它的拐点，但不是驻点。如果 x_0 同时是 $f(x)$ 的拐点和驻点，我们称 x_0 为鞍点 (*Saddle point*)。

因此判断拐点时未必要关心 $f'(x)$ 的取值，从 $f''(x)$ 开始分析即可。

但是有些比较奇妙的例子，比如 $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$(在 0 处补充定义 $f(0) = 0$ 使其连续)，0 是其零点，且零点重数是无穷的。从指数函数本身的性质可以判断 0 是极小值点，但上述规律均无法使用。

对于这种情况，分析单点的各阶导数不再奏效。所以我们应该回到基本性质，研究一阶与二阶导数在 0 附近的取值。

2.3.1.6 函数作图

我们知道函数图像对我们研究函数很有帮助，很多情况下，如果我们能绘制一副函数的图像，将为问题的研究带来许多便利。

但很多情况下，我们并不要求能精准无误地描绘图像，而是只需要大致形状符合即可。要做到这一点，我们只需要知道函数的特殊点处取值，与部分性质。概括来说，要得到一个较精确的函数图像，

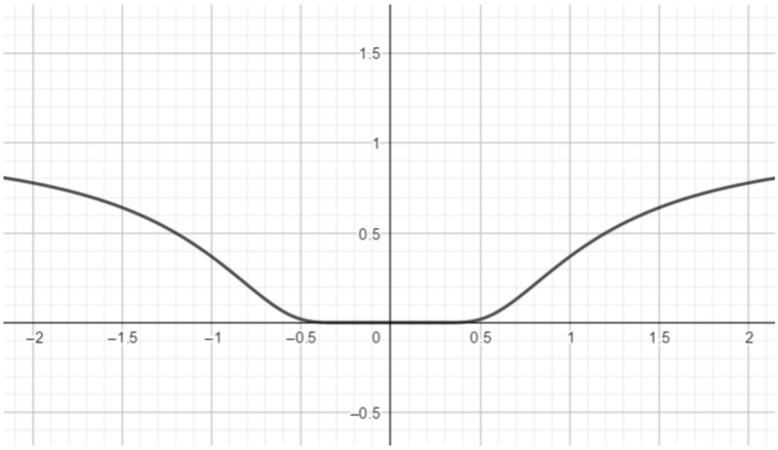


图 2.11: $e^{-\frac{1}{x^2}}$ 的图像

一般有以下几步。

1° 确定函数的定义域，找出函数的间断点；

2° 确定函数是否具有奇偶性、周期性、及其他对称性；

3° 确定函数的单调区间与极值点；

4° 确定函数的凸、凹区间和拐点；

5° 确定函数是否有渐近线；

6° 求出一些特殊点的值。

这里第五步的渐近线是如下概念：

定义 2.9 (曲线的渐近线)

1. 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$，则称 $y = a$ 或 $y = b$ 为 $y = f(x)$ 的一条水平渐近线 *(Horizontal asymptote)*；
2. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$，则称 $x = x_0$ 为 $y = f(x)$ 的一条竖直渐近线 *(Vertical asymptote)*；
3. 如果存在 $a \neq 0$ 使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$，则称 $y = ax + b$ 为 $y = f(x)$ 的一条斜渐近线 *(Oblique asymptote)*。

♣

这并非是一个新鲜概念。反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 具有两条渐近线，为两条坐标轴。指数函数 a^x 有一条水平渐近线，为 x 轴。对数函数 $\log_a x$ 有一条竖直渐近线，为 y 轴。对勾函数 $x + \frac{1}{x}$ 有一条竖直渐近线 y 轴，和一条斜渐近线 $y = x$。

水平渐近线与竖直渐近线是易于观察而明显的，但斜渐近线可能就相对困难。如何求 $y = f(x)$ 的斜渐近线？设 $y = ax + b$ 是 $y = f(x)$ 的一条斜渐近线，以正无穷远处趋近为例，由于

$$0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - (ax + b)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - a\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} - a,$$

所以

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

于是进一步，

$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax).$$

就可以求得斜渐近线。

下面是一个绘图的例子。

例题 2.30 确定函数 $f(x)=e^{-x^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的形态。

解 首先注意到函数是一个偶函数 (所以只要掌握在 y 轴一侧的形态即可)。因为

$$f'(x)=-2xe^{-x^2},\quad f''(x)=2(2x^2-1)e^{-x^2}.$$

所以当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$，函数是单调递增的；当 $x>0$ 时，$f'(x)<0$，函数是单调递减的；因此 $x=0(f'(0)=0)$ 是极大值点。而 $f''(x)=0$ 的解是 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，它们是可能的拐点。

在区间 $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ 中，$f''(x)<0$，故函数在其上是凹的；

在区间 $(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})$ 以及在 $(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$ 中，$f''(x)>0$，故函数在这两个区间上是凸的；于是，上述两阶导函数的两个零点 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 都是函数的拐点。从数轴的负方向看过来，在拐点 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 处，函数由凸变凹，在拐点 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 处，函数由凹变凸。

为清楚起见，将上面的结果列成一个表如下：

x	$(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2},0)$	0	$(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	凸	拐点	凹	极大值点	凹	拐点	凸

又因为 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x^2}=0$，故 x 轴是曲线的一条渐近线 (除此之外没有其他的渐近线)。

根据上面的所有信息，就可以在 Oxy 平面上绘制函数的图像。

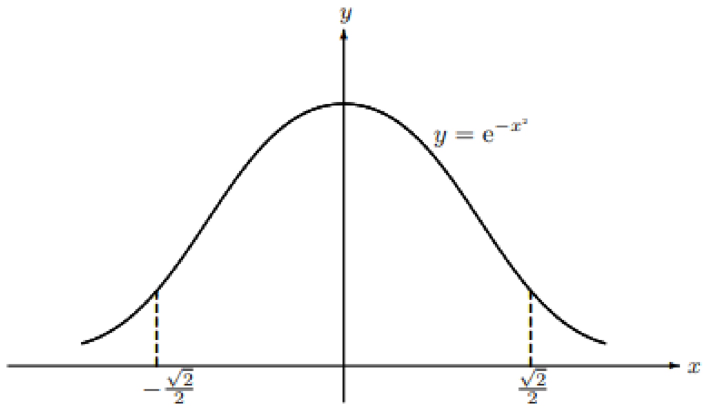


图 2.12: e^{-x^2} 的图像

2.3.2 不定积分

上一小节中我们介绍了函数的导数，并且掌握了计算原函数的导数的方式。那么现在一个自然的问题是，已知导函数，是否能够确定原函数？如何计算？

2.3.2.1 不定积分的概念与计算方法

首先我们从导函数的视角重新定义原函数。

定义 2.10 (原函数)

设 $f(x)$ 是区间 I 上给定的函数，若存在一个可导函数 $F(x)$，使得在区间 I 上有

$$F'(x) = f(x).$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数 (*Primitive function*)。 ♣

注 这个定义与先前的导数定义的差别在于视角。之前的定义以原函数为主，定义其导函数；这里以导函数为主，定义原函数。

容易看出，一方面，如果 $F(x)$ 是 $f(x)$(在区间 I 上) 的一个原函数，则 $F(x)$ 加上一个任意常数后仍然是 $f(x)$ 的一个原函数；另一方面，对于函数 $f(x)$ 在区间 I 上任意两个原函数 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$，它们的差 $F_1(x) - F_2(x)$ 一定满足 $F_1'(x) - F_2'(x) = 0$，所以是一个常数。因此，$f(x)$(在区间 I 上) 的原函数的全体可表示为

$$F(x) + C$$

的形式，其中 $F(x)$ 为 $f(x)$(在区间 I 上) 的一个原函数，而 C 是任意的常数。

函数 $f(x)$ 的原函数的全体也称为 $f(x)$ 的不定积分 (*Indefinite integral*)，记作

$$\int f(x)\,\mathrm{d}\,x,$$

其中 "$\int$" 称为积分号，$f(x)$ 称为被积函数 (*Integrand*)，$f(x)\,\mathrm{d}\,x$ 称为被积表达式。注意，在积分号 $\int$ 下写的是所求原函数的微分，而不是导数。

由导数的几何意义，可以从几何上解释求函数 $f(x)$ 的原函数的问题：在 Oxy 直角坐标系中找出一条曲线 $y = F(x)$，使其在 x 处的切线斜率为 $f(x)$。这样的一条曲线，称为 $f(x)$ 的一条积分曲线 (*Integral curve*)，将它沿着 y 轴的方向作平移，便得出所有符合上述要求的曲线。因此，在几何上，不定积分 $\int f(x)\,\mathrm{d}\,x$ 表示包含上述全部积分曲线的曲线族。

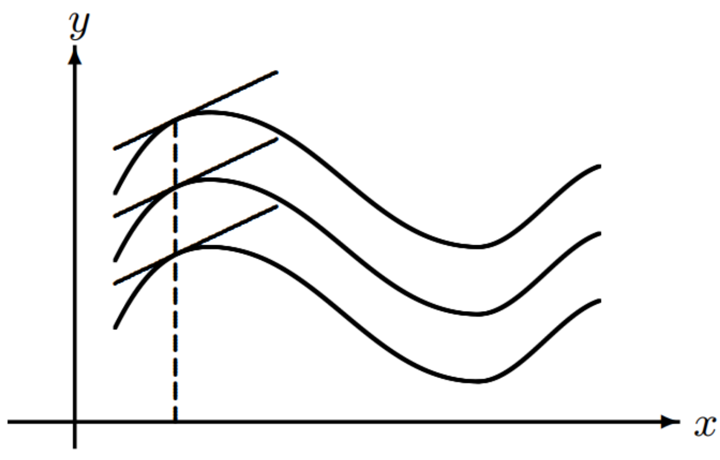


图 2.13: 积分曲线族

有些问题中，要求出 $f(x)$ 的过给定一点 (x_0, y_0) 的积分曲线。这时，可根据要求，使得常数是一个确定的值。通常，称确定常数 C 的条件

$$y(x_0) = y_0, \quad 或\ y\,|_{x=x_0} = y_0,$$

为初始条件。带有初始条件的求原函数问题，称为初值问题。

尽管在这里我们暂且并不关心可行性的问题，我们必须提醒，并非所有函数都可以求原函数，也并非所有原函数都是初等函数的形式。这是不应当奢求的。

相比导数已然成熟的计算方式，积分计算不存在必然可行的方法，但大多数情况下我们仍然可以采用类似的思路，即先研究简单函数的积分，再试着将被积函数不断拆分为更简单的函数。

根据前面所总结的基本初等函数的导数公式，我们可以写出类似的积分公式 (其中 C, C' 为任意常数)：

(i) $\displaystyle\int 0\,\mathrm{d}\,x = C$；

(ii) $\displaystyle\int x^\alpha\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1)$；

(iii) $\displaystyle\int a^x\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{\ln a}a^x + C,\ (a > 0, a \neq 1)$；

(iv) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x = \ln|x| + C$；

(v) $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}\,x = -\cos x + C;\quad \int \cos x\,\mathrm{d}\,x = \sin x + C$；

$\displaystyle\int \sec^2 x\,\mathrm{d}\,x = \tan x + C;\quad \int \csc^2 x\,\mathrm{d}\,x = -\cot x + C$；

(vi) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x = \arcsin x + C = -\arccos x + C'$；

$\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x = \arctan x + C = -\mathrm{arccot} x + C'$。

以及，不定积分的基本性质：

1° 如果 a 是常数 $(a \neq 0)$，则 $\displaystyle\int a \cdot f(x)\,\mathrm{d}\,x = a \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}\,x$；

2° $\displaystyle\int [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}\,x = \int f(x)\,\mathrm{d}\,x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}\,x$。

但注意，一般而言 $\displaystyle\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x \neq \left(\int f(x)\,\mathrm{d}\,x\right) \cdot \left(\int g(x)\,\mathrm{d}\,x\right)$，以及也没有除法的那种式子。关于乘法的计算可以参考下面介绍的分部积分法。

上述性质是求导法则显然的推论，但应该注意到，关于不定积分的等式实际上是关于函数族的等式 (即一个集合等式)。性质 1° 的含义是，当 $a \neq 0$ 时，$a \cdot f$ 的原函数可由 a 乘 f 的原函数得到；而且 a 乘 f 的原函数也必是 $a \cdot f$ 的原函数。性质 2° 具有类似的含义。

由上述性质，可以将一个较复杂的不定积分化为若干个已知的不定积分的和，进而得出结果。

例题 2.31 求 $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+1}{x+1}\,\mathrm{d}\,x$。

解

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-3x+1}{x+1}\,\mathrm{d}\,x &= \int \left(x - 4 + \frac{5}{x+1}\right)\mathrm{d}\,x \\ &= \int x\,\mathrm{d}\,x - 4\int \mathrm{d}\,x + 5\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x+1} \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5\ln|x+1| + C.\end{aligned}$$

(注意，上面第二个等式右端的每一个不定积分都含有一个任意常数，最后合并记作 C；关于这一点，以后不再申明。)

例题 2.32 求 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}\,\mathrm{d}\,x$。

解

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}\,\mathrm{d}\,x = \int \sec^2 x\,\mathrm{d}\,x + \int \csc^2 x\,\mathrm{d}\,x \\ &= \tan x - \cot x + C.\end{aligned}$$

例题 2.33 求 $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}\,\mathrm{d}\,x$。

解

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}\,\mathrm{d}\,x &= \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}\,x = \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}\,x - \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x \\ &= -\frac{1}{x} - \arctan x + C.\end{aligned}$$

然而，依据上述性质求不定积分并不具有广泛性。为了更好地回答如何求不定积分的问题，下面分别介绍两种方法——换元积分法和分部积分法。

换元积分法 换元积分法是求不定积分的一种基本方法，它与复合函数的求导法则相对应。其原则，大致地说，是引入新的积分变量，以改变被积函数的形式，使不定积分易于求出。

定理 2.16 (换元积分法)

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 是一个原函数 (即 $F'(x)=f(x)$)，并设 $u=\varphi(x)$ 可导，则我们有

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}\,x = F(\varphi(x)) + C,$$

即 $f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$ 的一个原函数是 $F(\varphi(x))$。♡

直接验证 $F(\varphi(x))$ 的导数即可，但这件事也可以从一阶微分形式不变性 (见选修) 去理解，即 $\mathrm{d}F(u)=f(u)\mathrm{d}u$，且与 u 到底是什么无关。

在实践中，假设待求的不定积分可以表达为形式 $\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}\,x$，或者写成 $\int f(\varphi(x))\,\mathrm{d}\,\varphi(x)$。若不定积分 $\int f(u)\,\mathrm{d}\,u$ 易于求得，则由换元积分法便求出想要求出的积分 $\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}\,x$。这一方法也称为“第一代换法”或“凑微分法”。

定理 2.17 (第二代换法)

设函数 $x=\varphi(t)$ 是严格单调的可导函数，且 $\varphi'(t)$ 不取零值 (从而 φ 有可导的反函数 φ^{-1})。若 $G(t)$ 是 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 的一个原函数，即

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t = G(t) + C,$$

则有

$$\int f(x)\,\mathrm{d}\,x = G(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

即 $G(\varphi^{-1}(x))$ 是 $f(x)$ 的一个原函数。♡

证明 我们由复合函数求导法则，反函数求导法则以及已知条件，得出

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}G(\varphi^{-1}(x))}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \\ &= G'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t))\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)} \\ &= f(\varphi(t)) = f(x).\end{aligned}$$

由此导出所说的结果。

第二代换法提供了另一种方式的代换：设待求的不定积分为 $\int f(x)\mathrm{d}x$，且不易直接积分。我们可作一个适当的代换 $x=\varphi(t)$，(这里，$\varphi(t)$ 满足第二代换法中的要求)，将 $\int f(x)\,\mathrm{d}\,x$ 化为

$$\int f(\varphi(t))\,\mathrm{d}\,\varphi(t)=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

若右端的不定积分易于求得,则只要在其结果中以 $t=\varphi^{-1}(x)$ 将变量 t 换回变量 x,就求出了 $\int f(x)\,\mathrm{d}\,x$。

例题 2.34 求 $\displaystyle\int\tan x\,\mathrm{d}\,x$。

解

$$\int\tan x\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}\,x=-\int\frac{(\mathrm{d}\cos x)}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C.$$

例题 2.35 求 $\displaystyle\int\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\,\mathrm{d}\,x$。

解 记 $t=\ln x$，所求的不定积分为

$$\begin{aligned}\int\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\,\mathrm{d}\,x&=\int\frac{\ln x}{\sqrt{1+\ln x}}\,\mathrm{d}(\ln x)=\int\frac{t}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}\,t\\&=\int\frac{1+t-1}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}\,t=\int\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}(1+t)-\frac{\mathrm{d}(1+t)}{\sqrt{1+t}}\\&=\frac{2}{3}(1+t)^{3/2}-2\sqrt{1+t}+C\\&=\frac{2}{3}(1+\ln x)^{3/2}-2\sqrt{1+\ln x}+C.\end{aligned}$$

例题 2.36 求 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}\,\mathrm{d}\,x$。

解 设 $t=\sqrt{e^x+1}$，则 $e^x+1=t^2$，故 $e^x\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，即 $\mathrm{d}x=\frac{2t}{t^2-1}\mathrm{d}t$。所求的不定积分为

$$\int\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2-1}\,\mathrm{d}\,t=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}\,t=\ln\frac{t-1}{t+1}+C=2\ln\left(\sqrt{e^x+1}-1\right)-x+C.$$

例题 2.37 求 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}\,x$。

解 被积函数的定义域为 $x>0$。我们令 $x=t^6\,(t>0)$ 以消除所有根号，则 $\sqrt{x}=t^3$, $\sqrt[3]{x}=t^2$, $\mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$，从而

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}&=6\int\frac{t^2\,\mathrm{d}\,t}{1+t^2}=6\int\mathrm{d}\,t-6\int\frac{\mathrm{d}\,t}{1+t^2}\\&=6(t-\arctan t)+C.\end{aligned}$$

最后，由于 $t=\sqrt[6]{x}$，故所求的不定积分为 $6(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x})+C$。

例题 2.38 求 $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}\,x$，其中 a 是一个常数，$a>0$。

解 为了去除二次根号，我们令 $x=a\sin t$，这里 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，则 $t=\arcsin\frac{x}{a}$，且 $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$。故所求的不定积分为

$$\begin{aligned}\int a^2\cos^2 t\,\mathrm{d}\,t&=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}\,t=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C\\&=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C\\&=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C.\end{aligned}$$

例题 2.39 求 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}\,x$，这里 a 是一个常数，$a>0$。

解 被积函数的定义域为 $x>a$ 或 $x<-a$。我们先考虑 $x>a$ 的情形。此时作三角代换 $x=a\sec t$(其中 $0<t<\frac{\pi}{2}$)，可得出结果，但本题采用双曲代换则更为方便。

令 $x=a\cosh t$,其中 $t>0$。则 $\mathrm{d}x=a\sinh t\mathrm{d}t$, $\sqrt{x^2-a^2}=a\sinh t$,故所求的积分化为 $\int\mathrm{d}\,t=t+C$。现在，易由双曲余弦函数的反函数表达式得出 (对 $x>a$)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}\,x=\ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right)+C=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C',$$

其中 $C'=C-\ln a$，为任意常数。

当 $x<-a$ 时，令 $x=-a\sec t\ (0<t<\frac{\pi}{2})$；或者令 $x=-a\cosh t\ (t>0)$，类似地可得出结果为 $\ln(-x-\sqrt{x^2-a^2})+C'$。(更简单的，令 $x=-t$，则将后一种情形，化为了前一种情形。) 因此，两种情形下的结果可合并为

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}\,x=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.$$

例题 2.40 求 $\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}\,x$，这里 a 是常数，$a>0$。

解 被积函数的定义域为 $|x|<a$，且 $x\neq 0$。本题可以用三角代换求解，这里介绍另一种有效的代换——倒数代换。

当 $0<x<a$ 时，令 $x=\frac{a}{t}$，则 $t>1$，且 $\mathrm{d}x=-\frac{a}{t^2}\mathrm{d}t$。由前例的结果，易知所求的不定积分为

$$\begin{aligned}-\frac{1}{a}\int\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}\,t&=-\frac{1}{a}\ln|t+\sqrt{t^2-1}+C\\&=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C.\end{aligned}$$

同样，当 $-a<x<0$ 时，令 $x=\frac{a}{t}$(其中 $t<-1$)，得出的结果与上面的相同。综合起来，得到

$$\int\frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C.$$

我们提醒读者，若被积函数在定义域上连续，则必须求出被积函数在整个定义域上的不定积分 (我们知道，它必定存在)，而不是部分定义域上的不定积分。我们举个例子，以作说明。

例题 2.41 求 $\int\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}\,x$。

解 当 $x\neq 0$ 时，将被积函数的分子、分母同除以 x^2，得出

$$\int\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{(x-\frac{1}{x})^2+3}\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+3}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}+C.$$

为了求出 $f(x)=\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$ 在整个定义域 $\mathbb{R}$ 上的原函数 $F(x)$，由已得的结果，可设

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}+C_1, & x<0;\\ C, & x=0;\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}+C_2, & x<0.\end{cases}$$

由 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续，得出

$$\lim_{x\to 0^+}F(x)=\lim_{x\to 0^-}F(x)=F(0),$$

即 $\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2}+C_1=C=-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2}+C_2$，故 $C_1=C-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2}$，$C_2=C+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2}$。由此可知

$$F'_+(0)=F'_-(0)=f(0).$$

从而 F 在 $x=0$ 处可导，且 $F'(0)=f(0)$。故

$$\int f(x)\,\mathrm{d}\,x=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}-\frac{\pi}{2}\right)+C, & x<0;\\ C, & x=0;\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}+\frac{\pi}{2}\right)+C, & x>0.\end{cases}$$

本题也可采用下面的方法 (避免了上面的麻烦):

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}\,x&=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+x+1)+(x^2-x+1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}\,\mathrm{d}\,x\\&=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}\,x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}\,x\\&=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.\end{aligned}$$

(易于验证，这一结果与前面的结果实质相同。)

计算不定积分并不是一件能一语概括之的事情，这其中会用到许多代数变形与换元的技巧，这是你需要注意去积累的。

换元法的成功依赖于找到一个替换，用它把一个我们不能直接求出的积分改变为可以求出的，如果第一个替换失败，我们可以尝试用一个或两个附加的替换进一步化简被积函数。有时我们也可以重新开始。或许像在下例中那样，有不止一个好方法。

例题 2.42 求积分 $\int\frac{2x\,\mathrm{d}\,x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$。

解 我们可以把换元法作为一个探索工具：先替换被积函数的最麻烦的部分再见机行事。对于这里的被积函数，我们可以尝试令 $u=x^2+1$，甚至试一试我们的运气就取 u 是整个立方根。以下说明在每种情形的进展如何。

解法一：替换 $u=x^2+1$。

$$\begin{aligned}\int\frac{2x\,\mathrm{d}\,x}{\sqrt[3]{x^2+1}}&=\int\frac{\mathrm{d}\,u}{u^{1/3}}\\&=\int u^{-1/3}\,\mathrm{d}\,u\\&=\frac{u^{2/3}}{2/3}+C\\&=\frac{3}{2}(x^2+1)^{2/3}+C.\end{aligned}$$

解法二：替换 $u=\sqrt[3]{x^2+1}$，则 $3u^2\mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x$。

$$\begin{aligned}\int\frac{2x\,\mathrm{d}\,x}{\sqrt[3]{x^2+1}}&=\int\frac{3u^2\,\mathrm{d}\,u}{u}\\&=3\int u\,\mathrm{d}\,u\\&=3\cdot\frac{u^2}{2}+C\\&=\frac{3}{2}(x^2+1)^{2/3}+C.\end{aligned}$$

分部积分法 不定积分中的分部积分法是处理积分问题时广泛采用的另一种方法，它与函数乘积的求导法则

$$(u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

相对应。因为 $(u(x)v(x))'$ 的一个原函数就是 $u(x)v(x)$，所以我们立即就有下面的定理。

定理 2.18 (分部积分法)

设函数 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 有连续的导数，则

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}\,x=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)\,\mathrm{d}\,x,$$

这可简记为

$$\int u\,\mathrm{d}\,v=uv-\int v\,\mathrm{d}\,u.$$

定理中的任意常数进行了合并。该定理最直接的应用是利用求 $u'v$ 和 uv' 其中一个的不定积分，给出另一个的不定积分。

注 何时和怎样使用分部积分？

何时：如果变量替换行不通，尝试分部积分。

怎样：从形如 $\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x$ 的积分出发，使它与形如 $\int u\,\mathrm{d}\,v$ 的积分匹配，为此选择 $\mathrm{d}v$ 是被积函数中包含 $\mathrm{d}x$ 以及 $f(x)$ 或 $g(x)$ 的那一部分。

选择 u 和 $\mathrm{d}v$ 的原则：公式

$$\int u\,\mathrm{d}\,v=uv-\int v\,\mathrm{d}\,u$$

的右端给出一个新的积分。你必须容易积分 $\mathrm{d}v$ 以便得到右端。如果新的积分比原来的那个更复杂，尝试 u 和 $\mathrm{d}v$ 的不同选择。

请记住分部积分并非畅通无阻。

例题 2.43 求 $\displaystyle\int\ln x\,\mathrm{d}\,x$。

解 取 $u(x)=\ln x$，$\mathrm{d}v(x)=\mathrm{d}x$，则可取 $v(x)=x$，得出

$$\begin{aligned}\int\ln x\,\mathrm{d}\,x&=x\ln x-\int x\,\mathrm{d}(\ln x)=x\ln x-\int\mathrm{d}\,x\\&=x\ln x-x+C.\end{aligned}$$

例题 2.44 求 $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}\,x$，$a,b\neq0$。

解 记所求的不定积分为 I，则由分部积分公式，得出

$$I=\frac{1}{a}\int\sin bx\cdot\mathrm{d}(e^{ax})=\frac{e^{ax}}{a}\sin bx-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}\,x.$$

对右端第二个积分再用分部积分公式，得

$$\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}\,x=\frac{e^{ax}}{x}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}\,x.$$

因此，我们有

$$I=\frac{e^{ax}}{x}\sin bx-\frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx-\frac{b^2}{a^2}I.$$

移项得到 (注意，I 表示一个函数族)

$$I=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C.$$

例题 2.45 记 $I_n=\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}\,x\ (n=1,2,\cdots)$，其中 a 是非零实数。证明下面的递推公式成立：

$$I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}I_n\ (n=1,2,\cdots)$$

(由此及 $I_1=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$，可递推地求得 I_n。)

证明 分部积分 (即取 $u=\frac{1}{(x^2+a^2)^n}$，$v=x$，则 $\mathrm{d}u=-\frac{2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}v=\mathrm{d}x$)，得

$$\begin{aligned}I_n&=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,x\\&=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\left(\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}\,x-a^2\int\frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,x\right)\\&=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n(I_n-a^2I_{n+1}),\end{aligned}$$

由此即得结果。

许多不定积分的计算，需将分部积分法与换元法结合使用，我们举一个这样的例子。

例题 2.46 求 $\displaystyle\int xe^x(1+e^x)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\,x$。

解 我们先由分部积分得出

$$\begin{aligned}\int xe^x(1+e^x)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\,x&=-\int 2x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\right)\\&=-\frac{2x}{\sqrt{1+e^x}}+2\int\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,\mathrm{d}\,x.\end{aligned}$$

而上式的不定积分可用代换法求得 (见上文例子)，我们最后有

$$\int xe^x(1+e^x)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\,x=4\ln\left(\sqrt{e^x+1}-1\right)-2x-\frac{2x}{\sqrt{e^x+1}}+C.$$

列表积分法 列表积分法是分部积分法的简单推论。我们已经看到形如 $\displaystyle\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x$ 的积分，其中 f 可以重复求导直至出现零，而 $g(x)$ 可以毫无困难地重复积分，是分部积分的自然候选者。不过当需要多次重复时，计算可能是麻烦的。在这类情况下，有一种组织计算的方式，保存大部分工作。这就是下面所展示的列表积分法。

一般来说，我们会如下列一个表格：

$f(x)$ 和它的导数	$g(x)$ 和它的积分
$f(x)$	$g(x)$
$f'(x)$	$G_1(x)$
$f''(x)$	$G_2(x)$
$\vdots$	$\vdots$
$f^{(n)}(x)=0$	$G_n(x)$

这里 $G_k(x)$ 表示 $g(x)$ 重复积分 k 次的结果。n 的大小依赖于 $f(x)$ 的高阶导数何时首次为零。当表格列出来后，我们将左列的每一格 $f^{(k)}(x)$，$k=0,\cdots,n-1$ 都与其右下方一格的 $G_{k+1}(x)$ 相乘，并乘以 $(-1)^k$，最后将所得结果相加并补上任意常数。其结果为

$$\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f^{(k)}(x)G_{k+1}(x)+C.$$

你可以自己验证这是为什么。

例题 2.47 求积分 $\displaystyle\int x^2e^x\,\mathrm{d}\,x$。

解 令 $f(x)=x^2$，$g(x)=e^x$，我们列表：

$f(x)$ 和它的导数	$g(x)$ 和它的积分
x^2	e^x
$2x$	e^x
2	e^x
0	e^x

于是结果为

$$\int x^2e^x\,\mathrm{d}\,x=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C.$$

你可以自行用分部积分法计算之，并进行比对。

例题 2.48 求积分 $\displaystyle\int x^3\sin x\,\mathrm{d}\,x$。

解 令 $f(x)=x^3$ 和 $g(x)=\sin x$，我们列表

$f(x)$ 和它的导数	$g(x)$ 和它的积分
x^3	$\sin x$
$3x^2$	$-\cos x$
$6x$	$-\sin x$
6	$\cos x$
0	$\sin x$

于是结果为

$$\int x^3\sin x\,\mathrm{d}\,x=-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x+C.$$

2.3.2.2 有理函数的不定积分

本节为选读。

上一小节已经介绍了求不定积分的一些基本方法和原则，同时也指出了有许多初等函数的不定积分虽然存在，却不是能用初等函数表示的。然而，在不定积分理论中有一个很有意义的一般结果：一切有理函数的不定积分都是初等函数。因此对一些能够通过变换化为有理函数的函数类，其积分也是初等函数。

2.3.2.2.1 有理函数的不定积分 所谓有理函数是指一个分子、分母都是 x 的多项式的分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$，其中

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0,\quad a_n\neq 0;$$
$$Q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0,\quad b_m\neq 0.$$

若 $n \geq m$，称 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为有理假分式；若 $n < m$，则称 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为有理真分式。

由多项式的除法 (见第十二章) 易知，任何有理假分式可表示为一个多项式与一个有理真分式之和。由于多项式的原函数易于计算，其结果仍是一个多项式。因此，求有理函数的不定积分，只需考虑有理真分式的不定积分。

有理真分式的不定积分，依靠下面两个属于代数学的事实，这里不作证明。

定理 2.19 (多项式因式分解)

在实数范围内，任何实系数的多项式 $Q(x)$ 可分解为

$$Q(x)=b_m(x-\alpha_1)^{r_1}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{s_1}\cdots(x^2+\beta_lx+\gamma_l)^{s_l},$$

这里 $r_1+\cdots+r_k+2s_1+\cdots+2s_l=m$，所以的 $\alpha_i,\beta_j,\gamma_j$ 都是实数，且 $\beta_j^2-4\gamma_j<0\,(j=1,2,\cdots,l)$。♡

定理 2.20 (部分分式分解)

设 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 分别是 n 和 m 次实系数多项式，并且 $n<m$。若 $Q(x)$ 已分解为上一条定理中的形式，则存在实数 $A_{i,j},B_{i,j},C_{i,j}$，使得

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)}=&\frac{A_{1,1}}{(x-\alpha_1)}+\cdots+\frac{A_{1,r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}}+\cdots+\frac{A_{k,1}}{(x-\alpha_k)}+\cdots+\frac{A_{k,r_k}}{(x-\alpha_k)^{r_k}}\\&+\frac{B_{1,1}x+C_{1,1}}{(x^2+\beta_1x+\gamma_1)}+\cdots+\frac{B_{1,s_1}x+C_{1,s_1}}{(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{s_1}}+\cdots\\&+\frac{B_{l,1}x+C_{l,1}}{(x^2+\beta_lx+\gamma_l)}+\cdots+\frac{B_{l,s_l}x+C_{l,s_l}}{(x^2+\beta_lx+\gamma_l)^{s_l}}.\end{aligned}$$

♡

简单地说，若 $Q(x)$ 的分解中有因式 $(x-\alpha)^r$，则 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的部分分式分解中包含着项：

$$\frac{A_1}{x-\alpha}+\cdots+\frac{A_r}{(x-\alpha)^r};$$

若 $Q(x)$ 的分解中有因式 $(x^2+\beta x+\gamma)^s$(其中 $\beta^2-4\gamma<0$)，则 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的部分分式分解中包含下列形式的项：

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+\beta x+\gamma}+\cdots+\frac{B_sx+C_s}{(x^2+\beta x+\gamma)^s}.$$

如何对一个有理函数进行分解，可先假设有理函数有上述分解表达式，其中所有的常数 A_i,B_i,C_i 待定，然后进行通分，比较通分后分子的各次幂的系数，确定所有待定的常数，这通常称为**待定系数法**。定理2.20保证了待定系数是一定能够确定的。

笔记 对于线性因子的 **Heaviside** “掩盖法”：当多项式 $P(x)$ 的阶低于 $Q(x)$ 的阶而且

$$Q(x)=(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)$$

是 n 个相异线性因子的乘积，且每个因子都是一次幂时，有一个快速把 $P(x)/Q(x)$ 展开成部分分式的方法。

步骤 1：写出商，并且 $Q(x)$ 能分解因式：

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{f(x)}{(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)}.$$

步骤 2：一次掩盖 $Q(x)$ 的一个因子 $(x-r_i)$，每次用数 r_i 代换未被掩盖的 x，这就对每个

根 r_i 给出数 A_i:

$$A_1 = \frac{P(r_1)}{(r_1-r_2)\cdots(r_1-r_n)},$$
$$A_2 = \frac{P(r_2)}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)\cdots(r_2-r_n)},$$
$$\vdots$$
$$A_n = \frac{P(r_n)}{(r_n-r_1)(r_n-r_2)\cdots(r_n-r_{n-1})}.$$

步骤 3：把 $P(x)/Q(x)$ 的部分分式展开式写成
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-r_1)} + \frac{A_2}{(x-r_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x-r_n)}.$$
你可以自行验证这是怎么回事。

定理2.20的主要作用是将一般的有理真分式分解为某些较简单的有理函数之和，由此可将求 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的不定积分的问题，化为求以下两种特殊类型的不定积分：
$$\text{(i)}\ \int \frac{1}{(x-\alpha)^k}\,\mathrm{d}\,x; \quad \text{(ii)}\ \int \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}\,\mathrm{d}\,x.$$
其中 k 为自然数，而 $\beta^2 - 4\gamma < 0$。

显然，形如 (i) 的不定积分是初等函数 (注意，$k=1$ 及 $k>1$ 时的情形不同)。对于 (ii) 中的不定积分，记 $t = x + \frac{\beta}{2}$, $a^2 = \gamma - \frac{\beta^2}{4}$，它可化为
$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}\,\mathrm{d}\,x = \frac{B}{2}\int \frac{2t}{(t^2+a^2)^k}\,\mathrm{d}\,t + \left(C - \frac{B\beta}{2}\right)\int \frac{1}{(t^2+a^2)^k}\,\mathrm{d}\,t.$$
当 $k=1$ 时，上式右端的第一个不定积分是对数函数形式，第二个是反正切函数形式，所以是初等函数。当 $k>1$ 时，上式右端的第一个不定积分为
$$\frac{1}{(1-k)} \cdot \frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^{k-1}} + C,$$
这是初等函数；而由例2.44知，上式右端的第二个不定积分也是一个初等函数。这样，我们就证明了有理真分式的原函数 (进而任意有理函数的原函数)，都是初等函数。

例题 2.49 求 $\int \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}\,x$。

解 被积函数的分母可分解为
$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1).$$

由定理2.20，可设
$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1},$$
其中，A, B, C 均是待定的实数。将上式去分母，得到恒等式
$$A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1) = 1.$$
比较等式两边同次幂的系数，有
$$\begin{cases} A+B=0, \\ -A+B+C=0, \\ A+C=1. \end{cases}$$

由此可解得 $A=\frac{1}{3}, B=-\frac{1}{3}, C=\frac{2}{3}$。(求 A, B, C 也可采用“代值法”。例如，在上述恒等式中取 $x=-1$，

可得 $A=\frac{1}{3}$；取 $x=0$，得 $C=\frac{2}{3}$；再取 $x=1$，得出 $B=-\frac{1}{3}$。）现在

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}\,x &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}\,x - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{\mathrm{d}(x^2-x+1)}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.\end{aligned}$$

求有理函数的不定积分，原则上可先作出有理函数的部分分式分解。为了做到这一点，待定系数法是相当基本的方法。然而，针对问题的特点，采用适当的恒等变形，有时能更简单地作出所需要的分解。另一方面，有些问题中，采用上述原则将产生冗长和复杂的计算，我们宁愿采用其它的求解方法，如下面的两个例子。

例题 2.50 求 $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}\,x$。

解 我们有

$$\frac{1}{x(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{(x^2+x+1)-(x+1)x}{x(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+x+1},$$

由此易知所求的不定积分为

$$\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

例题 2.51 求 $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^8+1)}\,\mathrm{d}\,x$、

解 我们有

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(x^8+1)}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{1+x^8-x^8}{x(x^8+1)}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x - \frac{1}{8}\int \frac{\mathrm{d}(x^8+1)}{x^8+1} \\ &= \ln|x| - \frac{1}{8}\ln(x^8+1) + C.\end{aligned}$$

2.3.2.2.2 三角函数有理式的不定积分 由三角函数及常数经过有限次四则运算构成的表达式，称为三角函数的有理式。三角函数的有理式可记作 $R(\sin x,\cos x)$，这里 $R(u,v)$ 是关于变量 u,v 的有理函数，即是两个关于 u,v 的二元多项式之商。

三角函数有理式的不定积分

$$\int R(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}\,x,$$

通过下列的**万能变换**

$$t=\tan\frac{x}{2}\ (-\pi<x<\pi),$$

可化为有理函数的积分，因而其不定积分也是初等函数。事实上，通过“万能变换”，有

$$\frac{1}{1+t^2}=\cos^2\frac{x}{2},\ \frac{t^2}{1+t^2}=\sin^2\frac{x}{2}.$$

由三角函数的倍角公式得

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

也就是 $\sin x$ 和 $\cos x$(进而所有三角有理式) 都能经过“万能变换”表示成有理式。而经过微分，有

$$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t,$$

即 x 对 t 的导数也可表示成有理数。由此可将 $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}\,x$ 化为

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t,$$

这是关于 t 的有理函数的不定积分，故可表示为 t 的初等函数；从而 $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}\,x$ 也是 x 的初等函数。

例题 2.52 求 $\int \frac{1}{5+4\sin x}\,\mathrm{d}\,x$。

解 令 $t = \tan\frac{x}{2}$，则

$$5 + 4\sin x = \frac{5t^2+8t+5}{t^2+1}.$$

从而

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{5+4\sin x}\,\mathrm{d}\,x &= 2\int \frac{\mathrm{d}\,t}{5t^2+8t+5} = \frac{2}{3}\arctan\frac{5t+4}{3} + C\\ &= \frac{2}{3}\arctan\frac{5\tan\frac{x}{2}+4}{3} + C.\end{aligned}$$

对于双曲函数有理式的积分

$$\int R(\cosh x, \sinh x)\,\mathrm{d}\,x,$$

也可类似地引进一种万能变换

$$u = \tanh\frac{x}{2}$$

将积分化为有理函数的积分。读者可充分利用双曲函数类似于三角函数的一系列性质进行讨论。

请读者注意，原则上，不管是三角有理函数还是双曲有理函数，万能变换是处理它们不定积分的一般方法。但针对具体问题，适当地应用三角恒等变形 (和双曲函数类似的恒等式)，可采用更灵活、简便的方法。

例题 2.53 求 $\int \sin^4 x\,\mathrm{d}\,x$。

解 本题有多种解法；用万能变换则较为繁琐。我们用两次倍角公式，得出

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x\,\mathrm{d}\,x &= \int (\sin^2 x)^2\,\mathrm{d}\,x = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2\mathrm{d}\,x\\ &= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,\mathrm{d}\,x\\ &= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right)\mathrm{d}\,x\\ &= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.\end{aligned}$$

2.3.2.2.3 其他类型的初等函数的不定积分 如同前面的记号，记 $R(u,v)$ 是关于变量 u,v 的有理函数，即 $R(u,v)$ 是两个关于 u,v 的多项式所形成的分式。

1° $R(x, \sqrt{1-x^2})$ 的不定积分

不定积分

$$\int R(x, \sqrt{1-x^2})\,\mathrm{d}\,x$$

可通过下列代换

$$x\cos u,\ 则\ \sqrt{1-x^2} = \sin u,\ \mathrm{d}x = -\sin u\mathrm{d}u$$

化为三角函数的有理式的不定积分，这里 $0 \le u \le \pi$。而后者通过万能变换 $t=\tan\frac{u}{2}$ 化为有理函数的不定积分，所得到的结果是关于 t 的初等函数。因此，只要利用两个代换的反函数，就可以把 $R(x,\sqrt{1-x^2})$ 的函数的不定积分表示成初等函数。

如果将两次代换合起来

$$t=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

则

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sqrt{1-x^2}=\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{4t}{(1+t^2)^2}$$

就可以直接将原不定积分化为有理函数的不定积分。

2° $R(x,\sqrt{x^2-1})$ 的不定积分

在不定积分

$$\int R(x,\sqrt{x^2-1})\,\mathrm{d}\,x$$

中，我们利用双曲余弦函数作为代换，

$$x=\cosh u,\ 则\ \sqrt{x^2-1}=\sinh u,\ \mathrm{d}x=\sinh u\mathrm{d}u$$

将积分化为双曲有理函数的积分。再使用双曲有理函数的万能变换，最终将原不定积分化为有理函数的不定积分。

3° $R(x,\sqrt{x^2+1})$ 的不定积分

对于不定积分

$$\int R(x,\sqrt{x^2+1})\,\mathrm{d}\,x,$$

可作代换 $x=\sinh u$，将其化为双曲有理函数的不定积分；或者利用代换

$$u=x+\sqrt{x^2+1},\ 或\ x=\frac{u^2-1}{2u},$$

一步就可将其化为有理函数的不定积分。

4° $R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$ 的不定积分

对于这类不定积分，其中 a,b,c,d 是常数，且 $ad\neq bc$，可作变换

$$t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ 或\ x=\frac{dt^n-b}{-ct^n+a},$$

则 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 是 t 的有理式。于是

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}\,x=\int R\left(\frac{dt^n-b}{-ct^n+a},t\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\,t$$

化为有理函数的积分。

2.3.3 浅探定积分

本节不打算严格讲解任何有关定积分的知识，仅粗略介绍计算思路。严谨理论请见选修部分。

定积分的理论源于对

2.4 不等式简述

第三章 解析几何

3.1 直线

3.2 圆锥曲线与参数方程

3.3 空间解析几何

第四章 立体几何

4.1 立体几何公理

第五章 概率统计与计数原理

第二部分

选修

我很高兴你翻开了选修部分
接下来你要迎接更加抽象的东西
你应当做好觉悟
——笔者

第六章 数学拓展

6.1 关系

6.1.1 关系的概念

比映射更广泛的一个概念叫*关系 (Relation)*，这个概念在表述集合中元素间的关系是行之有效而简洁明了的。

为了让下面的定义不那么莫名其妙令人费解，我们先做一番思考。

如果集合 X 中的元素 a, b 存在某种关系，那么这就意味着 X^2 的元素 (a, b) 相对于其它元素来讲可能比较特别。如果两个元素有关系，那么对应的二元有序对在这种意义下就存在特殊的地位，于是我们把所有这样特殊的有序对取出来，就得到了 X^2 的一个子集，记作 R。那么两个元素是否存在关系就全看这两个元素组成的有序对是否在 R 中。于是 R 自然可以代表这个关系。于是我们可以给出以下定义。

定义 6.1

集合 X 上的 (二元) 关系是 $X \times X$ 的一个子集 R。若 $(x, y) \in R$，我们记为 xRy ♣

回顾映射的定义，对于 $f : X \to X$，我们知道 f 由其图像 G 唯一确定，而 $G \subseteq X \times X$，故 G 是 X 上的关系。因此自映射是一种二元关系，而且是比较特殊的那种：每个 Pr_1 在 G 中都只出现过一次。而根据上面的定义，$A \times A$ 的任何子集均是 A 上的关系。尽管这个看起来很奇怪，毕竟子集可以取得毫无规律，你想不到任何关系去描述它。但你要注意的一点是，关系本身就不一定是富有规律的，这是一个相当抽象而广泛的概念，奇奇怪怪的关系当然也算关系，不过你瞎定义一个关系可能毫无用处罢了，就像你瞎取了一个集合一样。

定义 6.2

设 R 是 X 上的关系，那么称 R 是自反的 (Reflexive)，若 xRx，$x \in X$，即，R 包含对角线：

$$\Delta_X := \{(x, x) \mid x \in X\}$$

称 R 是传递的 (Transitive)，若

$$(xRy) \wedge (yRz) \Rightarrow xRz$$

称 R 是对称的 (Symmetric)，若

$$xRy \Rightarrow yRx$$

♣

例题 6.1 设 $P = \{$ 世界上所有人 $\}$，定义 $D \subseteq P \times P$ 为：

$$D = \{(x, y) \mid x \text{ 为 } y \text{ 的后代}\}$$

那么 D 是 P 上的一个关系。而命题“x 对 y 有关系 D”和“x 是 y 后代”说的是一回事，也就是 $(x, y) \in D$，P 上也可以定义另外两种关系：

$$B = \{(x, y) \mid x \text{ 有一个祖先，他/她同时也是 } y \text{ 的祖先}\}$$

$$S = \{(x, y) \mid x \text{ 的父母也是 } y \text{ 的父母}\}$$

我们可以称 B 为"血缘关系"，称 S 为兄弟姐妹关系。这三种关系有着全然不同的性质。血缘关系显然是对称的，但后代关系显然就不。等会我们会以这些关系为例子来阐述几种常见的关系。

设 Y 为 X 的非空子集，R 是 X 上的关系，那么集合 $R_Y := (Y \times Y) \cap R$ 是 Y 上的关系，称为 R 对 Y 的限制 (*Restriction*)。这一点你可以参考例 1.3(4)，你当然也可以把这个概念认为是例 1.3(4) 的扩展。显然 xR_Yy 当且仅当 $x, y \in Y$ 且 xRy

6.1.2 等价关系与序关系

接下来我们来介绍常见的两种关系：

定义 6.3

集合 X 上的关系如果满足自反性、传递性与对称性，则称其为等价关系 (*Equivalence relation*)，常记为 $\sim$[a]。即，X 上的等价关系 $\sim$ 应当满足：

1. (自反性)$x \sim x$, $\forall\, x \in X$
2. (传递性) 若 $x \sim y$, $y \sim z$，则 $x \sim z$
3. (对称性)$x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$

而对 $\forall\, x \in X$，集合

$$[x] := \{y \in X \mid y \sim x\}$$

称为 x 的等价类 (*Equivalence class*)，而每一个 $[x]$ 中的元素 y 均称为这个等价类的代表元 (*Representative*)。而集合

$$X/\sim := \{[x] \mid x \in X\}$$

称为"X 模 $\sim$"，它是 X 中所有等价类的集合。显然 $X/\sim$ 为 $\mathcal{P}(X)$ 的子集。

[a]毕竟没人强迫你用字母去表示它，即使它是一个集合。之后序关系的记号也是。

你最熟悉的等价关系其实是相等"="，也就是 Δ_X，它很容易验证是等价关系。另外，你考虑例 6.1 中的兄弟姐妹关系，其实也是等价关系。

我在这里再举一个例子，等会要用：

例题 6.2 比方说你去考虑我们所有人的手机号，都是以 1 开头的 11 位的数码，手机号的末尾可以是 0 到 9 的数字。我们把集合记为 X，那么我们不妨定义一个关系 $\sim$: $\{(x, y) \mid x$ 与 y 具有相同的末尾数码 $\}$，容易验证它是等价关系。比方说 11111111111 和 12222222221 是等价的。你可以注意到总共有十个等价类，因为总共有十种末位数码。

笔记 以及我向你分享一个我具象化理解等价类的方法：

你可以把集合 X 想象成一堆点。比方说，一个九元点集 $\{A, \cdots, I\}$，在上面定义一个等价关系 (我们先不关心它到底是什么)，对于那些等价的点，我们用尽可能少的线段将它们连起来 (避免形成回路)[1]，应当会形成类似等价链 (可能带分支) 的图形，于是有这么一种等价关系会表现为这种情况[2]：

左图是那个点集，右图是点集在执行操作后得到的图形。

[1]这么做只是为了让图形更好看，你也可以选择把等价的点连起来，那么图会变得非常复杂，我做的事情就是把点连起来后，再删掉多余的线段，留下一条链。你无需深究，毕竟这并非什么要紧事

[2]我们可以断言这种关系必然存在，但这是等会我们要阐述的一件事情，在此之前我推荐先想清楚等价类是怎么回事。

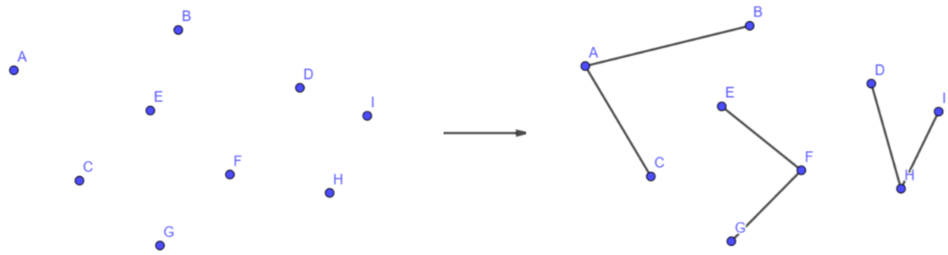


图 6.1: 一种等价类的图示

那么你可以注意到，同一条折线段上的点都是等价的，因此每一条等价链都是一个等价类，因为等价链上的点互相等价，而与一个点等价的其它点必然也在这条链上。很明显，这个图告诉我们 $\{A,B,C\}$ 是一个等价类、$\{E,F,G\}$ 也是一个等价类，还有 $\{D,H,I\}$。那么我任选两个集合中的元素 x,y，x 和 y 要么在同一条链上，要么在不同链上，其实你可以注意到，前者意味着 $[x]=[y]$，后者意味着 $[x]\cap[y]=\varnothing$，也就是我们马上要说的引理。

注 还是想提醒一下，等价类可以只有一个元素，特立独行的元素被允许存在，在刚才的图里面表现为一个孤立的点。所以这就间接指出每一个元素都必然被囊括在一个等价类里面，即使这个等价类只有它一个元素。

引理 6.1

等价类要么不交，要么重合。 ♡

事实上刚才的阐述已经为我们提供了思路，你不妨想一下，两个在同一条链上的点，它们的等价类都是这条链，所以重合。否则如果它们在不同链上，比如 F 和 H，那么它们的等价类显然也没有任何公共点，两个等价类的元素并不等价，不然就连一起去了嘛。

证明 设 $x,y\in X$，若 $x\sim y$，则对 $\forall\, z\in[x]$，$z\sim x\Rightarrow z\sim y\Rightarrow z\in[y]\Rightarrow[x]\subseteq[y]$，同理可得 $[y]\subseteq[x]$，从而 $[x]=[y]$

若 $x\nsim y$，要证 $[x]\cap[y]=\varnothing$，考虑反证：若不然，则 $\exists\, z\in[x]\cap[y]\Rightarrow z\sim x$，$z\sim y\Rightarrow x\sim y$，矛盾，故交集为空。

事实上从这个证明过程你也很容易看出来两个给定代表元的等价类重合或者不交的条件是什么。如果这两个代表元等价，那么等价类重合，反之则不交。

还记得我们在第一章第一节的末尾讲过分拆这个概念吗？这个概念在这里是非常有用的。给定集合 X 上的一个等价关系 $\sim$，考虑 $X/\sim$，它显然是 X 的一个子集族。而且其并也恰等于 X(毕竟对于每个元素，它都必然位于一个等价类中)，而根据刚才的引理 6.1, 不同的等价类彼此必然不交，故 $X/\sim$ 构成 X 的分拆。你可以试着去验证这件事。

而我们现在要说的是，等价关系和分拆其实是一回事，每一个等价关系都决定了相应的分拆，这一点我们刚才已经说过，而给定一个分拆，我们也可以定义一个关系，如果两个元素在同一个自己里面，就认为这两个元素有关系，那么你可以验证这个关系是集合上的等价关系。证明也并不困难，按照定义验证即可。当然，我应当提醒你，你只证明了存在性，并未证明唯一性，这一点也自行验证吧。

以及，我们很自然的也会想到一个对应关系，从元素到它所在等价类的对应，我们定义这个映射：

$$p:=p_X:X\to X/\sim,\quad x\mapsto[x]$$

显然是一个良定义的满射，我们称它为从 X 到 $X/\sim$ 的 (典范) 商映射 *((Canonical)quotient map)*。

我们再来举几个常见的例子作为等价关系的结尾：

例题 6.3

1. 集合 X 上最“小”的等价关系是 Δ_X，即相等关系。因为它是 X 上其它任何等价关系的子集。
2. 设 $f: X \to Y$ 为映射，那么我们在 X 上定义关系 $\sim$:
$$x \sim y :\Leftrightarrow f(x) = f(y)$$
容易验证它是 X 上的等价关系，而且你注意到 x 所在的等价类 $[x]$ 正是 f 在 $f(x)$ 处的纤维 $f^{-1}(f(x))$。更进一步，存在唯一的映射 $\tilde{f}$ 使得
$$\tilde{f} \circ p = f$$
这里 p 是我们刚才提到的商映射，我们定义 $\tilde{f}: X/\sim \to Y, \quad [x] \mapsto f(x)$，显然这是一个单射。特别的，如果 f 是一个满射，则 $\tilde{f}$ 是一个双射。
3. 若 $\sim$ 为 X 上的等价关系，Y 为 X 非空子集，那么 $\sim$ 对 Y 的限制也是 Y 上的等价关系。

接下来我们讲序关系。

定义 6.4

集合 X 上的关系 $\leq$ 称为非严格偏序 *(Non-strict partial order)*、弱偏序 *(Weak partial order)* 或自反偏序 *(Reflexive partial order)*，若它满足：

自反性 Reflexivity $\forall x \in X, \ x \leq x$

传递性 Transitivity $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow x \leq z$

反对称性 Antisymmetry $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow x = y$

而关系 $<$ 称为严格偏序 *(Strict partial order)*、强偏序 *(Strong partial order)* 或非自反偏序 *(Irreflexive partial order)*，若它满足：

非自反性 Irreflexivity $\forall x \in X, \ x \not< x$

传递性 Transitivity $(x < y) \wedge (y < z) \Rightarrow x < z$

非对称性 Asymmetry $x < y \Rightarrow y \not< x$

以上两种关系统称为偏序关系 *(Partial order)*。若 $\leq$ 为 X 上的偏序关系，则 $(X, \leq)$ 称为偏序集 *(Partially ordered set, Poset)*，若偏序关系从上下文易知，我们也把偏序集简写为 X，称 X 是个偏序集。

此外，若偏序关系满足：

完全性 Totality $\forall x, y \in X, \ (x \leq y) \vee (y \leq x)$

则称 $\leq$ 为 X 上的全序关系 *(Total order)*、简单序 *(Simple order)* 或线性序 *(Linear order)*。称 $(X, \leq)$ 为全序集。全序关系也有严格全序关系与非严格全序关系之分，可以认为是严格偏序和非严格偏序的衍生定义。 ♣

注 事实上非严格偏序和严格偏序是互相关联的，非严格偏序无非是在严格偏序的基础上允许自反：
$$a \leq b \Leftrightarrow (a < b) \vee (a = b)$$
之后我们一般用 $\leq$ 来代表偏序关系，但这并不意味着我们的表述仅针对非严格偏序而言，往往二者均是成立的。但你仍要注意区分非严格偏序和严格偏序，毕竟它们的确有着少许差异。

很自然的我们也会有关联的序关系：

$$x \geq y :\Leftrightarrow y \leq x$$

与

$$x > y :\Leftrightarrow y < x$$

容易验证前者是非严格偏序，后者是严格偏序。

此外，如果 X 是偏序集但不是全序集，那么至少存在两个元素 $x, y \in X$ 是不可比较的，也就是说 $x \leq y$ 或 $y \leq x$ 均不成立。

有一点要提的是，关于这方面的定义表述五花八门，比如说你也很容易看见全序集的完全性的一种表达方式：

$$\forall\, x, y \in X,\ (x < y) \vee (x = y) \vee (y < x)$$

且三者仅有其一成立，这个通常表达为三歧性或者三分性，但其实这个和我们上面是等价的。我只是给了一种我个人觉得比较清晰明白的定义，不同定义彼此应当是等价的。比方说，对于严格偏序来说，非对称性是可以由另外两条推出来的，所以这条完全可以删掉，验证一个序关系为严格偏序时也无需验证此条。不过我们不妨保留下来。

至于例子，你去考虑例 6.1 中的后代关系，它是严格偏序关系，但不是全序关系。

例题 6.4 你最先接触的，也是十分常见的序关系，就是 $\mathbb{R}$ 上的大小关系，称为常序关系 *(Usual order relation)*。而 $\mathbb{R}$ 上相对不那么常见的一个序关系是 $x < y :\Leftrightarrow (x^2 < y^2) \vee [(x^2 = y^2) \wedge (x < y)]$，你可以验证一下它是何种序关系。

例题 6.5

1. 设 $(X, \leq)$ 为偏序集，Y 为 X 的子集，那么 $\leq$ 对 Y 的限制 $\leq_Y$ 也为偏序关系。
2. $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ 为偏序集，$\subseteq$ 称为 $\mathcal{P}(X)$ 上的包含序 *(Inclusion order)*。但通常来讲，$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ 并不是全序集。
3. 设 X 为集合，$(Y, \leq)$ 为偏序集，则
$$f \leq g :\Leftrightarrow f(x) \leq g(x),\ x \in X$$
定义了 Y^X 上的一个偏序关系。但 Y^X 一般不是全序集，即使 Y 是全序集。

接下来我们介绍一些由序关系衍生的一些定义，它们非常实用：

定义 6.5

设 X 为集合，$<$ 为其上的严格偏序。若 $a < b$，我们用记号 (a, b) 去表示集合

$$\{x \mid a < x < b\}$$

它称为 X 中的开区间 *(Open interval)*。若 $(a, b) = \varnothing$，称 a 为 b 的紧接前元 *(Immediate predecessor)*，b 为 a 的紧接后元 *(Immediate successor)* ♣

这个定义延拓了你在第一章接触到的实数集上的区间，当然它也是很自然的。你也可以类似定义闭区间，只需要把 $<$ 改成相关联的 $\leq$ 即可。

定义 6.6

设 A 和 B 为两个集合，其上分别配有序关系 $<_A$ 和 $<_B$。若从 A 到 B 存在一个保持序结构的双射，我们则称 A 和 B 具有相同的序类型 *(Order type)*，即，存在双射 $f: A \to B$ 满足：

$$a_1 <_A a_2 \Rightarrow f(a_1) <_B f(a_2)$$

♣

说白了就是我原来怎么样，映过去之后还是怎么样，如果能这么映的话，说明两个集合上面的序结构相性比较好，可以贴贴。

例题 6.6 比如 $(-1,1)$ 和 $\mathbb{R}$ 具有相同的序结构 (取常序关系)，因为我们可以取映射 $f:(-1,1) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

你可以验证，它是一个保持序结构的双射。就像图 6.2 所展示的一样：

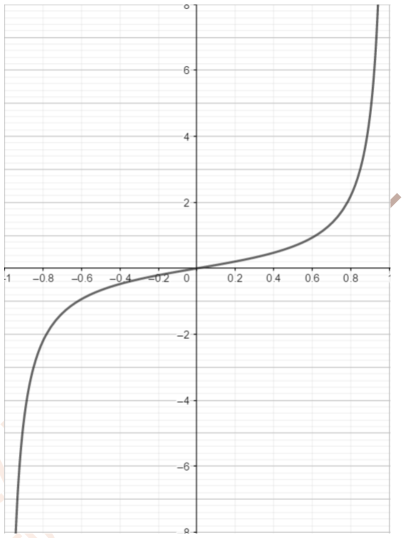


图 6.2

例题 6.7 设 $A = \{0\} \cup (1,2)$，它和 $[0,1)$ 具有相同的序结构，取 $f: A \to [0,1)$

$$f(0) = 0$$

$$f(x) = x - 1,\ x \in (1,2)$$

即可。

一种有趣的定义序关系的方式如下：

定义 6.7

设 A 和 B 为两个集合，其上分别配有序关系 $<_A$ 和 $<_B$，定义 $A \times B$ 上的序关系 $<$ 为：

$$(a_1, b_1) < (a_2, b_2) :\Leftrightarrow (a_1 <_A a_2) \vee [(a_1 = a_2) \wedge (b_1 <_B b_2)]$$

称为 $A \times B$ 上的字典序 *(Dictionary order relation)*

♣

这个术语的来源也是显而易见的，因为你发现这个序关系所表现出来的性质就跟你查字典一样。这个是按坐标分量的前后比较，查字典是按单词字母的前后比较。比如你可以在复数域上定义字典序，但它和代数运算不相容。我不愿在这里举过多字典序的例子，这应当不难理解。

约定：若非特别说明，我们默认 $\mathcal{P}(X)$ 和其子集在包含序下构成偏序集。

定义 6.8

设 $(X, \leq)$ 为偏序集，A 为 X 的非空子集。X 中的元素 s 称为 A 的一个上界 (*Upper bound*)，如果 $\forall\, a \in A,\ a \leq s$。类似地，$s$ 称为 A 的下界 (*Lower bound*)，如果 $\forall\, a \in A,\ a \geq s$。我们称 A 是上有界 (*Bounded above*) 的，如果 A 有一个上界，称 A 下有界 (*Bounded below*) 若 A 有一个下界，称 A 有界 (*Bounded*) 如果 A 上下均有界。

如果 X 中存在元素 m 使得 $m \in A$ 且 m 是 A 的上界，我们就说 m 是 A 的最大值 (*Maximum*)，记为 $\max(A)$，同理，称 m 为 A 的最小值 (*Minimum*)，记为 $\min(A)$，如果 $m \in A$ 且 m 为 A 的下界。

很自然，由最大值和最小值的定义，我们有如下推论：

推论 6.1

A 至多有一个最大值和最小值。

证明留作习题。

定义 6.9

设 A 为偏序集 X 的子集，且 A 上有界，若 A 的所有上界构成的集合有最小值，称这个最小值为 A 的最小上界 (*Least upper bound*) 或上确界 (*Supremum*)，记作 $\sup(A)$，即：

$$\sup(A) := \min\{s \in X \mid s \geq a,\ \forall\, a \in A\}$$

类似地，对 A 下有界，如果 A 的所有下界构成的集合有最大值，则称最大值为 A 的最大下界 (*Greatest lower bound*) 或下确界 (*Infimum*)，记作 $\inf(A)$，即：

$$\inf(A) := \max\{s \in X \mid s \leq a,\ \forall\, a \in A\}$$

注

1. 我们要强调的是，一个上有界的集合不一定有上确界，同理一个下有界的集合不一定有下确界。比如 $\{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 2\}$，显然它没有上确界，因为 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
2. 若 $\sup(A)$ 和 $\inf(A)$ 存在，那么一般 $\sup(A) \notin A$ 且 $\inf(A) \notin A$
3. 若 $\sup(A)$ 存在且 $\sup(A) \in A$，那么 $\sup(A) = \max(A)$。类似地，如果 $\inf(A)$ 存在且 $\inf(A) \in A$，那么 $\inf(A) = \min(A)$
4. 若 $\max(A)$ 存在，那么 $\sup(A) = \max(A)$。类似地，如果 $\min(A)$ 存在，那么 $\inf(A) = \min(A)$

例题 6.8

1. 设 $\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{P}(X)$ 的非空子集，则：
$$\sup(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A}, \qquad \inf(\mathcal{A}) = \bigcap \mathcal{A}$$
2. 设 X 为至少有两个元素的集合，$\mathcal{X} := \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$，其上有包含序。更进一步设 A 和 B 为 X 的两个非空不交子集，$\mathcal{A} := \{A, B\}$，那么 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ 且 $\sup(\mathcal{A}) = A \cup B$，但 $\mathcal{A}$ 没有最大值，$\mathcal{A}$ 也不下有界，特别的，$\inf(\mathcal{A})$ 不存在。

那么现在你知道，并不是什么上有界的集合都有上确界，也不是什么下有界的集合都有下确界，因此具有确界的集合应当比较特殊，我们给予它一个昵称：

定义 6.10

我们说一个偏序集 A 有最小上界性质 *(Least upper bound property)*，如果 A 的每个上有界的非空子集 A_0 都有最小上界。类似地，我们称 A 具有最大下界性质 *(Greatest lower bound property)*，如果 A 的每个下有界的非空子集 A_0 都有最大下界。

事实上这两者是一回事：

命题 6.1

A 有最小上界性质当且仅当 A 有最大下界性质。

证明留作习题。所以我们干脆把两者统称为确界性质。

现在我们将单调性与有界性的概念扩充一下，对一般的序关系，我们也可以定义映射的单调与有界：

定义 6.11

设 $X := (X, \leq_X)$ 与 $Y := (Y, \leq_Y)$ 为偏序集，$f : X \to Y$ 为映射。那么称 f 是增加 *(Increasing)*(或减少 *(Decreasing)*) 的，如果 $x \leq_X y$ 推出 $f(x) \leq_Y f(y)$(或 $f(x) \geq_Y f(y)$)。如果 $x <_X y \Rightarrow f(x) <_Y f(y)$(或 $f(x) > f(y)$)，那么称 f 是严格增加 *(Strictly increasing)*(或严格减少 *(Strictly decreasing)*)。如果 f 是 (严格) 增加或减少的，称 f 是 (严格) 单调 *((Strictly)monotone)* 的。

定义 6.12

设 X 为任意集合，$Y := (Y, \leq)$ 为偏序集，$f : X \to Y$ 为映射。那么我们分别称 f 有界、上有界、下有界若 f 的像集 $\operatorname{im}(f) = f(X)$ 有界、上有界、下有界。若 X 也是偏序集，那么称 f 在有界集上有界 *(Bounded on bounded sets)*，若对 X 的任何有界子集 A，有 $f|_A$ 有界。

这是很自然的。

例题 6.9

1. 设 X 和 Y 为集合，$f \in Y^X$。那么由命题 1.7，f 诱导的集合值映射 $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ 与 $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ 是增加的。
2. 设 X 中至少有两个元素，$\mathcal{X} := \mathcal{P}(X) \setminus \{X\}$，其上配有包含序。那么恒等映射 $\mathrm{id}_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $A \mapsto A$ 在有界集上有界，但并不有界。

6.1.3 运算

在这节的最后我们补充一些关于运算的知识。

定义 6.13

映射 $\circledast : X \times X \to X$ 称为 X 上的 (二元) 运算 *((Binary)operation)*。这种情况下，(x, y) 的值往往记为 $x \circledast y$，而不是 $\circledast(x, y)$。对 X 的非空子集 A 和 B，我们用 $A \circledast B$ 来表示 $A \times B$ 在映射 $\circledast$ 下的像。即：

$$A \circledast B = \{a \circledast b \mid a \in A,\ b \in B\}$$

这不难理解，所谓二元运算，无非就是两个元素作用一下得到一个新的元素。用映射去描述是十分恰当的。

例题 6.10

1. 设 X 为集合，那么映射的复合 $\circ$ 为 X^X 上的运算。
2. $\cup$ 和 $\cap$ 是 $\mathcal{P}(X)$ 上的运算。

运算有一些常见的性质：

定义 6.14

1. 设 X 上有运算 $\circledast$，称 X 的非空子集 A 在运算下封闭 (*Closed under the operation*)，若 $A \circledast A \subseteq A$，也就是 $A \times A$ 在映射 $\circledast$ 下的像含于 A 中。
2. 称 $\circledast$ 是结合的 (*Associative*)，若
$$x \circledast (y \circledast z) = (x \circledast y) \circledast z, \quad x, y, z \in X$$
此时我们倾向于删掉括号，直接写为 $x \circledast y \circledast z$
3. 称 $\circledast$ 是交换的 (*Commutative*)，若
$$x \circledast y = y \circledast x, \quad x, y \in X$$

♣

例题 6.11

1. 由命题 1.4，映射的复合是结合的，但不一定交换。
2. $\cup$ 和 $\cap$ 在 $\mathcal{P}(X)$ 交换，也结合。

当然，对于运算，还有一个重要的元素：

定义 6.15

设 $\circledast$ 为 X 上的运算。那么称 $e \in X$ 为 X 上的单位元 (*Identity element*)(关于运算 $\circledast$)，若 e 满足：
$$e \circledast x = x \circledast e = x, \quad x \in X$$

♣

例题 6.12

1. id_X 为 X^X 上复合运算的单位元。
2. $\varnothing$ 为 $\mathcal{P}(X)$ 上 $\cup$ 运算的单位元，X 为 $\mathcal{P}(X)$ 上 $\cap$ 运算的单位元。
3. 当 X 中多于一个元素时，$\mathcal{X} := \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$ 在 $\cup$ 运算下无单位元。

下面的命题指出单位元存在则唯一：

命题 6.2

对一个给定的运算，至多有一个单位元。

♠

证明 若运算 $\circledast$ 有多于一个单位元，设 e 和 e' 均为 $\circledast$ 在 X 上的单位元，那么由定义，$e = e \circledast e' = e'$，故单位元唯一。

例题 6.13 设 $\circledast$ 为 Y 上的运算，X 为非空集合。那么我们在 Y^X 上定义由 $\circledast$ 诱导 (*Induced from* $\circledast$) 的运算为：
$$(f \odot g)(x) := f(x) \circledast g(x), \quad x \in X$$
显然如果 $\circledast$ 是结合或交换的，那么 $\odot$ 是结合或交换的。若 Y 关于 $\circledast$ 有单位元 e，那么常值映射
$$Const_e : X \to Y, \quad x \mapsto e$$
为 Y^X 关于 $\odot$ 的单位元。以后我们直接用 $\circledast$ 来同时表示 Y 上的运算与其诱导出的 Y^X 上的运算。而 $\circledast$ 到底指的是哪个运算，从文本环境中是易于知道的，这不会混淆。

6.2 自然数与数学归纳法

你在不断学习更加抽象、更加严谨的数学。然而你的数学根基却并不十分牢固，存在诸多漏洞。为了保证后续学习研究的安全性，我们应当尽量严格地完善甚至是重塑我们的数学根基。我们将在下一章较严谨地讨论逻辑基础，而这两节我将带你着眼于数学基础——数系。我将带你从自然数集 $\mathbb{N}$ 开始，不断完善我们对整数集 $\mathbb{Z}$、有理数集 $\mathbb{Q}$，实数集 $\mathbb{R}$ 的认知。

当然，在我们正式讨论之前，不妨多扯几句。谈谈我们为什么要干这些事情。[3]

你已经同数字打了十多年交道了。你已经深谙数的各种运算律，例如加法与乘法的交换律、结合律，以及乘法的分配律。你也高度熟悉如何利用这些法则来化简数的表达式，比如你在小学就经常干的“简化脱式计算”。但现在我们要着眼于更基本的东西，那就是：为什么这些代数法则总有效力？比如，为什么对于任意选定的三个数 a, b, c，始终有 $a(b+c) = ab + ac$？这不是先天就有的，它可以由数系的更为原始也更为基本的性质来证明。在这个重塑的过程中，你将学习到，如何用更简单的性质来证明更复杂的性质。你会发现，即使一个命题可能是“明显的”，但它可能是不易于证明的。你将遇到大量的例子去处理它们，并且它们将逐步引导你去思考为什么一个明显的命题的确很明显。这里你要特别学到的一个技术是*数学归纳法*，这是在数学的许多领域中证明事情的一个基本工具。

为了完善我们忽略的细节，我们应当先从最基本的自然数开始。我们将考虑：人们是怎样实际**定义**自然数的？(这与怎样**使用**自然数是非常不同的问题。使用自然数当然是你十分了解的事情。这就像知道如何使用一台计算机与知道如何建造这台计算机是完全不同的两回事。)

回答这个问题比它本身看上去要困难得多。问题在于，你已经使用自然数太久了，以至于这些数已经深深嵌入你的数学思维之中，使得你甚至不必思索你在做什么就能作出关于这些数的各种不明显的假设 (例如 $a + b$ 总是等于 $b + a$)，很难让你像第一次见到它那样去考察这个数系。所以往下我将不得不要你执行一个相当艰巨的任务：暂且把你知道的关于自然数的一切放到一边：忘记怎样计数、忘记加法、忘记乘法、忘记代数算律等等。我们将逐个引入这些概念，在这一过程中，你需要清楚地鉴别出哪些是我们的假定——而且不允许使用更进一步的技巧，如代数算律，直到我们实实在在地证明了这些算律为止。这好像是一种令人烦恼的限制，特别是当我们花费大量时间去证明“显然的”命题时会感到如此。但是这种把已知的事实暂时封存起来的做法对于避免循环论证（也就是使用一个进一步的事实去证明一个更初等的事实, 而后又使用这个初等的事实去证明那个进一步的事实）是必要的。同时，这个练习也是树立你的数学知识的牢固根基的一个极好的方式。更有甚者，此处你实行的证明和抽象思考，对于你接受更进一步的概念，如实数、函数、序列、级数、微分和积分等，将会有无法估量的好处。简言之，此处的结果或许像是平庸的，然而眼下过程要比目的重要得多（一旦数系真正建立起来，我们就可以恢复使用代数算律等等，而不必次次重新推导它们。)

以及，你得忘掉十进制。虽然在这一节我们似乎没怎么使用十进制的内容。当然十进制是一个操作数学的极其方便的方法，但对于数是什么而言，十进制可不是什么基本的东西。(例如，人们可以不用十进制而使用八进制或二进制，甚或使用罗马数系，仍然恰恰得到同一个数集。) 此外，若想完整地解释十进制数是什么，那并不像你可能想象的那么自然。为什么 00423 与 423 是同一个数而 32400 与 324 不是同一个数？为什么 $123.444\cdots$ 是实数，而 $\cdots 444.321$ 不是实数？以及为什么当我们作加法或乘法时必须关注小数点的位置？为什么 $0.999\cdots$ 和 1 是同一个数？（你在之前肯定和同学争论过这个问题，至少我的确疑惑过。）最小的正实数是什么？是否就是 $0.00\cdots01$？所以，为将这些问题撇开，我

[3]以下内容摘自《陶哲轩实分析》，不如说我这一节都是引用的他的编排

们将尽量不涉及十进制的知识，尽管我们当然还是使用数的常用的名称，如 $1,2,3$ 等，而不使用其他的记号如 I,II,III 或 $0++,(0++)++,((0++)++)++$(参见下文) 等那样的并非不必要的人造的记号。而十进制我们将在实数那里详细讨论。

最后，我应当提醒你。我们对自然数的定义是**公理化的**，而不是**构造性的**。我们不曾告诉你自然数是什么（所以我们不提这样的问题：数是由什么制成的，它们是物理对象吗，它们度量什么，等等）。我们仅列出一些你可以用这些数做的一些事情（其实，此刻我们对它们所定义的唯一的运算就是增长），以及它们所具有的某些性质。数学就是这样干活的——它抽象地处理它的对象，只关注这些对象具有哪些性质而不管这些对象是什么东西或者有什么意思。如果要做数学，那么一个自然数是指算盘珠子的一定的排法，还是指一台计算机的存储器中的比特（二进制数中的 0 或 1）的一定的的组织方式，或者指某种没有物质属性的更为抽象的概念，都没有关系；当你能使它们增长时，看看它们中的两个是否相等，然后再做其他的算术运算，如加法与乘法，它们是为了数学的目的作为数的（只要它们服从必要的公理）。从其他的数学对象出发来构作自然数是可能的（例如从集合出发），但是构作自然数的实用模型的方式是多种多样的，不过这没关系，至少从数学家的观点来看，争论哪个模型是“真实的”是没什么意义的。只要它们服从所有的公理并正确地运作，对于数学就足够好了。

这是为了预防你一开头就在这钻牛角尖，不停追问数是什么。我曾经浪费了一点时间在这上面，后来我意识到这是无意义的。希望你能想清楚这件事。当然，你大可以保留你对自然数的最最基本的认知，比如你对 $0,1,2$ 这些自然数是什么已经有了基本的认知，接下来你可以完善并严格化你的认知，但没有必要完全抛开它。[4]

好了，我们现在回归正题。

6.2.1 Peano 公理

我们现在用 *Peano* 公理的语言提出一个定义自然数的标准方法，Peano 公理是 Guiseppe Peano(1858-1932) 首先提出的。这不是定义自然数的唯一方法 (事实上我们也可以先定义实数，再定义自然数)。不过我们眼下只使用 Peano 公理的方式。而且，我已经默认你**大概**知道自然数是什么，也清楚其上的运算，我现在做的只是将其严谨化。

我们可以先对自然数做一个不正式的描述，这一点是你熟知的，并非什么新东西，所以请不要钻牛角尖。

定义 6.16（（不正式的））

自然数 (*Natural number*) 是指集合

$$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,4,\cdots\}$$

的元素，此集合是由从 0 开始无休止地往前数所得到的一切数的集。我们把 $\mathbb{N}$ 叫作自然数集。♣

这个定义在一定意义上解决了自然数是什么的问题：一个自然数乃是集合 $\mathbb{N}$ 的一个元素，是由 0 开始不断往后数，能够出现的数。不过，这个非正式的定义存在一些问题。比如：我们怎么知道可以无休止地数下去而不会循环回到 0？我们怎么实现运算，比如加法、乘法或者指数运算？

我们首先回答后面那个问题：我们可以通过简单的运算定义复杂的运算。

[4]这一点我和陶哲轩的看法可能有点点出入，你如果能接受的话，就顺着他来，全忘了吧。如果你遇到了一些困难，那不妨试试我的建议。

你已经知道，指数运算无非就是多次执行乘法，比如 5^3 就是 $5\times5\times5$；乘法运算无非就是多次执行加法，比如 $5\times3=5+5+5$；那么加法呢？无非就是多次执行“加一”操作，或者叫增长，比如 $5+3=[(5+1)+1]+1$。不过增长似乎无法更简化了。不错，这大抵确乎是你遇到的第一个运算的，譬如数数字，是如此的。

因此基于这一点，要想发展如此一个看不见尽头的数系，你只需要一个起点，它叫零，记作 0；以及一个位移的操作，或者说一种走向更远的能力，它叫增长。我们仍然使用 n 代表自然数，用 $n++$ 来表示 n 执行增长运算后得到的自然数，称为 n 的后继 (*Successor*)。我们从零开始，不断增长，逐渐走向无限的彼方，留下了一个自然的数系，也就是我们的自然数系。

注 熟悉编程语言的同学大概知道，++ 在编程语言里面称为自增运算符 (*Increment operator*)。但计算机语言里面，如果对于变量 n，你对它使用了自增运算符，那么实际上发生的事情是你把变量 n 储存的值取出来，加一后再放回去，因此 $n++$ 实际上重新定义 n 的值为 n 的后继者[5]。但我们此处使用这个记号只是表示某个自然数的后继，二者不应混淆。

于是，或许自然数的一个较正式一点点的描述是：自然数集 $\mathbb{N}$ 是由 0 和每个可由 0 经增长而得者所组成，也就是，$\mathbb{N}$ 应是由对象

$$0, 0++, (0++)++, ((0++)++)++, \cdots$$

所组成。为了将我们的思想转化为基石，我们给出下述的涉及 0 和增长运算 ++ 的公理：

公理 6.1

0 是一个自然数。

公理 6.2

若 n 是自然数，则 $n++$ 也是自然数。

这样，$0, 0++, (0++)++$ 就均是自然数。你也容易发现，多次执行增长运算后得到的自然数以这种记号来表示比较繁琐，因此我们仍然使用我们所熟悉的记号来表示自然数，比如 $1:=0++$，$2:=(0++)++$，$3=((0++)++)++$ 等。但我应当提醒你，既然我使用的是 $:=$，说明我只是使用这个记号，本身 $1,2,3$ 不具有意义，所以你不要和你之前的认知对号入座，而是应该将其理解为 0 经过自增得到的产物。

于是作为例子，我们有：

例题 6.14 $1,2,3$ 是自然数。

你大概会觉得这是显然的，但你要思考的是为什么这是显然的。因为思路十分直接而明显，且过程也很简洁。你只有一条路可走，那就是利用我们刚才给出的公理，而且只需要用一下公理立马就能得到答案。

证明 因为 $1=0++$，0 是自然数，故 $0++$ 也是自然数，即 1 是自然数。

因为 $2=1++$，1 是自然数，故 $1++$ 也是自然数，即 2 是自然数。

因为 $3=2++$，2 是自然数，故 $2++$ 也是自然数，即 3 是自然数。

你可能觉得这两条公理就够了，但情况不是这样的。

设想一下，假如有一个数系，由 $\{0,1,2\}$ 组成，$0++=1$，$1++=2$，而我们定义 $2++=0$，那

[5] 当然，编程语言不允许对常量进行自增操作，只有变量才可以自增。所以我们只是从计算机语言引用了这个概念模型，具体的含义还是存在较大差别。

么这个数系显然也满足前面两条公理，但它显然不是我们想要的自然数系。你可能会想，怎么会存在这么一个数系呢？其实没人不允许它存在，在后面你会学到，这其实是模 3 形成的域。那么问题出在哪呢？

咱在前面也说过，自然数的构建是从零开始不断地向前走，这条路将延伸到无穷远，没有尽头。而不是像现在这样，走到 2 之后突然到 0 后面去了，形成了一个圈。这不行，自然数不应该出现循环，因此我们再增加一条公理：

公理 6.3

0 不是任何自然数的后继，即对于每个自然数 n，都有 $n++\neq 0$

这样子，我们就可以保证不会在 0 处形成嵌套循环。进而，你可以证明任何一个非零自然数都不会为 0，因为任何一个非零自然数必然都是另外一个自然数经过增长得到的[6]，而 0 是不可以通过增长得到的。

加了这条公理似乎还不够，因为我们似乎只保证了不会在 0 处形成嵌套循环，没有保证不会在其它自然数那里形成嵌套。例如，我们没有保证 6 不等于 2。如果 6 等于 2，那么后面的取值将一遍遍遍历 $\{2,3,4,5\}$ 这四个值，而且这与前三条公理是不矛盾的。因此我们还需要增加一条公理：

公理 6.4

不同的自然数必有不同的后继者；也就是说，若 n,m 是自然数且 $n\neq m$，则 $n++\neq m++$。等价地说，若 $n++=m++$，则必有 $n=m$。

有了这一条，我们就可以保证 $\mathbb{N}$ 不会在任何一个自然数处出现循环。你可以思考这一点是如何实现的。

或许你觉得这四条公理已经够了，但我们其实没有保证自然数的纯粹性。

我们一开始就提过，自然数集应是由对象 $0, 0++, (0++)++, \cdots$ 这种元素构成的。换句话说，自然数是 0 不断自增得到的，自然数起源于 0，也只有这么一个 0，不存在第二个起源了。这似乎是理所应当的事实，但仔细想想，我们似乎的确没有保证这件事情。

比如我们可以考虑这么一个数系，里面有两个 0，一个是“0”，一个是“零”，“0”自增产生了 $1,2,3,\cdots$，“零”自增产生了“一”，“二”，“三”，$\cdots$，假设原来两个数系都满足四条公理，那么我们将两个数系合并之后得到的新数系仍然满足四条公理，但这显然不是我们想要的自然数集，0 当然只能有一个。为此，我们需要加上最后一条公理：

公理 6.5 (数学归纳原理)

设 $P(n)$ 是关于自然数的一个性质。假设 $P(0)$ 是真的，并假设只要 $P(n)$ 是真的，则 $P(n++)$ 也是真的。那么对于每个自然数 n，$P(n)$ 都是真的。

注 由于这个公理不仅说及变量，同时也说及性质[7]，它与其它四个公理具有不同的本质。的确，公理 6.5 技术上与其叫作公理 (*Axiom*)，不如叫作公理框架 (*Axiom schema*)——它是一个产生 (无限) 多个公理的模板，比说它是单个独立的公理更确切。要进一步讨论这种属性就不是咱现在关心的事情了。

只要我们按我们的意愿，取 $P(n)$ 为“n 可以由 0 增长得到”，那么 $P(0)$ 成立，因为 0 可以由 0 经

[6]你可能对这一点保持疑惑，因为单单从前面三条公理似乎不能得到这个结论。我也这么觉得，它应当由公理五来证明。

[7]我们在 1.1.2 讲过，性质就是一个命题。

过零次增长得到；如果 $P(n)$ 成立，也就是 n 可以由 0 增长得到，那么 $n++$ 当然可以由 0 增长得到，你只需要在 n 的基础上再自增一次即可，因此 $P(n++)$ 也成立。于是 $P(n)$ 对所有的自然数 n 都成立。而按公理 6.3，“零”不是任何数的后继，但现在“零”可以由 0 增长得到，除非“零”就是 0，否则会矛盾。因此 0 的确是唯一的，这就保证了自然数的纯粹性。

我们把上述公理总结一下，就得到所谓 Peano 公理。

公理 6.6 (Peano 公理)

所谓自然数的 *Peano* 公理 (*Peano axiom*)，指的是如下五条公理：

1. 0 是一个自然数；
2. 若 n 是自然数，则 $n++$ 也是自然数；
3. 0 不是任何自然数的后继；
4. 不同的自然数必有不同的后继者；
5. 设 $P(n)$ 是关于自然数的一个性质。假设 $P(0)$ 是真的，并假设只要 $P(n)$ 是真的，则 $P(n++)$ 也是真的。那么对于每个自然数 n，$P(n)$ 都是真的。

♡

值得提醒一句的是，所谓数学归纳法，就是基于第五条公理的。比如你要证明一个关于正整数的命题 $P(n)$, $n \in \mathbb{N}_+$(大多数情况是正整数而不是自然数) 成立，数学归纳法的操作是：

1. 证明 $P(1)$ 成立；
2. 假设 $P(n)$ 成立；
3. 证明 $P(n+1)$ 成立。

于是 $P(n)$ 对所有正整数都成立。这里实际上的核心在于第三步，另外两步一般没有什么难度。数学归纳法也有几种变形，我们等会介绍。

现在基于 Peano 公理，我们合理作出对于自然数严谨的定义：

定义 6.17

我们称满足 Peano 公理的数系为自然数系，记作 $\mathbb{N}$，其中元素称为自然数。

♣

我们理所应当地认为自然数是存在的，我们会在习题里面向你展示自然数的存在性。但或许你会怀疑自然数的唯一性，就像我们刚才举的例子，阿拉伯数系和汉字数系均满足 Peano 公理，所以它们均可以作为自然数系。如果你真的愿意自找麻烦，你的确可以把这些数系看成是不同的东西，但这些数系明显是等价的 (技术术语是同构 (*Isomorphic*))，也就是说这些数系除了写法不太一样 (比如阿拉伯数字明显比汉字更节省墨水)，你对它们的操作没有任何区别，它们的性质也完全一致。而事实上自然数系的一切变种都是如此等价的，因此说存在不同的自然数系就是毫无意义的事，所以我们仅使用单独一个自然数系来做数学。而现代分析的一个非凡的成就是，只从这五个非常原始的公理和集合论中的某些附加的公理出发，就能建立起所有的其它的数系，创造函数，并做我们通常所做的全部代数和微积分。

而一件颇为有趣的事情是，每个单个的自然数都是有限的，而自然数的集合是无限的；也就是说，$\mathbb{N}$ 是无限的然而却是由各个有限的元素组成的。不存在无限的自然数，这一点可以使用公理 6.5 证明。这样看来，自然数可以趋于无限，但永远不能实际到达无限；无限不是自然数。虽然的确有一些数系容纳“无限的”数，例如基数、序数以及 p 进数，但它们不遵从归纳法，且完全在本书范围之外。

我们一开始也提过，我们现在对自然数进行的是公理化的定义。而公理化的一个结果是，我们现在可以递归地定义数列 (虽然只是自然数)。假定我们要建立一个数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$，首先定义 a_0 为某

个基础的数，例如 $a_0 = c$，c 是某个自然数，然后，让 a_1 是 a_0 在某个由 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的映射 f_0 下的像[8]，$a_1 = f_0(a_0)$，而 a_2 是 a_1 在某个由 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的映射 f_1 下的像，$a_2 = f_1(a_1)$，依此类推。一般地，我们令 $a_{n++} = f_n(a_n)$，其中 f_n 是某个从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的映射。使用所有的公理，我们现在可以断定这个过程将对于每个自然数 n，给出序列元素 a_n 一个单一的值。也就是：

命题 6.3 (递归定义 I)

设对于每个自然数 n，都有某个映射 $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 把自然数映成自然数。设 c 是一个自然数，那么可以对于每个自然数 n 指定唯一一个自然数 a_n，使得 $a_0 = c$ 且 $a_{n++} = f_n(a_n)$。♠

证明 我们使用数学归纳法来解决这件事情。

首先对于 $n = 0$，我们直接令 $a_0 = c$，根据公理 6.3，0 不是任何自然数的后继，因此 a_0 不会被 $f_n(a_n)$ 定义。所以 a_0 是唯一定义的。

然后假设 $n = k++$ 时 (这么写有两个好处，一是避免了 $n = 0$，重复讨论；二是避免了定义 $--$ 这个运算，免得整出个 $a_k = f_{k--}(a_{k--})$ 这种奇怪的东西)，对自然数 $k++$，我们可以唯一指定 $a_{k++} = f_k(a_k)$。

那么对于 $n = (k++)++$，我们定义 $a_{(k++)++} = f_{k++}(a_{k++})$，这就给出了 $a_{(k++)++}$ 的值，而且我们知道，由于 a_{k++} 是唯一的，因此 $a_{(k++)++}$ 也是唯一的。而根据公理 6.4，如果 $a_{m++} = f_m(a_m)$ 也定义了 $a_{(k++)++}$，那么 $m++ = (k++)++ \Rightarrow m = k++$，因此不存在 $k++$ 以外的自然数定义了 $a_{(k++)++}$。

从而对于每个自然数 n，a_n 都被赋予单一的值。

注意，这里所有的公理是怎样必须被用到的。在一个具有某种回归 (Warparound) 的系统中，递归定义无法工作，因为序列的某些元素常常会被再次定义。比如我们之前列举的一个数系 $\{0, 1, 2\}$，a_0 就会（至少）有两个冲突的定义，或者 c，或者 $f_2(a_2)$。而在一个具有多余元素如“零”的数系中，元素 $a_{零}$ 永不会被定义。

递归定义的方法是非常有效的。比如我们可以用这种方式来定义加法和乘法，也就是我们接下来要做的事。

6.2.2 加法

自然数系此刻还是非常朴素的：我们只有一种运算——增长，以及一撮公理，然而现在我们可以建立起更复杂的运算，如加法。你很清楚，加法无非是增长的反复执行与套娃，这很容易联想到递归定义：

定义 6.18 (自然数的加法)

设 m 为自然数。在自然数集 $\mathbb{N}$ 上定义一个运算，叫加法 (*Addition*)，记作 $+$。为使 m 加上 0，我们定义 $0 + m := m$。现归纳的假定已定义好如何使 m 加上 n，那么把 m 加于 $n++$ 则定义为 $(n++) + m := (n + m)++$。♣

注 你应当注意，我们没有说明此种运算定义的合理性，因为我们尚未说明如此定义的运算是封闭的。不过证明封闭性并非什么困难的事情。

[8]这里使用函数一词更加简洁，但从我编写顺序来看，我坚持使用映射来方便你理解

值得注意的是，你可能根据你小时候就知道的加法交换律，下意识认为 $n+m$ 与 $m+n$ 是一回事，但这是不被允许的。我们尚未说明加法满足交换律（我们甚至还没说清楚加法是怎么回事），此时的加法极其粗糙。你应当有意识的承认加与被加的概念，比如 $n+m$ 理解为 m 加上 n，或者说把 n 作用在 m 上，也就是加到 m 上，m 是被加的，n 为加数。不能想当然地认为加数与被加数是可交换的。

于是 $0+m$ 是 m（这是定义），$1+m=(0++)+m=(0+m)++=m++$，这是由递推关系得来，$2+m=(1++)+m=(1+m)++=(m++)++$，诸如此类，依此类推。于是你从我们在上一小节对于递归的讨论看到，我们对每个自然数 n 都定义了 $n+m$（因为我们固定了被加数 m，变化加数 n）。这里我们把前面的一般性讨论特殊化为 $a_n=n+m$ 及 $f_n(a_n)=a_n++$（你可以验证一下?）。

不过眼下关于加法我们只知道两件事：$0+m=m$ 以及 $(n++)+m=(n+m++)$。但是这已足够用来演绎出我们关于加法所知道的其他一切事情。

我们从基本的引理[9]开始。

引理 6.2

对于任何自然数 n，$n+0=n$。

注意，我们不能从 $0+n=n$ 直接断言此事，因为我们尚未证明加法是交换的。

证明 我们当然选取归纳法完成此事。

当 $n=0$ 时，$0+0=0$，这当然成立。

假定 $n+0=n$ 成立，那么要证 $(n++)+0=n++$，注意到 $LHS=(n+0)++=n++=RHS$，从而等式成立。

因此引理对任何自然数成立。

然后是第二个引理。

引理 6.3

对于任何自然数 n 和 m，$n+(m++)=(n+m)++$。

再次说明，我们还不能从 $(n++)+m=(n+m)++$ 推出此事，因为我们没证加法是交换的。

证明 对 n 进行归纳（固定 m）。对任意自然数 m，有：

当 $n=0$ 时，$LHS=0+(m++)=m++$，$RHS=(0+m)++=m++$，$LHS=RHS$，等式成立。

假定 $n+(m++)=(n+m)++$ 成立，那么要证 $(n++)+(m++)=((n++)+m)++$，由于 $LHS=(n+(m++))++=((n+m)++)++$（这是归纳的假设），$RHS=((n++)+m)++=((n+m)++)++$（这是加法的定义），因此 $LHS=RHS$，等式成立。

从而引理对任何自然数 n,m 都成立。

于是根据引理 6.2 与引理 6.3，你很容易看到这个推论：

推论 6.2

对任意自然数 n，$n++=n+1$

想想为什么。

[9]本质上来讲，引理、命题、定理、推论之间并没有什么区别，它们都是必须被证明的。但是我们使用不同的术语来表示它们的地位与重要性。引理是容易证明的断言，它被用来帮助证明其他的命题或定理，但本身通常不是很有意义。命题是本身有意义的陈述，而定理是更重要的陈述，通常也更难证明。而推论是可以利用刚证明的命题或定理直接得到的结果。

于是接下来我们可以证明加法的交换律。

命题 6.4 (加法交换律)

对于任何自然数 n 和 m，$n+m=m+n$。

证明 对 n 归纳。

当 $n=0$ 时，$LHS=0+m=m$（这是定义），$RHS=m+0=m$（这是引理 6.2），故 $LHS=RHS$，等式成立。

假定 $n+m=m+n$，那么要证 $(n++)+m=m+(n++)$。注意到 $LHS=(n+m)++$，$RHS=(m+n)++$（这是引理 6.3），而 $n+m=m+n$(这是假设)，故 $(n+m)++=(m+n)++$（这是公理 6.4），从而 $LHS=RHS$。

于是交换律对任意自然数 m,n 都成立。

同样的，你需要注意定义、引理和公理在证明中怎样地被用到了，这对你体系的建构很有帮助。

我们也可以证明加法的结合律：

命题 6.5 (加法结合律)

对于任何自然数 a,b,c，$(a+b)+c=a+(b+c)$。

证明 我们对 a 归纳。对于任意自然数 b,c：

当 $a=0$ 时，$LHS=(0+b)+c=b+c$, $RHS=0+(b+c)=b+c$, $LHS=RHS$，等式成立。

假定 $(a+b)+c=a+(b+c)$，那么要证 $((a++)+b)+c=(a++)+(b+c)$。$LHS=((a+b)++)+c=((a+b)+c)++$，$RHS=(a+(b+c))++$，而根据归纳假设，$(a+b)+c=a+(b+c)$，从而 $((a+b)+c)++=(a+(b+c))++$，故 $LHS=RHS$，等式成立。

从而结合律对任意自然数 a,b,c 成立。

事实上这在 Tau 的书上是一道习题，不过我在这里向你展示了证明，你可以自己动手试试，并不困难。

注 一般来讲，结合律的重要性在于你可以在相同的运算之下把括号甩了，不需要顾及计算顺序，算起来方便，写起来也方便。

现在我们给出消去律：

命题 6.6 (加法消去律)

设 a,b,c 为自然数，满足 $a+b=a+c$，那么我们有 $b=c$。

你可能略显疑惑，下意识地认为这是显然的。但注意，我们尚不可使用减法或者负数来证明这个命题，因为我们还不曾建立这些概念。事实上，这个消去律是我们后面定义减法（以及整数）的决定性依据，因为它使我们即使在减法被正式定义之前，就能进行一种“虚拟减法”。

证明 还是对 a 归纳。

当 $a=0$ 时，我们有 $0+b=0+c\Rightarrow b=c$。

假定 $a+b=a+c\Rightarrow b=c$，那么对于 $a++,b,c$ 满足 $(a++)+b=(a++)+c$，有 $LHS=(a+b)++$，$RHS=(a+c)++$，二者相等，根据公理 4，$a+b=a+c$，再根据归纳假定，$b=c$。

从而消去律对于任意自然数 a,b,c 成立。

于是我们就给出了加法的算律的证明，以后我们就可以肆无忌惮地使用这些算律了，好耶！

此时我们已经知晓了加法的定义，与一些性质（算律），接下来我们讨论加法如何对自然数产生影响。

定义 6.19 (正自然数)

我们称一个自然数是正的 (*Positive*)，当且仅当它不等于 0。

紧接着我们断言：

命题 6.7

若 a 是正的而 b 是自然数，则 $a+b$ 是正的，进而 $b+a$ 也是正的。

证明 对 b 归纳。

当 $b=0$ 时，$a+b=a+0=a\neq 0$，于是 $a+b$ 是正的。

假定 $a+b$ 是正的，那么 $a+(b++)=(a+b)++$，它显然不会等于 0，因为它是自然数的后继。所以它必然也是正的。

因此命题成立。根据交换律立得 $b+a$ 也是正的。

推论 6.3

如果 a 和 b 是自然数，满足 $a+b=0$，那么 $a=0$ 且 $b=0$。

证明 我们反证。

若 $a\neq 0$，那么 a 是正的，所以 $a+b$ 是正的，这与 $a+b=0$ 矛盾，因此 $a=0$。同理 $b=0$。

以及，下面一个引理直接指出正自然数的一个判别方式。

引理 6.4

若 a 为正自然数，那么恰存在一个自然数 b，使得 $b++=a$。

说白了，一个数是正自然数当且仅当它是某个自然数的后继。你可以认为这个引理可以用来证明命题 6.7。

证明留作习题。

于是借助加法，我们可以定义自然数的序。

定义 6.20 (自然数的序)

我们在集合 $\mathbb{N}$ 上定义关系 $\leq$ 为：

$$m\leq n :\Leftrightarrow \exists\, a\in\mathbb{N},\ n=m+a$$

则 $\leq$ 为 $\mathbb{N}$ 上的非严格偏序。

不过我们尚未验证这个定义的合理性，这一点留在下面的命题中。很自然的，你可以相应地定义严格偏序 $m<n$ 为 $m\leq n$ 且 $m\neq n$。当然，它也可以表述为存在正自然数 a 使得 $n=m+a$，这两种表述是等价的。

而且你注意到，对于任意的自然数 n，始终有 $n++>n$，因此自然数集 $\mathbb{N}$ 没有上界，所以无界，也就不存在最大的自然数。

命题 6.8 (自然数的序的基本性质)

设 a, b, c 是自然数，那么

1. (自反性) $a \leq a$。
2. (传递性) 若 $a \geq b$ 且 $b \geq c$，则 $a \geq c$。
3. (反对称性) 若 $a \geq b$ 且 $b \geq a$，则 $a = b$。
4. (加法保序性) $a \geq b$ 当且仅当 $a + c \geq b + c$。
5. $a < b$ 当且仅当 $a{+}{+} \leq b$。
6. $a < b$ 当且仅当对于某正自然数 d，$b = a + d$。

前三条就是我们说关系 $\leq$ 是 $\mathbb{N}$ 上的非严格偏序的依据。而四和五则是运算与序的综合性质，最后一条则是我刚才提到的严格偏序的等价定义。证明当然也留作习题。

以及，自然数的序满足完全性：

命题 6.9 (自然数的序的三歧性)

设 a 和 b 是自然数，那么下述三命题中恰有一个是真的：

$$a < b,\ a = b,\ a > b$$

于是你就可以得到，$\mathbb{N}$ 是全序集。证明留作习题。

序的性质使我们可以得到归纳法原理的一个更强的形式：

命题 6.10 (强归纳法原理)

设 m_0 是一个自然数，而 $P(m)$ 是一个依赖于任意自然数 m 的性质。设对于每个 $m \geq m_0$ 都有下述蕴含关系：如果 $P(m')$ 对于一切满足 $m_0 \leq m' < m$ 的自然数 m' 都成立，那么 $P(m)$ 也成立 (特别地，这意味着 $P(m_0)$ 成立，因为在 $m = m_0$ 的情况下，假定的条件 $P(m')$ 是空的)，那么，我们可以断定 $P(m)$ 对于一切自然数 $m \geq m_0$ 都成立。

注 在实用中我们常使用这个原理于 $m_0 = 0$ 或 $m_0 = 1$。

证明留作习题。

6.2.3 乘法

上一小节证明了我们所知的关于加法和序的一切基本事实。为了节省篇幅且避免唠叨那些明显的事情，现在允许使用我们所熟知的一切涉及加法与序的代数运算而不加进一步的评说。于是我们可以肆无忌惮地甩出一句 $a + b + c = c + b + a$ 而不加证明。接下来我们来引入乘法。就像加法是重复的增长运算一样，乘法是重复的加法运算。

定义 6.21 (自然数的乘法)

设 m 是自然数。在自然数集 $\mathbb{N}$ 上定义一个运算，叫乘法 (*Multiplication*)，记作 $\times$。为把 0 乘到 m 上，我们定义 $0 \times m := 0$。设已定义了如何把 n 乘到 m 上，那么归纳地，我们定义把 $n{+}{+}$ 乘到 m 上是 $(n{+}{+}) \times m := (n \times m) + m$。

这样有 $0 \times m = 0$, $1 \times m = 0 + m$, $2 \times m = 0 + m + m$，等等。和加法类似的，如此定义乘法当然也是合理的。

你要对这个尚且粗糙的概念注意的事情和我们刚才处理加法一样。不过此时你应当有信心与底气认为你所学过的有关乘法的性质都是对的，因为接下来我们就要着手证明它们。不过，这些证明我不会向你展示，你将自己完成它们。它们的证明均留作习题。

引理 6.5 (乘法交换律)

设 n, m 是自然数，那么 $n \times m = m \times n$。

我们现在将把 $n \times m$ 简写为 nm，并且遵循通常的运算优先级，即先乘后加，就像你之前学过的那样。这样可以避免使用括号，譬如我们无须将 $ab + c$ 写为 $(a \times b) + c$。

引理 6.6 (自然数无零因子)

设 n, m 是自然数。那么 $n \times m = 0$ 当且仅当 n, m 中至少有一个等于零。特别地，若 n 和 m 都是正的，则 nm 也是正的。

零因子是群环域的内容，我们会在最后一章介绍。这里你只需要关心引理的内容，不需要太在意零因子是什么意思。

命题 6.11 (乘法的性质)

设有自然数 a, b, c，那么

1. 分配律：$a(b + c) = ab + ac$ 且 $(b + c)a = ba + ca$。
2. 结合律：$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$。
3. 保序性：若 c 是正的，那么 $a < b \Rightarrow ac < bc$。
4. 消去律：若 $ac = bc$ 且 $c \neq 0$，那么 $a = b$。

恰如我们之前对于加法的消去律所评论的，乘法消去律也为我们提供了一个“虚拟除法”。

如同重复地使用增长运算来定义加法和重复地使用加法运算来定义乘法一样，可以重复地使用乘法运算来定义指数运算：

定义 6.22 (自然数的指数运算)

设 m 是自然数。在自然数集 $\mathbb{N}$ 上定义一个运算，叫幂运算 *(Exponentiation)* 或指数运算，记作 ^。我们通常记 m^n 为 m^n，称为m 的 n 次幂 *(The n^th power of m)*，m 为底数 *(Base)*，n 为指数 *(Exponent)* 或幂 *(Power)*。为把 m 升到 0 次幂，我们定义 $m^0 := 1$。现递归地假定 m^n 已对自然数 n 定义好，那么我们定义 $m^{n++} := m^n \times m$。

我们此处不深究指数运算的性质，而将其留在后面。

6.2.4 补充

最后想再介绍一种理解自然数的方式。

在 1888 年，Richard Dedekind 出版了本关于自然数系的集合论基础的书叫《Was sind und was sollen die Zahlen?》(What are the numbers and what should they be?)。这是该领域发展路上的一个里程碑，更是数学史上的高峰之一。

以一个简洁而“自然”的关于自然数的公理系统来开始这一部分，我们之后会逐渐构造整数，有理数，实数，最后到复数。这种构造性的 *(Constructive)* 的方法比 David Hilbert 在 1899 年给出的关于实

数的公理化的 *(Axiomatic)* 的框架更显优势——数学的高楼大厦可以在一点点数学逻辑与公理化集合论的基石上拔地而起。

6.2.4.1 Peano 公理

我们使用 Giuseppe Peano 的公理系统来定义自然数。这个公理系统形式化了我们的观点，即给定任意自然数，总有一个比其更大的自然数。

定义 6.23 (自然数)

自然数 *(Natural number)* 由一个集合 $\mathbb{N}$, 一个独特的元素 $0 \in \mathbb{N}$, 与一个函数 $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\times} := \mathbb{N}\backslash\{0\}$ 组成。且它们满足如下性质：

- (N_0) ν 为单射。
- (N_1) 若 $\mathbb{N}$ 的子集 N 包含 0，且若 $\nu(n) \in N$ 对所有 $n \in N$ 成立，那么 $N = \mathbb{N}$。

♣

注

(a) 对于 $n \in \mathbb{N}$，元素 $\nu(n)$ 称为 n 的后继 *(Successor)*，而 ν 称为后继函数 *(Successor function)*。元素 0 是唯一一个不为其它自然数后继的自然数，也就是说，$\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\times}$ 是个满射（然后再加上 N_0，是个双射）。

证明 设

$$N := \{n \in \mathbb{N} \mid \exists\, n' \in \mathbb{N}\ s.t.\ \nu(n') = n\} \cup \{0\} = \mathrm{im}(\nu) \cup \{0\}$$

对 $n \in N$ 我们有 $\nu(n) \in \mathrm{im}(\nu) \subseteq \mathbb{N}$。又因为 $0 \in N$，(N_1) 推出 $N = \mathbb{N}$。由此立得 $\mathrm{im}(\nu) = \mathbb{N}^{\times}$。

(b) 比起 $0, \nu(0), \nu(\nu(0)), \nu(\nu(\nu(0))), \cdots$，我们更倾向于写 $0, 1, 2, 3, \cdots$。

(c) 有些作者喜欢以 1 来开始自然数。这对数学来说无伤大雅。我们已经提及过。

(d) 公理 (N_1) 为归纳原理 *(Principle of induction)* 的一种形式。我们将在后面更全面地讨论这一重要原理。

笔记

(a) 我们将在后面看到你在学校里学习过的所有关于数的代数性质均可从 Peano 公理推导出来。即便如此，对于数学家们而言，两个重要的问题出现了：(1) 是否真的存在一个体系 $(\mathbb{N}, 0, \nu)$ 满足 Peano 公理？也就是说，是否存在一个自然数的模型 *(Model)*？(2) 如果有，那么这样的模型有多少个？我们这里简单地考虑一下这些问题。

为了简化我们的讨论，我们介绍如下的概念：一个集合 M 称为无限系统 *(Infinite system)*，若存在一个单射 $f : M \to M$ 使得 $f(M) \subset M$。清楚地，自然数如果存在，就会形成一个无限系统。这种系统的重要性体现在下面的由 R.Dedekind 证明的定理：任何无限系统包含一个自然数的 $(\mathbb{N}, 0, \nu)$ 模型。

因此自然数的存在性问题就退一步变成了无限系统的存在性问题。Dedekind 对这样系统的存在性给予了证明，其中含蓄地用到了 Gottlob Frege 在 1893 年指出的“概括公理 *(Comprehension axiom)*”：对任意关于集合的性质 E，集合

$$M_E := \{x \mid x \text{为满足 } E \text{ 的集合}\}$$

存在。在 1901 年，Bertrand Russell 认识到这一公理会导致矛盾，即悖论 *(Antinomies)*。Russell 选

取了性质 E 为“x 为一集合且 x 不为其自身的元素”。那么概括公理确保了这个集合的存在性：

$$M := \{x \mid (x\text{为集合}) \wedge (x \notin x)\}$$

于是这清晰地导致了矛盾

$$M \in M \Leftrightarrow M \notin M$$

毫不惊讶地，这个悖论动摇了集合论的根基。不过仔细考量之后发现这样的问题仅在考虑“太大”的集合时会出现。为了避免 Russell 的悖论，我们可以区别两种族 *(Collection)*：类 *(Class)* 与集合 *(Set)*。集合为特别的“小”类。若一个类是一个集合，那么它可以公理化描述。于是概括公理就变成了：对每个关于集合的性质 E，类

$$M_E := \{x \mid x\text{为满足 } E \text{ 的集合}\}$$

存在。那么 $M = \{x \mid (x\text{为集合}) \wedge (x \notin x)\}$ 为一个类，而不是集合。于是 Russell 悖论就不会发生。[10]

此外，我们需要一个分离公理来推出我们已经多次使用过的事实：对每个集合 E 与关于集合的性质 E，

$$\{x \mid (x \in X) \wedge E(x)\} =: \{x \in X \mid E(x)\}\text{为集合}$$

对于这些问题更详尽的讨论，我们推荐去读 Ulf Friedrichsdorf 和 Alexander Prestel 的《Mengenlehre für den Mathematiker》。

Dedekind 的研究表明，为了在公理化集合论的框架中证明自然数的存在性，我们需要无穷公理 *(Infinity axiom)*：归纳集存在。这里归纳集 *(Inductive set)* 指的是一个集合 N，它包含空集 $\varnothing$，而且对所有 $z \in N$，$z \cup \{z\}$ 也在 N 中。考虑集合

$$\mathbb{N} := \bigcap \{m \mid m\text{为归纳集}\}$$

[11] 与映射 $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，$z \mapsto z \cup \{z\}$。最后，取 $0 := \varnothing$。于是就可以发现 $\mathbb{N}$ 自己为归纳集，且 $(\mathbb{N}, 0, \nu)$ 满足 Peano 公理。因此 $(\mathbb{N}, 0, \nu)$ 为自然数的模型。

现在我们设 $(\mathbb{N}', 0', \nu')$ 为其它的自然数的模型。那么，在集合论的框架中，可以发现存在一个双射 $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$ 使得 $\varphi(0) = 0'$ 且 $\varphi \circ \nu = \nu' \circ \varphi$，也就是，$\varphi$ 为从 $(\mathbb{N}, 0, \nu)$ 到 $(\mathbb{N}', 0', \nu')$ 的同构 *(Isomorphism)*。因此，自然数系在同构意义下是唯一的。因此我们讲“**the** natural numbers”是有意义的。对于证明和细节，你仍然可以阅读我们刚才推荐的书。

(b) 在前面的笔记中，我们将讨论限制在了 *von Neumann-Bernays-Gödel(NBG)* 公理系统中，它以类的概念为中心。然而这一概念事实上是可以完全避开的。比如，同样流行的 *Zermelo-Fraenkel* 集合论与选择公理 *(The axiom of choice)(ZFC)* 无需这一概念。幸运的是，可以发现两种公理系统在某种意义上说是等价的，因为在两种系统中，同一个关于集合的陈述均是可证明的。

6.2.4.2 归纳原理

我们已经用过很多次归纳公理 (N_1) 了。不过它的另一种形式也相当方便——良序原理 *(Well ordering principle)*，又称最小数原理。

[10] 你可能不是很理解这些讨论，不过没关系，通俗一点来说就是，对于 Russell 构造的一个新的玩意，我们不认为它是集合，这样就避免了悖论的发生。但它具体是什么呢？你大概需要阅读其它的书籍，这里不过多阐述。

[11] 也就是考虑所有归纳集的交集。

定理 6.1 (良序原理)

自然数集 $\mathbb{N}$ 是良序的 (*Well-ordered*)，即，$\mathbb{N}$ 的每个非空子集均有最小值。

证明 我们采用反证法。假设 $A \subseteq \mathbb{N}$ 非空且没有最小值。取集合

$$B := \{n \in \mathbb{N} \mid n\text{为 } A \text{ 的下界}\}$$

显然 $0 \in B$。现假设 $n \in B$。因为 A 没有最小值，所以 n 不会在 A 中，所以我们有，$a > n, \forall a \in A$。这就推出了 $a \geq n+1, \forall a \in A$，即，$n+1 \in B$。那么由归纳公理 N_1 我们有 $B = \mathbb{N}$。但这就指出了 $A = \varnothing$。因为如果 $m \in A$，那么 $m \in \mathbb{N} = B$，也就是说 m 为 A 的下界进而为 A 的最小值，但这与 A 的假设矛盾。所以非空的 A 必然有最小值。

它的直接推论是

推论 6.4

若 $T \cap \mathbb{N} \neq \varnothing$，则 T 中有最小自然数。

证明留作习题。

以及我们可以稍微将数学归纳法稍微改一下：

命题 6.12 (不从头开始的归纳)

设 $n_0 \in \mathbb{N}$，$\mathcal{A}(n)$ 为关于自然数 n 的命题。若

(i) $\mathcal{A}(n_0)$ 为真。

(ii) 对 $\forall n \geq n_0$，$\mathcal{A}(n)$ 为真可推出 $\mathcal{A}(n+1)$ 为真。

则 $\mathcal{A}(n)$ 对所有 $n \geq n_0$ 均为真。

证明留作习题。

于是接下来我们举一些归纳法的例子，以下的例子都默认你熟悉了几种归纳法（我们在习题中提过）。

例题 6.15 设 $\circledast$ 为集合 X 上的结合的运算。那么由 $\circledast$，X 中的元素，括号构成的有意义的表达式的值，与括号的位置无关。比如说：

$$(a_1 \circledast a_2) \circledast (a_3 \circledast a_4) = ((a_1 \circledast a_2) \circledast a_3) \circledast a_4 = a_1 \circledast (a_2 \circledast (a_3 \circledast a_4))$$

证明 我们用 K_n 来表示长度为 n 的表达式，即，一个由 n 个元素 $a_1, \cdots, a_n \in X$（要按顺序），$n-1$ 个运算符 $\circledast$ 和任意数量的括号（正确放置的）组成的表达式。比如说

$$K_7 := ((a_1 \circledast a_2) \circledast (a_3 \circledast a_4)) \circledast ((a_5 \circledast (a_6 \circledast a_7)))$$

当然这只是 K_7 的一种情况。我们归纳证明：

$$K_n = (((\cdots(a_1 \circledast a_2) \circledast a_3) \circledast \cdots) \circledast a_{n-1}) \circledast a_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

对 $n=3$，由结合律的定义，命题成立。现假设

$$K_k = ((\cdots((a_1 \circledast a_2) \circledast a_3) \circledast \cdots) \circledast a_{k-1}) \circledast a_k$$

对所有长度为 k 的表达式 K_k 成立，且 $3 \leq k \leq n$。

那么对 K_{n+1}。存在 $l, m \in \mathbb{N}^{\times}$ 满足 $l+m = n+1$ 且 $K_{n=1} = K_l \circledast K_m$。于是有两种情况：

Case 1：$m=1$，则 $l=n$，$K_m=a_{n+1}$，那么由归纳假设，

$$K_l=(\cdots((a_1\circledast a_2)\circledast a_3)\cdots)\circledast a_n$$

于是

$$K_{n+1}=K_l\circledast a_{n+1}=((\cdots((a_1\circledast a_2)\circledast a_3)\circledast\cdots)\circledast a_n)\circledast a_{n+1}$$

Case 2：$m>1$，则由归纳假设，$K_m=K_{m-1}\circledast a_{n+1}$。所以

$$K_{n+1}=K_l\circledast(K_{m-1}\circledast a_{n+1})=(K_l\circledast K_{m-1})\circledast a_{n+1}$$

而 $K_l\circledast K_{m-1}$ 为长度为 n 的表达式，因此由归纳假设，

$$K_l\circledast K_{m-1}=(\cdots((a_1\circledast a_2)\circledast a_3)\circledast\cdots)\circledast a_n$$

这就推出了

$$K_{n+1}=((\cdots((a_1\circledast a_2)\circledast a_3)\circledast\cdots)\circledast a_n)\circledast a_{n+1}$$

于是就完成了证明。

注 这个结论的重要意义在于对于同种结合的运算，我们可以将其表达式中的所有括号去掉，用这样一个新的表达式来表示相应的值。这当然是合理的，因为大家值都一样。比如 K_4 可以记作 $a_1\circledast a_2\circledast a_3\circledast a_4$，它的值为 $((a_1\circledast a_2)\circledast a_3)\circledast a_4$，当然它的计算顺序可以是任意的，反正你怎么算都会算出来这个值。

你可能注意到在这份证明里面我们出现了 $k-1$, $m-1$ 这种涉及减法的表达式。但我们还没有定义减法，因此此时仅做记号用，表示 k 和 m 的前一个数。

然后我们再重新说说递归定义。

命题 6.13 (递归定义 II)

设 X 为非空集合，$a\in X$。对每个 $n\in\mathbb{N}^\times$，设有映射 $V_n:X^n\to X$。那么存在唯一一个映射 $f:\mathbb{N}\to X$ 满足如下性质：

(i) $f(0)=a$。

(ii) $f(n+1)=V_{n+1}(f(0),f(1),\cdots,f(n))$, $n\in\mathbb{N}$。

证明 我们先证明唯一性。

设有两个映射 $f,g:\mathbb{N}\to X$ 满足 $f(0)=g(0)=a$ 且

$$f(n+1)=V_{n+1}(f(0),\cdots,f(n)),$$
$$g(n+1)=V_{n+1}(g(0),\cdots,g(n)),$$

对任意 $n\in\mathbb{N}$ 成立。我们想要证明 $f=g$，也就是，$f(n)=g(n)$, $n\in\mathbb{N}$。

首先 $n=0$ 时，$f(0)=g(0)$，这是条件，所以成立。

假设 $f(k)=g(k)$ 对 $0\le k\le n$ 成立。由上式可知 $f(n+1)=g(n+1)$。于是由强归纳法原理，$f(n)=g(n)$ 对所有 $n\in\mathbb{N}$ 成立，即，$f=g$。

接下来证明存在性。

我们首先断言，对于每个 $n\in\mathbb{N}$，存在函数 $f_n:\{0,1,\cdots,n\}\to X$ 满足

$$\begin{aligned} f_n(0)&=a, \\ f_n(k)&=f_k(k), \quad 0\le k<n \\ f_n(k+1)&=V_{k+1}(f_n(0),\cdots,f_n(k)), \end{aligned}$$

证明这个断言仍然用到归纳。显然断言对 $n=0$ 是成立的，因为满足条件的 k 不存在。为了进行

从 n 到 $n+1$ 的归纳，我们令

$$f_{n+1}(k) := \begin{cases} f_n(k), & 0 \leq k \leq n \\ V_{n+1}(f_n(0), \cdots, f_n(n)), & k = n+1 \end{cases}$$

假设 f_n 满足断言的条件，那么由归纳假设，有

$$f_{n+1}(k) = f_n(k) = f_k(k),\ k \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq n$$

且我们有

$$\begin{aligned} f_{n+1}(k+1) = f_n(k+1) &= V_{k+1}(f_n(0), \cdots, f_n(k)) \\ &= V_{k+1}(f_{n+1}(0), \cdots, f_{n+1}(k)) \end{aligned}$$

对 $0 < k+1 \leq n$ 成立。而当 $k+1 = n+1$ 时，我们有

$$f_{n+1}(n+1) = V_{n+1}(f_n(0), \cdots, f_n(n)) = V_{n+1}(f_{n+1}(0), \cdots, f_{n+1}(n))$$

于是 f_{n+1} 满足断言的条件。从而断言成立。

于是我们再考虑 $f : \mathbb{N} \to X$，定义其为：

$$f : \mathbb{N} \to X, \quad f(n) := \begin{cases} a, & n = 0 \\ f_n(n), & n \in \mathbb{N}^{\times} \end{cases}$$

由 f_n 的性质，我们有

$$\begin{aligned} f(n+1) = f_{n+1}(n+1) &= V_{n+1}(f_{n+1}(0), \cdots, f_{n+1}(n)) \\ &= V_{n+1}(f_0(0), \cdots, f_n(n)) \\ &= V_{n+1}(f(0), \cdots, f(n)) \end{aligned}$$

这就完成了证明。

你可能有点疑惑，我们是怎么想到在存在性的证明里面构造 $f_1, \cdots, f_n$ 的。这是因为，f 直接用 $V_1, \cdots, V_n, a$ 表示非常之麻烦，因此我们考虑间接构造函数 $f_1, \cdots, f_n$ 来表示 f 在相应 n 处的值，并且考虑以归纳法来证明 f_n 的存在性。你可以想想为什么 f_n 选取了那些性质。

例题 6.16 设 $\odot$ 为集合 X 上的一个结合的运算，$x_k \in X$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。对每个 $n \in \mathbb{N}$，定义

$$\bigodot_{k=0}^{n} x_k := x_0 \odot x_1 \odot \cdots \odot x_n \tag{6.1}$$

然而这个记号并不完整，因为我们并没有解释右边的“$\cdots$”是什么意思。此时我们可以用刚才的递归定义来解释这一定义。

对 $n \in \mathbb{N}^{\times}$，令

$$V_n : X^n \to X, \quad (y_0, \cdots, y_{n-1}) \mapsto y_{n-1} \odot x_n$$

由命题 6.13，存在唯一一个映射 $f : \mathbb{N} \to X$ 满足 $f(0) = x_0$ 且

$$f(n) = V_n(f(0), \cdots, f(n-1)) = f(n-1) \odot x_n, \quad n \in \mathbb{N}^{\times}$$

那么现在记 $f(n)$ 为 $\bigodot_{k=0}^{n} x_k$，就有：

$$\bigodot_{k=0}^{0} x_k = x_0, \quad \bigodot_{k=0}^{n} x_k = \bigodot_{k=0}^{n-1} x_k \odot x_n, \quad n \in \mathbb{N}^{\times}$$

这样就得到了式 (6.1)。

特别地，如果这个运算是 $+$ 或 $\times$，一般我们把相应的 $f(n)$ 写成

$$\sum_{k=0}^{n} x_k := x_0 + x_1 + \cdots + x_n \qquad \prod_{k=0}^{n} x_k := x_0 \times x_1 \times \cdots \times x_n$$

不过值得注意的是，运算不一定是交换的，所以元素间的排列顺序十分重要。关于 $\sum$ 和 $\prod$ 的性质，我们会在第一章第五节详细讨论。

现在我们再介绍递归定义的一种更深入的用法：

例题 6.17 设有非空集合 X 与其上的一个结合的运算 $\circledast$，且有单位元 e。对 $a \in X$，定义

$$a^0 := e, \quad a^{n+1} := a^n \circledast a, \quad n \in \mathbb{N}$$

由命题 6.13，这就给出了对所有 $n \in \mathbb{N}$，a^n 的定义，即 a 的 n 次幂。显然，$a^1 = a$，以及

$$e^n = e, \quad a^n \circledast a^m = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = a^{nm}, \quad n, m \in \mathbb{N} \tag{6.2}$$

若 a 和 b 交换 (*Commute*)，即，$a \circledast b = b \circledast a$，那么

$$a^n \circledast b^n = (a \circledast b)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

如果这个（结合的）运算是交换的，我们可以选择用 $+$ 来表示它，此时单位元通常记为 0_X 或更简单地，0。这不会引起混淆。

在这种情况下，我们递归地定义

$$0 \cdot x := 0_X, \quad (n+1) \cdot a := (n \cdot a) + a, \quad n \in \mathbb{N},\ a \in X$$

且称 $n \cdot a$ 为 n 乘 a。那么

$$n \cdot a = \sum_{k=1}^{n} a := \underbrace{a + \cdots + a}_{n\text{项}}, \quad n \in \mathbb{N}^{\times}$$

那么式 (6.2) 就变成了

$$n \cdot 0_X = 0_X, \quad n \cdot a + m \cdot a = (n+m) \cdot a, \quad m \cdot (n \cdot a) = (mn) \cdot a$$

且

$$n \cdot a + n \cdot b = n \cdot (a + b)$$

对 $a, b \in X$ 与 $m, n \in \mathbb{N}$ 成立。

里面的等式留给你去验证。

注 你很容易发现一开始我们介绍的是指数运算，此时也较具体地介绍了一点性质。但你要注意的是，此时我们的指数运算是建立在一个抽象集合和抽象运算上的。也就是说，这里的 X 可以换为 $\mathbb{N}$，也可以换为 $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$。这一点十分重要。不过此时你可能对抽象的运算不太敏感，当你在后面接触了线性空间和群环域的时候，你会经常与抽象运算打交道。

最后我们再介绍一个非常常用的一个函数：

例题 6.18 定义一个映射 $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n!$，称为阶乘函数 (*Factorial function*)。这里 $n!$ 递归地定义为：

$$0! := 1, \quad (n+1)! := (n+1)n!, \quad n \in \mathbb{N}$$

这当然是定义合理的。很容易发现 $n!$ 也可以写为 $\prod_{k=1}^{n} k$。值得注意的是 $n!$ 的大小增长非常快：

$$
\begin{aligned}
&0! = 1,\ 1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 6,\ 4! = 24\\
&\cdots\\
&100! > 9 \cdot 9 \cdot 10^{157}\\
&1000! > 4 \cdot 10^{2567}\\
&10000! > 2 \cdot 10^{35659}
\end{aligned}
$$

之后我们大概会讲一下如何去估计这个快速的增长。

6.3 实数的构造与公理化

6.3.1 整数与有理数

众所周知，我们认识数的顺序是：

$$\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$$

因此在介绍实数之前，我们需要先完善我们对于整数和有理数的认识。

首先是整数。

6.3.1.1 整数的构造

如何定义整数？我们已经有了自然数，那么自然地想到用自然数去构造整数。那么如何将整数与自然数联系起来呢？注意，此时我们尚且没有整数这种东西，因此我们是先利用自然数定义出一种新东西，然后将其称为整数，并验证其具有我们认知中的性质，从而验证整数的存在合理性。

首先，在我们认知中，零当然是一个整数，所以我们应当基于自然数的零来构造整数的零。但这种构造方式我们目前还没有任何灵感，直接将二者等同起来的合理性还不好说，毕竟我们还不知道其它整数是什么样的。

然后，在我们认知中，有正整数这么一种东西，它和正自然数是一致的，我们也可以选择直接将其对应起来，但这是否合理还尚不可知。

最后，在我们认知中，还有负整数这种东西。这是最棘手的部分。你会认为负整数无非是正整数添个负号，但我们尚且没有负号这种东西。因此我们得换个方式。我们知道，自然数不仅是数，也可以拿来衡量数间的大小关系。比如，我们可以使用 2 和 6 来定义 -4 和 4（还是那句话，此时我们还没有负整数，因此 -4 不是一个严谨的记号，而这里的 4 和 -4 都是整数，并非自然数，我们此时不能不负责任地认为二者是一回事。），那么什么时候是 -4，什么时候是 4 呢？你可以规定，如果前面那个自然数比后面的自然数小，则指代的是负整数，反之则为正整数。当然，这个规定是不必要的，因为我们等会的定义自然蕴含了这一条性质。

那么利用这个思想，我们可以把整数表示为有序自然数对，例如 -3 表示为 $(1,4)$，2 表示为 $(5,3)$。但你很容易看出一个新的问题，就是一个整数似乎有无限多种有序自然数对的表示方式，比如 2 可以表示为 $(2,0)$，也可以表示为 $(3,1)$，$(4,2)$，$(5,3)$ 等等。所以整数当然不能直接等同于 $\mathbb{N}^2$，即全体二元有序自然数对。这二者不是同构的。那么我们怎么办呢？注意到我们刚才列举的自然数对事实上在

对应整数的意义下是等价的，比如 $(2,0)$ 和 $(3,1)$ 其实是一回事，因此这样隐含的等价关系所确定的等价类和整数是一一对应的。那么这种等价关系是什么呢？你注意到，如果一个整数 z[12]可以用自然数对 (n_1,n_2) 来表示，那么在我们以往的认知中，应当有关系

$$z = n_1 - n_2 \tag{6.3}$$

减号当然也是一种类似于脚手架的东西。此外，z 当然也可以用其它的自然数对来表示，比如 (m_1,m_2)，那么也有

$$z = m_1 - m_2 \tag{6.4}$$

从而结合两个式子，我们有：

$$n_1 - n_2 = m_1 - m_2 \Rightarrow n_1 + m_2 = n_2 + m_1 \tag{6.5}$$

注意到变形后的方程是有意义的，因为自然数的加法是我们所承认的，因此我们可以将这个式子作为这个等价关系的描述方式。

定义 6.24 (整数)

在 $\mathbb{N}^2 = \{(n_1,n_2) \mid n_1,n_2 \in \mathbb{N}\}$ 上定义等价关系 $\sim$ 为

$$(n_1,n_2) \sim (m_1,m_2) :\Leftrightarrow n_1 + m_2 = n_2 + m_1 \tag{6.6}$$

记 $\mathbb{Z} := \mathbb{N}^2/\sim$，称为整数集，其中的元素称为整数 (*Integer*)。♣

这样我们就严谨地给出了整数的定义，而一件颇为有趣的事情是，这个定义事实上十分地形象：$\mathbb{N}^2$

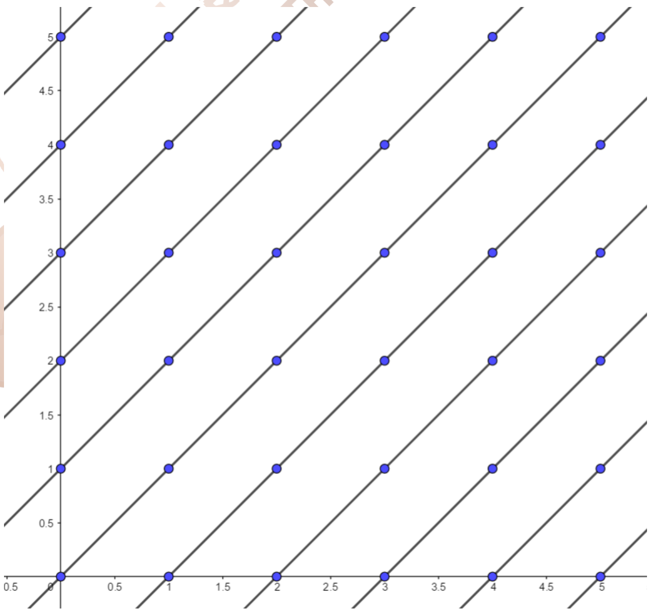


图 6.3: 整数等价类的图示

事实上就是平面直角坐标系的第一象限中所有的整点，你稍加观察就知道，斜率为 1 的平行直线簇就构成了上述等价类，直线上的每一个整点都为其代表元。而直线的纵截距就是我们相应的整数。

当然，我们还未验证这个等价关系的合理性。过程如下：

[12]虽然这个时候我们还没有说明整数的存在性，因此这个行为并不合理，然而它却十分有助于我们的思考。这就像建造建筑时的脚手架，它在你建房子的时候很有用，但你建完房子后可以将其拆卸掉，不影响房子。房子当然和脚手架没有关系，但有了脚手架却能帮你更好地建筑房子。

证明 对 $\forall\,(n_1,n_2)\in\mathbb{N}^2$，显然有 $n_1+n_2=n_2+n_1$，因此 $(n_1,n_2)\sim(n_1,n_2)$，自反性成立。

对 $\forall\,(n_1,n_2),(m_1,m_2)\in\mathbb{N}^2$，有

$$(n_1,n_2)\sim(m_1,m_2)\Leftrightarrow n_1+m_2=n_2+m_1\Leftrightarrow(m_1,m_2)\sim(n_1,n_2)$$

故对称性成立。

对 $\forall\,(n_1,n_2),(m_1,m_2),(r_1,r_2)\in\mathbb{N}^2$，若 $(n_1,n_2)\sim(m_1,m_2)$，$(m_1,m_2)\sim(r_1,r_2)$，则

$$n_1+m_2=n_2+m_1,\ m_1+r_2=m_2+r_1$$

因此

$$m_1+n_2+r_1=n_1+m_2+r_1=n_1+r_2+m_1$$

然后根据我们自然数的消去律，两边可以消去一个 m_1，于是就有

$$n_1+r_2=n_2+r_1\Rightarrow(n_1,n_2)\sim(r_1,r_2)$$

从而传递性成立。

因此 $\sim$ 是 $\mathbb{N}^2$ 上的等价关系。

注意这里自然数的消去律起到了怎样的作用，它保证了传递性的成立。

为了符号的简洁起见，我们以下都不使用等价类的记号，而是使用代表元的记号。接着我们基于整数定义来定义整数上的加法和乘法。

假设两个整数 $a=(m_1,m_2)$，$b=(n_1,n_2)$，那么我们实际上知道 $a=m_1-m_2$，$b=n_1-n_2$，于是

$$a+b=m_1-m_2+n_1-n_2=(m_1+n_1)-(m_2+n_2)=(m_1+n_1,m_2+n_2)$$

$$ab=(m_1-m_2)(n_1-n_2)=(m_1n_1+m_2n_2)-(m_1n_2+m_2n_1)=(m_1n_1+m_2n_2,m_1n_2+m_2n_1)$$

这就是我们定义整数上加法与乘法的依据。

定义 6.25 (整数的加法与乘法)

设 $(n_1,n_2),(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}$，定义二者的加法与乘法为：

$$(n_1,n_2)+(m_1,m_2):=(n_1+m_1,n_2+m_2)\tag{6.7}$$

$$(n_1,n_2)\times(m_1,m_2):=(n_1m_1+n_2m_2,n_1m_2+n_2m_1)\tag{6.8}$$

♣

于是作为例子，$(2,1)\times(3,2)=(8,7)$，这很合理。当然，$a\times b$ 也同样地简写为 ab。我们也可以定义 $z++:=z+1$，但显然我们几乎不再需要这个概念。

显然新定义的运算是封闭的，因此作为运算来讲这是定义合理的。但仍然可能存在问题的是，这个定义，从等价类的角度，可能并不合理。任何一个借助等价类定义的概念都必须验证其是良定义 (*Well-defined*)，也就是说，你定义的对象必不依赖于代表元的选取，从同一个等价类选取任意的代表元都将得到一致的结果。

定理 6.2

上述定义的整数的加法与乘法是良定义的。

♡

证明 设 $(n_1,n_2)\sim(n_1',n_2')$，$(m_1,m_2)\sim(m_1',m_2')$。要证

$$(n_1,n_2)+(m_1,m_2)\sim(n_1',n_2')+(m_1',m_2')$$

$$(n_1,n_2)\times(m_1,m_2)\sim(n_1',n_2')\times(m_1',m_2')$$

由条件，$n_1+n_2'=n_2+n_1'$, $m_1+m_2'=m_2+m_1'$，于是两式相加，得

$$n_1+m_1+n_2'+m_2'=n_2+m_2+n_1'+m_1'$$

即

$$(n_1+m_1,n_1'+m_1')\sim(n_2+m_2,n_2'+m_2')$$

因此加法是良定义的。

乘式则略有技巧性。由条件，两式相乘得：

$$(n_1+n_2')(m_1+m_2')=(n_2+n_1')(m_2'+m_1')$$

在两式两边乘 2，再由 $2(n_1+n_2')=n_1+n_2+n_1'+n_2'$, $2(m_1+m_2')=m_1+m_2+m_1'+m_2'$ 可得：

$$(n_1+n_2+n_1'+n_2')(m_1+m_2')=(n_2+n_1')(m_1+m_2+m_1'+m_2')$$

$$(n_1+n_1')(m_1+m_2')+(n_2+n_2')(m_2+m_1')=(n_1+n_2')(m_2+m_2')+(n_2+n_1')(m_1+m_1')$$

展开，得

$$\begin{aligned}&n_1m_1+n_2m_2+n_1'm_2'+n_2'm_1'+n_1'm_1+n_1m_2'+n_2'm_2+n_2m_1'\\=&\,n_1m_2+n_2m_1+n_2'm_2'+n_1'm_1'+n_1'm_1+n_2m_1'+n_2'm_2+n_1m_2'\end{aligned}$$

由消去律得

$$n_1m_1+n_2m_2+n_1'm_2'+n_2'm_1'=n_1m_2+n_2m_1+n_2'm_2'+n_1'm_1'$$

即

$$(n_1m_1+n_2m_2,n_1m_2+n_2m_1)\sim(n_1'm_1'+n_2'm_2',n_1'm_2'+n_2'm_1')$$

于是乘法也良定义。

这样我们就在整数上定义了加法与乘法。显然 $(0,0)$ 所代表的整数为加法单位元，$(1,0)$ 所代表的整数为乘法单位元。

此外你很容易注意到一件事情，考虑代表元的时候，$(n,0)$ 与 $(0,n)$ 形式是最为简洁的。因此，当我们需要验证整数的运算的时候，我们当然会选取这样的代表元，它可以极大地方便我们的计算。(虽然到后面我们并不需要如此繁琐地使用这种记号，你可以直接按你学过的来。)

于是我们干脆考虑 $\mathbb{N}^2$ 的子集 $\{(m,n)\mid(m=0)\vee(n=0)\}$，容易发现这个子集和 $\mathbb{Z}$ 是同构的，只要你把相应的等价类与这个代表元对应起来。于是当我们对整数做运算的时候，其实我们是在对相应的代表元做运算。

此外，我们可以引入新的记号：

定义 6.26 (整数的记号)

设 n 为正自然数。若一个整数的代表元为 $(n,0)$，则称其为正整数 *(Positive integer)*，记为 n；若一个整数的代表元为 $(0,n)$，则称其为负整数 *(Negative integer)*，记为 $-n$；若一个整数的代表元为 $(0,0)$，则称其为零 *(Zero)*，记为 0。♣

注 当然你也可以定义一个整数 (m,n) 为正整数当且仅当 $m>n$，负整数当且仅当 $m<n$。这两个定义是等价的。这里你得注意到如果等价类有一个代表元 (m,n) 满足 $m>n$，那么这个等价类里面所有的代表元都满足 $m>n$。

如此定义的记号当然也是合理的。所有整数都有相应的记号，每一个记号所指代的整数当然也是

不一致的。这一点我们在后面证明。

而这种记号所执行的运算也更为简便：

$$
\begin{aligned}
n+m &= (n,0)+(m,0)=(n+m,0+0)=n+m \\
n\times m &= (n,0)\times(m,0)=(nm+0,n0+0m)=nm
\end{aligned}
$$

这里 n,m 均为正整数。对于零或负整数是类似的。

此外，你很容易看见一种特殊情况：

$$n+(-n)=(n,0)+(0,n)=(n,n)=0$$

也就是说，适当地选取一个正整数和一个负整数做加法可以得到零。这样的两个数当然比较特殊，我们对它们有特别的昵称：

定义 6.27 (相反数)

若整数 m,n 满足

$$m+n=n+m=0$$

则我们称 m,n 互为相反数 (*Opposite*)。♣

事实上由整数加法的代数性质[13]，$m+n=n+m$，因此 $m+n=0$ 或者 $n+m=0$ 均可推出相反数关系。

定理 6.3

任意整数的相反数存在且唯一。♡

证明 存在性：

对任意整数 z，设其代表元为 (m,n)，取 $y=(n,m)$，有

$$
\begin{aligned}
z+y &= (m,n)+(n,m)=(m+n,n+m)=0 \\
y+z &= (n,m)+(m,n)=(n+m,m+n)=0
\end{aligned}
$$

于是按定义，y 为 z 的相反数。从而相反数存在。

唯一性：

不妨设整数 x 有相反数 y_1,y_2，则按定义，有：

$$
\begin{aligned}
x+y_1 &= y_1+x=0 \\
x+y_2 &= y_2+x=0
\end{aligned}
$$

于是

$$y_1=y_1+0=y_1+(x+y_2)=(y_1+x)+y_2=0+y_2=y_2$$

故相反数是唯一的。

这里我们不加说明地使用了结合律（这个行为是合理的）。从而我们可以将任何一个整数 z 的相反数记为 $-z$，而不引起混淆与出错。即对 $z=(m,n)$，定义 $-z=(n,m)$，则它们互为相反数。特别地，0 的相反数是 0。而且相反数也是良定义的，也就是说，当一个整数使用两种不同的有序自然数对表示时，相应的相反数的有序自然数对也是等价的，从而表示同一个整数。

[13]这条性质在后面指出，但是它和这个定义没有关系，所以我们可以引用它而不造成循环论证。

注 事实上一个更广泛的概念是加法逆 (*Additive inverse*)，它指的是对于一个抽象集合 X 上的加法，若对于 $x \in X$，存在一个元素 y 满足

$$x + y = y + x = e$$

这里 e 为加法单位元，则称 y 为 x 的加法逆。这个定理对抽象的加法同样适用。我们会在第十二章详细叙述这样的元素。

以及，我们有：

定理 6.4 (整数的三歧性)

整数具有三歧性 (*Trichofomy*)，即：对任意整数 z，z 要么是一个正整数，要么是一个负整数，要么为零，且恰为其一。

证明 设 z 为一个整数，z 的一个代表元为 (m, n)。

由自然数的序的三歧性，$m > n, m = n, m < n$ 三者必且只居其一。

若 $m > n$，则存在正自然数 a 使得 $m = n + a$，于是 $(m, n) = (n + a, n) \sim (a, 0)$，因此 $(a, 0)$ 为其代表元，从而 z 为正整数。

若 $m < n$，则存在正自然数 a 使得 $n = m + a$，于是 $(m, n) = (m, m + a) \sim (0, a)$，因此 $(0, a)$ 为其代表元，从而 z 为负整数。

若 $m = n$，则 $(m, n) \sim (0, 0)$，于是 z 为零。

注意到三者两两不同时成立，因此 z 不同时为任何二者。

因此任意整数都可以被归为正整数、负整数、零三种，进而可以表示为 $(n, 0) =: n, (0, n) := -n, (0, 0) =: 0$ 这三种记号。

而你学过的关于整数的代数算律也是成立的。

命题 6.14 (整数的代数算律)

设 a, b, c 为三个整数，则

1. $a + b = b + a$
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. $a + 0 = 0 + a = a$
4. $a + (-a) = (-a) + a = 0$
5. $a \times b = b \times a$
6. $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
7. $a \times 1 = 1 \times a = a$
8. $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$

这个证明是容易的，你可以自行验证，留作习题。

在说清楚整数的加法和乘法之后，我们可以进而定义减法：

定义 6.28 (整数的减法)

设 a, b 为整数，定义两个数的减法 (*Subtraction*) 为

$$a - b := a + (-b)$$

结果称为差 (*Difference*)。

这个新定义的运算当然是良定义的，因为这个定义依赖于我们先前的整数加法与相反数，这两者的定义是完善的。

我们一开始的整数定义和自然数并不是包含关系，也就是说，自然数并不是整数的子集，这样当然会对我们带来许多困扰。至少它和我们的认知是不相容的。因此方便起见，既然 $\mathbb{N}$ 和 $\{(m,0) \mid m \in \mathbb{N}\}$ 是同构的，在同构意义下后者当然也是自然数，这样自然数就是整数的子集，并且我们使用我们已有的记号去表示这样的自然数，例如 $1 := (1,0), 2 := (2,0)$。于是对于自然数 m, n，我们看到：

$$m - n = m + (-n) = (m,0) + (0,n) = (m,n)$$

这样我们的任何一个整数都可以表示为两个自然数之差，几何来看，我们不需要提前排序就可以描述两个数的大小关系了，从它们的差值我们就能知道谁大，大多少。当然，另外一个好处是我们可以抛弃符号 (m,n)，转而以 $m-n$ 去表示了。这一定程度上拓展了定义 6.26。

这样我们似乎对整数也没有什么问题了，当我们提及整数的时候，我们会想到正整数、负整数、零，并且知道如此分类是合理而简便的。我们知道整数上有加法和乘法，还有减法，由于减法始终可以转化为加法，所以我们可以基于加法的代数算律就可以推出减法的代数算律：

命题 6.15 (减法的代数算律)

设 a, b, c 为整数，则

1. $a - b = -(b - a)$
2. $(a - b) - c = a - (b + c)$
3. $a - 0 = a$
4. $(a - b) \times c = a \times c - b \times c$

虽然你基于以往的经验来看，减法执行起来比加法还是复杂一些，拓展这些等式可能略显复杂。但证明这些简单的等式的思想仍然可以指导你去化简更为复杂的等式。

证明 按定义，$a - b + b - a = a + (-b) + b + (-a) = a + (-a) = 0$，于是 $a - b$ 和 $b - a$ 互为相反数。

同理，$(a-b)-c = a+(-b)+(-c)$，只需证 $-(b+c) = (-b)+(-c)$，也就是 $b+c+(-b)+(-c) = 0$，这自然是显然的。

$a - 0 = a + (-0) = a + 0 = a$

$(a - b) \times c = (a + (-b)) \times c = a \times c + (-b) \times c$，那么无非证明 $(-b) \times c = -(b \times c)$，同样由乘法分配律，$(-b) \times c + b \times c = (-b + b) \times c = 0 \times c = 0$，故等式成立。

此外，整数还有一些性质，这也是你熟知的。这些我们都作为习题。

命题 6.16 (整数无零因子)

设 a, b 为整数。若 $ab = 0$，则 $a = 0$ 或 $b = 0$ 或二者均为零。

命题 6.17 (乘法消去律)

设 a, b, c 为整数，若 $ac = bc$ 且 $c \neq 0$，则 $a = b$。

乘法消去律同样允许我们去做所谓“虚拟除法”，它和加法消去律的地位是相当的。

接着我们可以定义整数的绝对值。

定义 6.29 (整数的绝对值)

设 z 为整数，我们定义 z 的绝对值 (*Absolute value*) 为

$$|z| = \begin{cases} z, & 若n为正整数 \\ 0, & 若n为零 \\ -z, & 若n为负整数 \end{cases}$$

按定义，z 的绝对值 $|z|$ 必然是非负整数。不过关于更详尽的事情，我们需要先完善整数上的序结构。

定义 6.30 (整数的序)

我们在集合 $\mathbb{Z}$ 上定义关系 $\leq$ 为：

$$m \leq n :\Leftrightarrow \exists\, a \in \mathbb{N},\ n = m + a$$

则 $\leq$ 为 $\mathbb{Z}$ 上的非严格偏序。

这个定义和自然数的序几乎是一模一样的，所以它们当然也可以相容得很好。相应的严格偏序也可以由 $m < n :\Leftrightarrow m \leq n, m \neq n$ 给出，这也是很自然的。

当然，这个定义也是合理的，你可以类似验证它逐条满足自反、传递、反对称。你可以试着去证明接下来对于整数序列举的更多性质，留作习题。

命题 6.18 (整数的序的基本性质)

设 a, b, c 为整数，则

1. （自反性）$a \leq a$。
2. （传递性）若 $a \leq b$，$b \leq c$，则 $a \leq c$。
3. （反对称性）若 $a \leq b$，$b \leq a$，则 $a = b$。
4. （三歧性）$a > b$，$a = b$，$a < b$ 恰有一个成立。
5. （加法保序性）若 $a \leq b$，则 $a + c \leq b + c$。
6. （正乘法保序性）若 $a \leq b$，c 是正整数，则 $ac \leq bc$。
7. （相反数反序）若 $a \leq b$，则 $-a \geq -b$。
8. $a > b$ 当且仅当 $a - b$ 为正自然数。

所以你就知道了你之前学过的对整数的序的认知是正确的。现在我们给出一些等价的表述，比方说

推论 6.5

考虑整数 z，z 是正整数等价于 $z > 0$，z 是负整数等价于 $z < 0$。

推论 6.6

设 z 为整数，则

1. $|z| \geq 0$。
2. $|z| \geq \pm z$，进而 $z = \frac{|z|+z}{2} - \frac{|z|-z}{2}$ 给出了整数分解为两个正整数的一个手段。

当然这两个推论都是很 trivial 的东西，我们也不作为习题，没有必要。值得一提的是推论 6.6 的第

二条，之后有些地方我们会派上用场。

以及更重要的是，绝对值满足如下的性质：

定理 6.5

设 a, b 为整数，则

1. $|ab| = |a||b|$。
2. $||a| - |b|| \le |a \pm b| \le |a| + |b|$

特别地，2 的不等式称为绝对值不等式，具有广泛的应用。虽然这个时候的不等式还是 $\mathbb{Z}$ 上的，但大家懂得都懂。这当然对于 $\mathbb{R}$ 也是成立的。

6.3.1.2 有理数的构造

我们很熟悉加减乘除四种运算，也认为减法是加法的逆运算，除法是乘法的逆运算。但减法在自然数集 $\mathbb{N}$ 上不封闭，所以我们把 $\mathbb{N}$ 扩展为 $\mathbb{Z}$，这样减法得以合理化。但 $\mathbb{Z}$ 对除法也不是封闭的，所以我们需要将 $\mathbb{Z}$ 扩展为 $\mathbb{Q}$。

你可能会想到，所谓有理数，就是两个整数相除得到的数。但这个想法是有问题的，我们尚且没有定义除法，自然不能借助除法去定义新的东西。但恰如我们定义整数时采取的手段，我们可以故技重施。

首先我们知道有理数一定可以表示成分数的样子。（即使我们还没有验证它是对的）那么基于这一点，假设一个有理数 q 可以表示为 $\frac{a}{b}$，也可以表示为 $\frac{c}{d}$，这里 a, b, c, d 均为整数，那么自然有

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc \tag{6.9}$$

这就是我们要找的 $\mathbb{Z}$ 上的等价关系。

定义 6.31 (有理数)

在 $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) = \{(z_1.z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbb{Z}, z_2 \neq 0\}$ 上定义等价关系 $\sim$ 为

$$(z_1, z_2) \sim (w_1, w_2) :\Leftrightarrow z_1 w_2 = z_2 w_1 \tag{6.10}$$

记 $\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))/\sim$，称为有理数集，其中的元素称为有理数 *(Rational number)*。

同样你可以将其具象化：如果两个数对表示同一个有理数，那么者两个数到原点的连线应该重合。这是因为数对所指代的有理数实际上是该数对到原点连线的斜率。因此所有这样连线的斜率就构成了有理数。

当然，这个等价关系的合理性也需要验证，但无非是抄一遍过程，几乎没有区别：

证明 对 $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$，显然有 $z_1 z_2 = z_2 z_1$，因此 $(z_1, z_2) \sim (z_1, z_2)$，自反性成立。

对 $\forall (z_1, z_2), (w_1, w_2) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$，有

$$(z_1, z_2) \sim (w_1, w_2) \Leftrightarrow z_1 w_2 = z_2 w_1 \Leftrightarrow (w_1, w_2) \sim (z_1.z_2)$$

故对称性成立。

对 $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2).(z_1.z_2) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$，若 $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$，$(y_1, y_2) \sim (z_1, z_2)$，则

$$x_1 y_2 = x_2 y_1,\ y_1 z_2 = y_2 z_1$$

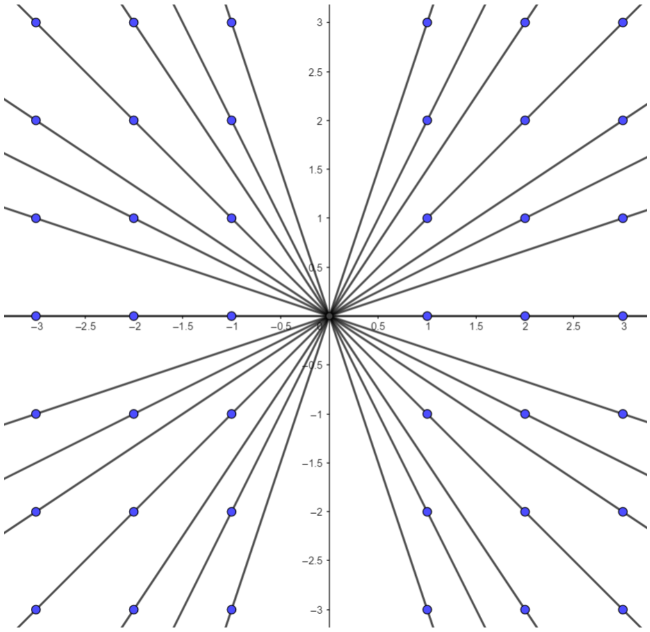


图 6.4: 有理数等价类的图示

因此

$$x_1y_2z_2 = x_2y_1z_2 = x_2y_2z_1$$

于是根据乘法消去律，两边可以约去一个 y_2，从而得到

$$x_1z_2 = x_2z_1 \Rightarrow (x_1, x_2) \sim (z_1, z_2)$$

从而传递性成立。

因此 $\sim$ 是 $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ 上的等价关系。

现在我们来研究一下如何定义有理数上的加法和乘法，并由加法与相反数来定义减法。

假设有两个有理数 $a = (p_1, q_1)$，$b = (p_2, q_2)$，那么我们实际上知道 $a = \frac{p_1}{q_1}$，$b = \frac{p_2}{q_2}$，于是有

$$a + b = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1q_2 + p_2q_1}{q_1q_2} = (p_1q_2 + p_2q_1, q_1q_2)$$

$$ab = \frac{p_1}{q_1}\frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1p_2}{q_1q_2} = (p_1p_2, q_1q_2)$$

这样我们就可以定义有理数的加法与乘法。然后我们可以类似定义有理数 $a = \frac{p}{q}$ 的相反数的概念，并发现其相反数为：

$$-a := \frac{-p}{q}$$

于是我们可以接着定义减法为：

$$a - b = a + (-b) = \frac{p_1}{q_1} + \frac{-p_2}{q_2} = \frac{p_1q_2 - p_2q_1}{q_1q_2} = (p_1q_2 - p_2q_1, q_1q_2)$$

这样就完成了定义，于是我们可以给出：

定义 6.32 (有理数的加法、减法、乘法)

设 $(p_1,q_1),(p_2,q_2)\in\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$，定义二者的加法、乘法为：

$$(p_1,q_1)+(p_2,q_2):=(p_1q_2+p_2q_1,q_1q_2) \tag{6.11}$$

$$(p_1,q_1)\times(p_2,q_2):=(p_1p_2,q_1q_2) \tag{6.12}$$

记有理数 $a=(p,q)$ 的相反数为 $-a=(-p,q)$，定义两个数的减法为：

$$(p_1,q_1)-(p_2,q_2):=(p_1q_2-p_2q_1,q_1q_2) \tag{6.13}$$

♣

同样的，我们需要验证其良定义。

证明 设 $(p_1,q_1)\sim(p_1',q_1')$，$(p_2,q_2)\sim(p_2',q_2')$。要证

$$(p_1,q_1)+(p_2,q_2)\sim(p_1',q_1')+(p_2',q_2')$$

$$(p_1,q_1)\times(p_2,q_2)\sim(p_1',q_1')\times(p_2',q_2')$$

由条件，$p_1q_1'=q_1p_1'$，$p_2q_2'=q_2p_2'$，于是我们有：

$$p_1q_1'q_2q_2'=p_1'q_1q_2q_2',\quad p_2q_2'q_1q_1'=p_2'q_2q_1q_1'$$

从而

$$(p_1q_2+p_2q_1)q_1'q_2'=(p_1'q_2'+p_2'q_1')q_1q_2$$

也即

$$(p_1q_2+p_2q_1,q_1q_2)\sim(p_1'q_2'+p_2'q_1',q_1'q_2')$$

从而加法良定义。

另外由条件，两式相乘得：

$$p_1p_2q_1'q_2'=q_1q_2p_1'p_2'$$

即

$$(p_1p_2,q_1q_2)\sim(p_1'p_2',q_1'q_2')$$

从而乘法良定义。

类似可以验证相反数和减法均是良定义的。

这样我们就完善了加法、减法与乘法在有理数上的定义。显然 $(0,1)$ 所代表的有理数为加法单位元，$(1,1)$ 所代表的有理数为乘法单位元。

正如我们对于自然数与整数所做的，我们也可以把整数嵌入到有理数中，只需要你注意到有理数 $(n,1)$ 和整数 n 是一回事：

$$(m,1)+(n,1)=(m+n,1)$$

$$(m,1)\times(n,1)=(mn,1)$$

$$-(n,1)=(-n,1)$$

而且 $(m,1)=(n,1)$ 当且仅当 $m=n$。因此我们可以自然地把整数 n 与有理数 $(n,1)$ 等同起来，并把后者视为整数，从而实现整数到有理数的嵌入。进而自然数均为有理数。

注意到有理数 $(m,n)=0=(0,1)$ 当且仅当 $m\times1=n\times0=0$ 即 $m=0$，因此若 $m,n\neq0$，则有理数 (m,n) 也不为零。

于是就像我们定义整数的相反数一样，我们也可以定义有理数的倒数。只需要你注意到对于有理数 $(m,n)\neq 0$，有：

$$(m,n)\times(n,m)=(mn,nm)=1$$

这里 (n,m) 当然是合理的，因为 m,n 均不为零。

定义 6.33 (倒数)

若有理数 p,q 满足

$$p\times q=q\times p=1$$

则我们称 p,q 互为倒数 (*Reciprocal*)。♣

当然，由有理数乘法的交换律（虽然我们还没有证明），$p\times q=1$ 或者 $q\times p=1$ 均可推出倒数关系。

定理 6.6

任何非零有理数的倒数存在且唯一。♡

证明 存在性：

对任意非零有理数 q，设其代表元为 (m,n)，则 $m,n\neq 0$。取 $p=(n,m)$，有

$$p\times q=(m,n)\times(n,m)=(mn,nm)=1$$
$$q\times p=(n,m)\times(m,n)=(nm,mn)=1$$

于是按定义，p 为 q 的倒数。从而倒数存在。

唯一性：

不妨设有理数 q 有相反数 p_1,p_2，则按定义，有：

$$q\times p_1=p_1\times q=1$$
$$q\times p_2=p_2\times q=1$$

于是

$$p_1=p_1\times 1=p_1\times(q\times p_2)=(p_1\times q)\times p_2=1\times p_2=p_2$$

故倒数是唯一的。

这里我们也提前使用了乘法结合律（这也是合理的）。从而我们可以将任何一个非零有理数 q 的倒数记为 q^{-1}，而不引起混淆与出错。即对 $q=(m,n)$，$m,n\neq 0$，定义 $q^{-1}=(n,m)$，则它们互为倒数。特别地，± 1 的倒数是它们自己，而 0 没有倒数。类似整数的相反数，有理数的倒数也是良定义的，原因类似。

注 类似于加法逆，比倒数更广泛的一个概念是乘法逆 (*Multiplicative inverse*)，它指的是对于一个抽象集合 X 上的乘法，若对于 $x\in X$，存在一个元素 y 满足

$$x\times y=y\times x=e$$

这里 e 为乘法单位元，则称 y 为 x 的乘法逆。进而乘法逆也是存在唯一的。我们会在十二章详细讨论这样的元素。

接下来我们总结一下有理数的代数算律。

命题 6.19 (有理数的代数算律)

设 x, y, z 为有理数，则

1. $x+y=y+x$
2. $(x+y)+z=x+(y+z)$
3. $x+0=0+x=x$
4. $x+(-x)=(-x)+x=0$
5. $x\times y=y\times x$
6. $(x\times y)\times z=x\times(y\times z)$
7. $x\times 1=1\times x=x$
8. $x\times x^{-1}=x^{-1}\times x=1$，若 $x\neq 0$
9. $x\times(y+z)=x\times y+x\times z$
10. $(y+z)\times x=y\times x+z\times x$

我们依然选择将其证明留作习题。

接着我们可以定义除法：

定义 6.34 (有理数的除法)

设 p, q 为有理数，$q\neq 0$，定义两个数的除法 (*Division*) 为

$$p/q := p\times q^{-1}$$

结果称为商 (*Quotition*)，也记为 $\frac{p}{q}$。

从运算角度来说，除法当然是定义良好的，但从等价类的角度来讲，它是否良定义还需要验证，不过这当然不是问题。

于是对于整数 m 和非零整数 n，容易看见：

$$m/n=m\times n^{-1}=(m,1)\times(1,n)=(m,n)$$

这样任何一个有理数均可表示为两个整数之商。于是我们可以抛弃符号 (m,n)，转而以我们熟悉的 m/n 或者 $\frac{m}{n}$ 来表示了。

而命题 6.19 使我们可以使用我们认知中的代数法则，以后我们就不再多作解释。至于除法的代数法则我们也不再赘述，你的认知都是正确的，如果你有问题你可以当场证明你需要用的等式。

上一小节我们将整数分为正整数、零、负整数。现在对于有理数我们干同样的事情。

定义 6.35 (有理数的正负)

设 q 为有理数，我们称 q 为正有理数 (*Positive rational number*)，若存在两个正整数 m, n 使得 $q=\frac{m}{n}$。我们称 q 为负有理数 (*Negative rational number*)，若其为某个正有理数的相反数。

这里我们采取的定义方式和上一小节不太一样。作为例子，正整数均为正有理数，负整数均为负有理数，于是新老定义是相容的。

同样的，有理数也有三歧性：

定理 6.7 (有理数的三歧性)

有理数具有三歧性 (*Trichofomy*)，即：对任意有理数 q，q 要么是一个正有理数，要么是一个负有理数，要么为零，且恰为其一。

证明 证明当然也是容易的。只需要基于整数的三歧性。设有理数 $q=\frac{m}{n}$，m,n 为整数且 $n\neq 0$。

若 $m=0$，则 $q=0$。

若 m,n 同为正整数，则 q 为正有理数，若同为负整数，则 $(m,n)\sim(-m,-n)$，$-m,-n$ 为正整数，于是 $q=\frac{-m}{-n}$ 为正有理数。

若 m 为正整数，n 为负整数，则 $-m$ 为正整数，于是 $q=\frac{m}{n}$ 为正有理数 $\frac{-m}{n}$ 的相反数，从而 q 为负有理数。若 m 为正整数，n 为负整数，则 $-n$ 为正整数，于是 $q=\frac{m}{n}$ 为正有理数 $\frac{m}{-n}$ 的相反数，故 q 为负有理数。

注意到 m,n 只能为上述的一种情况，故 q 亦恰居其一。

利用有理数的三歧性，我们可以定义有理数的序：

定义 6.36 (有理数的序)

我们在集合 $\mathbb{Q}$ 上定义关系 $<$ 为：

$$p<q:\Leftrightarrow q-p\text{为正有理数}$$

则 $<$ 为 $\mathbb{Q}$ 上的严格偏序。

并借此我们可以定义相应的非严格偏序。当然我们也可以先定义非严格偏序，再给出相应的严格偏序，这是无妨的。

命题 6.20 (有理数的序的基本性质)

设 p,q,r 为有理数，则

1. （自反性）$q\leq q$。
2. （传递性）$p\leq q,\ q\leq r\Rightarrow p\leq r$。
3. （反对称性）$p\leq q,\ q\leq p\Rightarrow p=q$。
4. （加法保序性）$p\leq q\Leftrightarrow p+r\leq q+r$。
5. （正乘法保序性）若 $p\leq q$ 且 r 为正有理数，则 $pr\leq qr$。

基于这些基本内容你可以推导你所需要的所有关于有理数的性质。这也可以充当你对于本节的练习。

6.3.1.3 有理数的性质

我们在上一小节定义了有理数的加减乘除四种运算，也定义了有理数上的序，使得有理数初具雏形。现在我们可以进一步完善我们对有理数的认知，比如有理数的更多运算。

定义 6.37 (有理数的绝对值)

设 q 为有理数，我们定义 q 的绝对值 (*Absolute value*) 为

$$|q| = \begin{cases} q, & \text{若}n\text{为正有理数} \\ 0, & \text{若}n\text{为零} \\ -q, & \text{若}n\text{为负有理数} \end{cases}$$

♣

很自然的，这和我们对于整数的绝对值的定义是相容的，它可以视为整数的绝对值的扩充。同样的，如果你将有理数等比例地排列在一条直线上的话（虽然我们尚未说明这个行为的合理性），那么有理数的绝对值可以拿来衡量有理数间的距离。

定义 6.38 (距离)

设 p 和 q 为有理数，称 $|p-q|$ 为 p 和 q 之间的距离 (*Distance*) 或者度量 (*Metric*)，也记作 $d(x,y)$。♣

注 事实上更一般的度量定义为集合 X^2 到 $\mathbb{R}$ 上的一个映射 d，且具有性质：

1. 正定性 (*Positive definiteness*)：$\forall\, x,y \in X$，$d(x,y) \geq 0$，且等号成立当且仅当 $x=y$。
2. 对称性 (*Symmetry*)：$\forall\, x,y \in X$，$d(x,y) = d(y,x)$。
3. 三角不等式 (*Triangle inequality*)：$\forall\, x,y,z \in X$，$d(x,y)+d(y,z) \geq d(x,z)$。

我们把 (X,d) 称为度量空间 (*Metric space*)。显然在绝对值定义的度量下，有理数 $\mathbb{Q}$ 满足这三条性质，因此可以构成度量空间。

这样定义的距离当然很符合我们认知。比如 $d(3,5)=2$。你很容易看到绝对值有下列性质：

命题 6.21 (绝对值的基本性质)

设 p,q 为有理数，则

1. $|q| \geq 0$，等号成立当且仅当 $q=0$。
2. $|p-q| = |q-p|$。
3. $|p+q| \leq |p|+|q|$。
4. $|pq| = |p||q|$。

♠

证明留作习题。

绝对值拿来衡量有理数有多接近当然是很有效的，这一点我们会在后面讨论。

接着我们可以定义整数次幂的指数运算，这一点比我们在等比数列那里对幂粗浅的介绍更加严谨系统，不过思想是类似的。我们先定义自然数次幂的指数运算：

定义 6.39 (自然数次幂的指数运算)

设 q 为有理数。为把 q 升到 0 次幂，我们定义 $q^0 := 1$。现在归纳地假定 q^n 已对于某自然数定义好，那么我们定义 $q^{n+1} := q^n \times q$。♣

然后我们定义负整数次幂的指数运算：

定义 6.40 (负整数次幂的指数运算)

设 q 为非零有理数，则对负整数 $-n$，定义

$$q^{-n} := \frac{1}{q^n}$$

于是二者结合起来就确定了有理数的任意整数次幂。且它具有下列性质：

命题 6.22 (指数运算的性质)

设 p, q 为非零有理数，m, n 为整数，则：

1. $q^n q^m = q^{n+m}$，$(q^n)^m = q^{nm}$，$(pq)^n = p^n q^n$。
2. 若 $p > q \geq 0$，则 n 为正整数时，$p^n > q^n \geq 0$；n 为负整数时，$q^n > p^n \geq 0$。
3. 若 $p, q > 0$，$n \neq 0$ 且 $p^n = q^n$，则 $p = q$。
4. $|q^n| = |q|^n$

证明留作习题。于是你可以看见我们前面对于有理数的指数运算的性质是正确的（虽然我们还没有提及实数）。

现在我们进一步研究有理数的性质。

由于有理数序满足三歧性，因此有理数集为全序集，任意两个元素均可比较大小。于是我们可以考虑将所有有理数排列在一条直线上（这也是为什么全序也叫线性序）[14]，想象这条直线是从左到右的，并且当 $p > q$ 时，p 被安排在 q 的右边。对于自然数和整数我们当然也可以进行类似的操作，因为它们都是全序集。

不过你很容易看出前者与后者的区别，后者与其说是一条直线，不如说是一群离散而等距排列的点。而前者看起来的确是一条直线。这一点具体是通过以下定义体现的：

定义 6.41 (稠密序)

设集合 X 上有严格偏序关系 $<$，若对任意 $a, b \in X$ 满足 $a < b$，存在 $c \in X$ 使得 $a < c < b$，则称 $<$ 为 X 上的稠密序 (*Dense order*)。

容易看出来自然数和整数上的序不是稠密的，而有理数的序是稠密的。我们用下面两个定理说明这件事情。

定理 6.8 (自然数与整数不是稠密的)

不存在介于 0 与 1 之间的自然数，进而不存在介于 0 到 1 之间的整数。

证明 不妨设存在自然数 n 介于 0 与 1 之间，即

$$0 < n < 1$$

由 $0 < n$ 可知 $0{+}{+} \leq n$ 即 $1 \leq n$，与 $n < 1$ 矛盾。故 n 不存在。

再设存在整数 z 介于 0 与 1 之间，即 $0 < z < 1$，则 z 为正整数，进而为正自然数，由刚才结果可知这样的 z 是不存在的。

我个人认为这个“进而”可能有所误会，有些同学可能会以为“进而”是因为 $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$，但事实上子集关系和序是否稠密不存在必然关系，一个序关系在原集合是稠密的，但在子集上不一定是稠密的，

[14] 尽管它直观上如此，事实上这种行为当然是不严谨的，不过它仍然对我们理解有理数有利。

反之亦然。你可以试着举举例子。这里的进而是因为正整数均为正自然数，所以正自然数的结论可以自然应用到正整数上。

定理 6.9 (有理数是稠密的)

有理数上的序 $<$ 为稠密序。

证明 不妨设 $p, q \in \mathbb{Q}$ 且 $p < q$，则令 $r = \frac{p+q}{2}$，显然 r 也为有理数，且

$$p < q \Rightarrow \frac{p}{2} < \frac{q}{2} \Rightarrow \frac{p}{2} + \frac{p}{2} < \frac{p}{2} + \frac{q}{2} < \frac{q}{2} + \frac{q}{2}$$

即 $p < r < q$，从而有理数序为稠密序。

插句嘴，既然整数也是有理数，因此观察那条直线，会发现离散的整数将有理数分成了若干份，也就是说：

命题 6.23

设 q 为有理数，则存在整数 z 使得

$$z \leq q < z + 1$$

特别地，对任意有理数，都存在比其更大的自然数，因此存在一个有理数比所有自然数都大这种事情是不可能发生的。

证明留作习题。

当然，这个整数 z 是唯一的，因此我们可以给予其相应的记号。我们称 z 为 q 的整数部分，记为 $[q]$，这个记号首次见于高斯的著作《算术研究》，因此也叫高斯函数或取整函数。例如 $[2] = 2$, $[3.5] = 3$, $[-1.5] = -2$。相应的，我们把 $q - [q]$ 称作 q 的小数部分，记作 $\{q\}$。

言归正传，现在我们知道有理数是稠密的，但有理数并非是完备的。换句话说，有理数构成的直线看起来是连续的，但事实上它千疮百孔，有无限多的空隙分布其中，即使稠密性保证这些空隙是无限小的。比如说下面一个例子：

命题 6.24

不存在有理数 q 使得 $q^2 = 2$

证明 若存在有理数 q 满足 $q^2 = 2$，不妨设 $q = \frac{m}{n}$，这里 $m, n \in \mathbb{Z}$ 互素（见第十二章），则

$$\frac{m^2}{n^2} = 2$$

即

$$m^2 = 2n^2$$

由于 RHS 为偶数，因此 LHS 为偶数，进而 m 为偶数，故存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得 $m = 2k$，于是

$$4k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2$$

同理，n 为偶数，于是 m, n 不互素，矛盾。

这个证明用到了一些数论知识，但由于这些知识仅基于整数理论，所以我们可以放心使用，这是合理的。

虽然这样的有理数并不存在，但我们可以让有理数充分靠近这样的对象，其平方和 2 之间的差距可以任意小。

命题 6.25

对 $\forall\varepsilon\in\mathbb{Q}$ 且 $\varepsilon>0$，都存在 $q\in\mathbb{Q}$ 且 $q>0$ 使得

$$q^2<2<(q+\varepsilon)^2$$

证明 若不然，则存在有理数 $\varepsilon>0$ 使得对任意有理数 q 均有：

$$q^2<2\Rightarrow(q+\varepsilon)^2<2$$

由于 $q=0$ 满足 $q^2<2$，因此 $(q+\varepsilon)^2=\varepsilon^2<2$，进而 $(2\varepsilon)^2<2,\cdots,(n\varepsilon)^2<2$。但取 $n=[\frac{2}{\varepsilon}]+1$ 显然就有 $(n\varepsilon)^2>2$，因此矛盾。

从而命题成立。

举个例子，若 $\varepsilon=0.001$，则不妨取 $q=1.414$，此时 $q^2=1.999396$ 且 $(q+\varepsilon)^2=2.002225$ 满足条件。

注意到，ε 的大小其实决定了 q 与预想目标间的误差大小，因此当我们不断减小 ε 时，q 就会不断趋近我们想要的效果，例如考虑下面的有理数列：

$$1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ 1.41421,\cdots$$

其平方为

$$1.96,\ 1.9881,\ 1.99396,\ 1.99996164,\ 1.9999899241,\cdots$$

的确是越来越接近 2 的，而原来的有理数列似乎也在趋近某一个数，即使它并不是有理数。于是我们可以考虑利用这个看起来似乎收敛的有理数列来表示我们想要的结果，这就是所谓实数的构造，也正是我们接下来要谈的事情。

6.3.2 实数的构造

复习一下我们至今取得的成果，我们已严格地构造了三个基本的数系：自然数系 $\mathbb{N}$、整数系 $\mathbb{Z}$ 和有理数系 $\mathbb{Q}$[15]，所幸这三种数系的构造的思路都是相对顺畅而容易想到的。但由有理数来严谨地构造实数的方法却是有点难的——比起从自然数过渡到整数或从整数过渡到有理数，需要一点更多的装备。在那两个构造中，任务是引入新的代数运算到数系中来——例如，可以从自然数借助于引入减法来得到整数，以及从整数借助于引入除法来得到有理数。但是，从有理数得到实数，乃是一个"离散的"系统过渡到一个"连续的"系统，它要求引入有些不同的概念——即极限的概念。大家通过 1.3 节对数列极限的学习应该也能发现，某种意义上来说它十分直观，但是要把事情严格地说清楚确实相当困难的（尤其是最初我们从无到有提出极限的 $\varepsilon-N$ 语言时）。甚至像 Euler 和 Newton 这样的大数学家也对这个概念感到困难，直到 19 世纪，数学家如 Cauchy 和 Dedekind 才弄清楚如何严格地处理极限概念。

目前实数主流的定义方式有三种：利用 Cauchy 列定义[16]，利用 Dedekind 分割定义，用十进制小数定义。我们接下来会依次介绍它们。

[15] 符号 $\mathbb{N}$,$\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{R}$ 的含义分别为"自然的 (Natural)"、"比例的 (Quotient)"以及"实的 (Real)"，$\mathbb{Z}$ 的含义是"Zahlen"，德文的数。还有一个复数的符号 $\mathbb{C}$，明显意指"复的 (Complex)"。

[16] 虽然是用 Cauchy 列定义实数，但事实上这个想法是 Cantor 提出来的。

6.3.2.1 Cauchy 列

第一种定义方式是利用有理数的 Cauchy 列来定义，这种方法是最常见的，大多数教材都以此种定义为主，我们也是。它的好处是它是一个非常一般而有用的完备化一个度量空间的方法，我们在本节末尾也会稍微介绍一下。

首先我们要给出 Cauchy 列的定义。

定义 6.42 (有理数的 Cauchy 列)

若有理数列 $\{x_k\}$ 满足

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N\ s.t.\ \forall\, m, n > N,\ |x_m - x_n| < \varepsilon$$

则我们称 $\{x_n\}$ 为柯西列 (*Cauchy sequence*)。♣

注 这里的 ε 当然是有理数，因为我们还没有定义实数是什么。

你可能对这个式子似曾相识，回想一下我们曾经讲过的数列收敛的定义，我们说一个数列 $\{x_n\}$ 收敛到 x，如果

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N\ s.t.\ \forall\, n > N,\ |x_n - x| < \varepsilon$$

对比两个式子，前面几部分还是挺像的。当然，我们来想想这两个式子到底在说什么。刚才的式子是说 x_n 在 n 足够大的时候充分接近 x，而刚才定义里面的式子是说数列在无穷远处彼此是充分接近的。其实仔细想想，这两者好像差不多，如果一个数列极限存在，那么数列在无穷远处充分接近极限，自然也会相互接近；如果一个数列在无穷远处充分接近，都聚在一个地方，仿佛有一个数在那里吸引着它们。这两者似乎是等价的，但并非如此，至少一般而言，我们有下面的结论

定理 6.10

对有理数列 $\{x_n\}$，若它在 $\mathbb{Q}$ 上收敛，则它为 Cauchy 列，反之不然。♡

证明 证明是容易的。由 $\{x_n\}$ 收敛，不妨设极限为 x，那么对 $\forall\, \varepsilon > 0$，存在 N，只要 $n > N$，就有

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$$

于是对任意的 $n, m > N$，就有

$$|x_n - x_m| \le |x_n - x| + |x_m - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

所以 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列。

反之只需要注意到有理数 Cauchy 列可能在 $\mathbb{R}$ 上收敛到无理数，虽然我们尚且不知道 $\mathbb{R}$ 和无理数是什么，但你明白我们的确可以构造一个有理数的 Cauchy 列，它不以有理数为极限。操作留给你去自行完成。

注 事实上，我们在前面也提到过，Cauchy 列的定义可以拓展到一般的度量空间。我们可以在任何度量空间上定义收敛和 Cauchy 列的概念。并且收敛列必为 Cauchy 列，但反之不然。如 $\mathbb{Q}$ 作为度量空间就不满足。事实上，一个度量空间的完备性正是通过这点表现的。如果一个度量空间中的所有 Cauchy 列都收敛，则我们称这个度量空间是完备的 (*Complete*)，例如实数集 $\mathbb{R}$。这种情况下，我们可以认为收敛列等价于 Cauchy 列。

讲到这份上了就插句嘴。Cauchy 列的定义自然引出了一条重要的定理：Cauchy 收敛准则。内容我们刚才已经说过，就是一个实数列收敛当且仅当它是 Cauchy 列。或者更一般地，在完备度量空间上，

序列收敛当且仅当它是 Cauchy 列。这条定理的重要之处在于，你无需获知某个数列的极限就能判断其是否收敛。

于是从这个定理我们便看出了一些端倪。有理数是如此地千疮百孔，以至于它不能保证看起来多么收敛的 Cauchy 列真的收敛。民间有句老话："缺啥补啥。"，我们的思路正是，用 Cauchy 列填补这些缝隙。我们先来看一些例子。

例题 6.19 以下有理数列均为 Cauchy 列：

1. $1, 1, 1, 1, 1, \cdots$
2. $3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, \cdots$
3. $1.1, 1.01, 1.001, 1.0001, \cdots$

在有理数的世界中我们当然不知道什么是 π。但正如许多数学家注意到的，每一个实数都可以用一个有理数 Cauchy 列去实现。举个例子，我们可以用序列 $3, 3.1, 3.14, 3.141, \cdots$ 去逼近 π。而 Cantor 的想法是：我们用序列 $3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415\cdots$ 去**定义**实数 π。当然，两个不同的有理数 Cauchy 列可能定义了同一个实数，比如说刚才的 $1, 1, 1, \cdots$ 和 $1.1, 1.01, 1.001, \cdots$，很容易看出来它们都定义了 1，类似的情况还有很多。因此我们需要稍作处理。

定义 6.43 (Cauchy 列的等价)

我们称两个有理数 Cauchy 列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是等价的，记作 $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ 如果

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$$

♣

至于验证它确实是等价关系的细节，则留给你自己去完成。

这样我们就可以给出实数的定义了。

定义 6.44 (实数的定义 I)

我们称有理数 Cauchy 列在上述等价关系下的一个等价类为一个实数 (*Real number*)。

若某个实数的代表元可以是有理数常数列，那么我们称这个实数为有理数 (*Rational number*)，反之，若不存在有理数常数列成为其代表元，则称之为无理数 (*Irrational number*)。

♣

因此如果我们记 $CS(\mathbb{Q})$ 为有理数 Cauchy 列的全体，那么

$$\mathbb{R} = CS(\mathbb{Q})/\sim$$

这里 $\sim$ 是我们前面定义的等价关系。

这样我们就给出了实数的定义，并且自然地将有理数嵌入了实数，也定义了什么是无理数。举个例子，

$$[\{0, 0, \cdots\}] = [\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\}] = [\{10000, -10000, 0, 0, \cdots\}] = 0$$

这些都是实数 0 的表示方式。而我们也可以给出 π 的定义方式：

$$[\{3, 3.1, 3.14, 3.141, \cdots\}] = [\{4, 3.2, 3.142, \cdots\}] = \pi$$

当然，仅仅给出实数的定义是不够的。我们还需要去还原 $\mathbb{R}$ 上的结构。特别地，我们需要定义加法 $+$，乘法 $\times$ 以及序关系 $>$。所幸我们已经有了有理数集 $\mathbb{Q}$ 上的相关结构，因此我们很自然地定义两个实数 $[\{x_n\}]$ 与 $[\{y_n\}]$ 的和为 $[\{x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots\}]$。然而我们必须验证这么做的合理性，需要证明两个 Cauchy 列在相加之后仍然是 Cauchy 列，而且证明这样定义的实数是良定义的。

引理 6.7

设 $\{x_1, x_2, \cdots\}$ 与 $\{y_1, y_2 \cdot \cdots\}$ 为两个有理数 Cauchy 列，那么

1. $\{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots\}$ 和 $\{x_1y_1.x_2y_2 \cdot \cdots\}$ 为有理数 Cauchy 列。
2. 若 $\{x_1', x_2', \cdots\} \sim \{x_1, x_2, \cdots\}$，$\{y_1', y_2', \cdots\} \sim \{y_1, y_2, \cdots\}$，那么我们有
$$\{x_1' + y_1', x_2' + y_2', \cdots\} \sim \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots\}$$
且
$$\{x_1'y_1', x_2'y_2', \cdots\} \sim \{x_1y_1, x_2y_2, \cdots\}$$

证明 这里我们只证明加法的合理性，乘法则留作习题。

对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N_1, N_2 > 0$，只要 $n_1, m_1 > N_1$，$n_2, m_2 > N_2$，就有
$$|x_{m_1} - x_{n_1}| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |y_{m_2} - y_{n_2}| < \frac{\varepsilon}{2}$$
于是取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，只要 $n, m > N$，就有
$$|(x_m + y_m) - (x_n + y_n)| \leq |x_m - x_n| + |y_m - y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
于是 $\{x_n + y_n\}$ 为有理数的 Cauchy 列。

若 $\{x_n'\} \sim \{x_n\}, \{y_n'\} \sim \{y_n\}$，那么由定义，有
$$\lim_{n\to\infty}(x_n' - x_n) = 0, \quad \lim_{n\to\infty}(y_n' - y_n) = 0$$
于是自然有
$$\lim_{n\to\infty}(x_n' + y_n' - x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n' - x_n) + \lim_{n\to\infty}(y_n' - y_n) = 0 + 0 = 0$$
于是 $\{x_n + y_n\} \sim \{x_n' + y_n'\}$。

这里我们不加证明地使用了有理数的极限的运算律，你可以验证我们在 1.3 节所讲过的运算律在 $\mathbb{Q}$ 上也是成立的。

其实我们想做的事情无非是说，由于实数是有理数 Cauchy 列的等价类，那么从等价类中随便挑个代表元都能表示这个实数，因此实数的加法很自然地利用代表元的加法来定义，但我们必须说明代表元确实能加，也就是加了之后仍然是 Cauchy 列，而且我们挑不同的代表元，得到的 Cauchy 列理应代表同一个实数。

那么根据这个引理，我们就可以顺理成章地定义加法与乘法了。

定义 6.45 (实数的加法与乘法)

设 $x = [\{x_1, x_2, \cdots\}]$, $y = [\{y_1, y_2, \cdots\}]$ 为两个实数，我们定义两个实数的和为
$$x + y := [\{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots\}]$$
以及两个实数的积为
$$x \times y := [\{x_1y_1, x_2y_2, \cdots\}]$$

根据引理，这样定义是合理的。并且你可以验证，$(\mathbb{R}, +, \times)$ 构成一个域。自然，我们可以定义其上的减法和除法。这些都留给你作为练习。

接下来我们要着手处理 $\mathbb{R}$ 上的序关系。而且我们必须要求序结构与代数结构相容 (*Compatible*)，也就是说，如果 $x > 0, y > 0$，那么 $x + y > 0, xy > 0$。

要定义序关系 $>$ 会有一点麻烦。第一个想法是定义 $[\{x_1, x_2, \cdots\}] > [\{y_1, y_2, \cdots\}]$ 为

$$x_n > y_n, \ \forall \, n$$

但我们立马意识到这并非我们想要的。举个例子，我们有

$$[\{-2, 3, 3, 3, \cdots\}] = 3 > 0 = [\{0, 0, \cdots\}]$$

但第一项 $-2 < 0$。问题在于，我们在 1.3 节就已经认识到，一个数列的极限情况如何，和有限项是没有关系的。因此实数的取值自然不会取决于 Cauchy 列的前某些项。所以一个更为合理的想法是，用 Cauchy 列在足够远处的取值大小来表示实数的大小。$[\{x_1, x_2, \cdots\}] > [\{y_1, y_2, \cdots\}]$ 更应该被定义为类似于

$$\exists \, N \in \mathbb{N} \; s.t. \; \forall n > N, \; x_n > y_n$$

然而很不幸，这个想法仍然有一点问题。举个例子，$\frac{1}{n} > 0$ 对正整数 n 是恒成立的，然而

$$[\{1, \frac{1}{2}, \cdots\}] = 0 = [\{0, 0, \cdots\}]$$

这时问题出在，即使我们要求了 $\{x_n\}$ 在足够远的地方每一项比 $\{y_n\}$ 大，然而这并不足以保证 x_n 不会无限趋近于 y_n。因此我们需要在两个 Cauchy 列间创造一定的间隔。这并不困难，因为我们明白，按道理说，如果 $x > 0$，那么应当存在 $r_0 > 0$ 使得 $x > r_0$。因此我们定义：

定义 6.46 (实数上的序)

我们在 $\mathbb{R}$ 上定义序关系 $>$ 为：设 $\alpha = [\{x_1, x_2, \cdots\}]$ 与 $\beta = [\{y_1, y_2, \cdots\}]$ 为两个实数。如果存在一个有理数 $r_0 > 0$ 与 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall \, n > N, \; x_n > y_n + r_0$，那么称 $\alpha > \beta$。♣

注 当然，给出了它的定义之后，为了验证它确实和我们的认知一致，我们需要做如下几件事情：

1. 验证它确实是一个严格全序关系，这一点交给你完成。
2. 验证它是良定义的，毕竟它仍然是一个与等价类相关的定义。
3. 验证它与代数结构相容，这很重要。

我们逐一说明这些事情。

引理 6.8

假设我们有

(1) $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$, $\{y_n\} \sim \{y'_n\}$；

(2) 存在有理数 $r_0 > 0$ 与 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall \, n > N$，有 $x_n > y_n + r_0$，

那么存在有理数 r'_0 与 $N' \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall \, n > N'$，有 $x'_n > y'_n + r'_0$。♡

证明 由等价关系，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$，只要 $n_1 > N_1, n_2 > N_2$，就有

$$|x_{n_1} - x'_{n_1}| < \varepsilon, \quad |y_{n_2} - y'_{n_2}| < \varepsilon$$

于是取 $\varepsilon = \frac{r_0}{4}$，令 $N' = \max\{N, N_1, N_2\}$，则对 $n > N'$，有

$$x'_n > x_n - \varepsilon > y_n + r_0 - \varepsilon > y'_n + r_0 - 2\varepsilon = y'_n + \frac{r_0}{2}$$

于是 $r'_0 = \frac{r_0}{2} > 0$ 满足要求。从而结论成立。

命题 6.26

$\mathbb{R}$ 上的序关系 $>$ 与 $+$ 与 $\times$，即

1. 若 $\alpha > 0,\ \beta > 0$，则 $\alpha + \beta > 0$。
2. 若 $\alpha > 0,\ \beta > 0$，则 $\alpha\beta > 0$。

证明 不妨设 $\{a_n\} \in \alpha, \{b_n\} \in \beta$，那么存在 $r_1, r_2 > 0$，$N_1, N_2 \in \mathbb{N}$，只要 $n_1 > N_1, n_2 > N_2$，就有

$$a_{n_1} > 0 + r_1, \quad b_{n_2} > 0 + r_2$$

于是取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，对 $n > N$，有

$$a_n + b_n > r_1 + r_2 > 0, \quad a_n b_n > r_1 r_2 > 0$$

即 $\alpha + \beta > 0,\ \alpha\beta > 0$。

直接的推论是：

推论 6.7 (阿基米德性)

$\mathbb{R}$ 是阿基米德有序域，即 $\forall\, \alpha > 0, \exists\, k \in \mathbb{N}\ s.t.\ k\alpha > 1$。

证明 不妨设 $\{x_n\} \in \alpha$，那么存在 $r_0 = \frac{p}{q}$ 与 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall\, n > N, x_n > \frac{p}{q}$。那么自然有 $\alpha > \frac{p}{2q}$。于是我们取 $k = 2q$，那么

$$k\alpha = 2q\alpha > p \geq 1$$

当然，这里我们也用到了相容性的另一种表述：$\alpha > \beta, k > 0 \Rightarrow k\alpha > k\beta$。你可以试着自己证明之。

阿基米德性指出 $\mathbb{R}$ 中不存在无穷大或者无穷小的元素。但很遗憾，这并不是 $\mathbb{R}$ 具有完备性的证据，因为你很容易注意到 $\mathbb{Q}$ 也是阿基米德有序域。但这并不妨碍阿基米德性的重要性。

这样基本说清楚了序应当具有的基本性质，于是我们可以接着定义绝对值。

定义 6.47 (实数的绝对值)

我们在 $\mathbb{R}$ 上定义绝对值为：

$$|\alpha| := [\{|x_1|, |x_2|, \cdots\}]$$

这里 $\alpha = [\{x_1, x_2, \cdots\}]$。

自然，我们也是要说明这样定义的合理性的，但显然并不困难，因此我们不再赘述。它应当满足以下性质：

命题 6.27

在 $\mathbb{R}$ 上，我们有：

1. 正定性（Positive definiteness）：$|x| \geq 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$，$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$。
2. 绝对齐性（Absolute homogeneity）：对任意 $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$，我们有 $|\lambda x| = |\lambda||x|$。
3. 三角不等式（Triangle inequality）：对任意 $x, y \in \mathbb{R}$，我们有 $|x + y| \leq |x| + |y|$。

证明 Trivial。

注 比绝对值更加广泛的概念是范数 (*Norm*)。具体来说，对于一个向量空间 X，如果映射

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : &X \to \mathbb{R} \\ &x \mapsto \|x\| \end{aligned}$$

满足：

- $\|x\| \geq 0,\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|,\ x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,\ x, y \in X$,

则我们称 $(X, \|\cdot\|)$ 为模空间 (*Moduli space*) 或赋范空间 (*Normed space*)，$\|\cdot\|$ 为 X 上的一个模 (*Moduli*) 或范数 (*Norm*)。

范数与度量有着千丝万缕的关系。正如你发现 $\mathbb{R}$ 上的绝对值既可以作为范数来讨论，也可以作为度量来讨论。

到现在我们讨论了很多东西，但我们仍然没有发掘一些能让我们把 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{Q}$ 区别开的性质。到现在我们似乎一直在炒冷饭，$(\mathbb{Q}, +, \times)$ 是一个域，$(\mathbb{R}, +, \times)$ 也是一个域；$\mathbb{Q}$ 是有序域，$\mathbb{R}$ 也是有序域；$\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{R}$ 上都有三角不等式和阿基米德性。那么 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{Q}$ 到底区别在哪里？

好吧，正如我们解释过的，$\mathbb{Q}$ 对于分析而言没有那么良好，因为它千疮百孔：任何无理数都是一个孔洞，因为它们不是有理数，却可以作为有理数 Cauchy 列的极限。换句话说，$\mathbb{Q}$ 中的“孔洞”指的是在 $\mathbb{Q}$ 中，但不收敛到 $\mathbb{Q}$ 中任何元素的 Cauchy 列。我们说 $\mathbb{Q}$ 是不完备的。

自然我们要问：$\mathbb{R}$ 完备吗？也就是说，是否存在实数的 *Cauchy* 列不收敛到任何实数？对此我们的答案是：$\mathbb{R}$ 是完备的，也就是说，任何实数的 Cauchy 列都会收敛到实数（因此 $\mathbb{R}$ 中没有所谓的孔洞）。

为了解释这点，我们首先定义实数的 Cauchy 列，这是很容易的。

定义 6.48 (实数的 Cauchy 列)

我们称实数列 $\{a_n\}$ 为柯西列，如果

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ s.t.\ \forall\, m, n > N,\ |a_m - a_n| < \varepsilon$$

♣

注 实数上的收敛的定义与 1.3 节的定义一致，因此我们不再赘述。

你可以验证：

命题 6.28

若 $\alpha = [\{x_1, x_2, \cdots\}]$，即 $\{x_1, x_2, \cdots\}$ 为代表 α 的有理数 Cauchy 列，那么

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

♠

注 严格来说，这里我们将 $\mathbb{Q}$ 嵌入了 $\mathbb{R}$，也就是说，我们将 $x_n \in \mathbb{Q}$ 视作实数 $[\{x_n, x_n, \cdots\}] \in \mathbb{R}$。

作为推论，我们有

推论 6.8 (有理数在实数中稠密)

给定任意 $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$，存在 $r \in \mathbb{Q}$ 使得 $|\alpha - r| < \varepsilon$

♡

也不难验证极限的唯一性，不过验证的过程早在 1.3 节就已完成，你可以回顾那份证明，思考是否有细节需要补充，或者审视证明的每一步，思考所用到的性质。

现在我们来证明 $\mathbb{R}$ 的完备性。

定理 6.11 (实数完备性 Ver.1：Cauchy 完备性)

实数列 $\{\alpha_k\}$ 为 Cauchy 列当且仅当它收敛到某个实数 α。

注 简单概括一下就是，收敛列等价于 Cauchy 列。

你还注意到我们说这是实数完备性的第一个版本。这是因为目前主要有六种实数完备性的等价表述[17]，它们分别是

最小上界性质 (Least Upper Bound Property) 若非空集合 $E \subset \mathbb{R}$ 有上界，则它有唯一的最小上界。

紧致区间定理 (Nested Interval Theorem) 设 $I_n = [a_n, b_n]$ 为一列闭区间，满足

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$$

并假设 $n \to \infty$ 时 $b_n - a_n \to 0$。那么存在唯一的 x_0 落在每个 I_n 中。

海涅-博雷尔定理 (Heine-Borel Theorem) $\mathbb{R}$ 的子集 E 为紧集当且仅当为有界闭集。

单调收敛定理 (Monotone Convergence Theorem) $\mathbb{R}$ 上任何单调有界数列收敛。

波尔查诺-魏尔斯特拉斯定理 (Bolzano-Weierstrass Theorem) $\mathbb{R}$ 上任何有界数列存在收敛子列。

以及我们马上要证明的柯西完备性。不过很遗憾另外五种这里我们不会详细介绍之。一些较为详细的数分教材会详细讨论之，并介绍它们是如何互相蕴含的。学会上网查资料会有效帮助你获取相关知识。

证明 证明分为两部分。

第一部分，不妨设 $\{\alpha_n\}$ 收敛，极限为 α，我们要证明它是 Cauchy 列。这是容易的，因为根据收敛，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，只要 $n > N$，就有 $|\alpha_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$，那么对 $n, m > N$，有

$$|\alpha_n - \alpha_m| \le |\alpha_n - \alpha| + |\alpha_m - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

所以 $\{\alpha_n\}$ 为 Cauchy 列。

第二部分，设 $\{\alpha_n\}$ 为实数 Cauchy 列，我们需要证明它收敛。我们必须先找到它应当收敛的极限，除此之外我们别无选择。这一部分是借助有理数稠密性完成的：对每个 n，我们可以找到一个有理数 r_n 使得 $|\alpha_n - r_n| < \frac{1}{n}$。而我们期待的事情是：

1. $\{r_1, r_2, \cdots\}$ 是有理数 Cauchy 列。
2. 它所代表的实数 α 恰好正是我们需要的极限。

这样就皆大欢喜了。我们现在说明之。

首先由 $\{\alpha_n\}$ 为 Cauchy 列，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N' \in \mathbb{N}$，只要 $n, m > N'$，就有

$$|\alpha_n - \alpha_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

而对任意的 $n, m > N'$，我们都有

$$|r_n - r_m| \le |r_n - \alpha_n| + |\alpha_n - \alpha_m| + |\alpha_m - r_m| < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2}{N'}$$

于是我们只需要把 N 取得足够大，比如取 $N = \max\{N', [\frac{4}{\varepsilon}] + 1\}$，那么对 $n, m > N$ 就有

$$|r_n - r_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2}{N} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

因此 $\{r_n\}$ 为 Cauchy 列。我们不妨记它所代表的实数为 α。我们要证 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$，即对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，只要 $n > N$ 就有

$$|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$$

[17]有些地方认为是 7 种，一般是把 Dedekind 分割那些东西也算进来了。有些地方认为是 9,10 种，他们又加了一些其它的东西。这里我还是倾向于主要六种。

为此，只需要稍微操作一下:

$$|\alpha_n-\alpha|\le|\alpha_n-r_n|+|r_n-\alpha|<\frac{1}{n}+|r_n-\alpha|$$

自然，根据命题 6.28，$\{r_n\}$ 是收敛到 α 的，所以存在 N'，$n>N'\Rightarrow|r_n-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$，于是只需要取 $N=\max\{N',[\frac{2}{\varepsilon}]+1\}$ 就有

$$|\alpha_n-\alpha|<\frac{1}{N}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,\ \forall\, n>N$$

因此 $\{\alpha_n\}$ 收敛到 α。

这样我们就完成了实数完备性的证明。

一般度量空间的完备化

由于度量空间完备化也是采用的 Cauchy 列的方法，因此我们作为上一小节的补充内容介绍。

首先我们回顾一下什么是度量空间。

定义 6.49 (度量空间)

设 X 为集合，若映射

$$\begin{aligned} d:\,&X\times X\to\mathbb{R}\\ &(x,y)\mapsto d(x,y)\end{aligned}$$

满足

正定性 $d(x,y)\ge0$, $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$;

对称性 $d(x,y)=d(y,x)$;

三角不等式 $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$。

则我们称 (X,d) 为度量空间 (*Metric space*)，d 称为 X 上的度量函数 (*Metric function*)，$d(x,y)$ 称为 x,y 之间的距离 (*Distance*)。 ♣

度量空间中也可以类似定义收敛与极限的概念:

定义 6.50 (度量空间中的极限与收敛)

设 (X,d) 为度量空间，$x_n,x\in X$，如果

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$$

则称序列 $\{x_n\}$ 收敛 (*Converge*) 于 x，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x$$

而 x 称为 $\{x_n\}$ 的极限点 (*Limit point*)。 ♣

注 这实际上是借助了实数集 $\mathbb{R}$ 上的极限来定义度量空间中的极限。注意，此时我们已经默认了实数集 $\mathbb{R}$ 具有我们所知的良好性质，当然我们也证得七七八八差不多了，使用是合理的。

以及可以定义 Cauchy 列:

定义 6.51 (Cauchy 列与完备度量空间)

设 (X,d) 为度量空间，$x_n \in X$，如果对任何 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得对 $\forall\, n,m > N$，有

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

则称序列 $\{x_n\}$ 为柯西列 (*Cauchy sequence*)。

若 X 中所有 Cauchy 列都收敛，则称 (X,d) 为完备度量空间 (*Complete metric space*)。♣

显然，既然我们抛出了所谓完备度量空间的概念，就知道完备性并不是一个很普遍的良好性质。举个例子，$\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{R}$ 都是度量空间，但前者并不完备，后者是完备的。但对于不完备的度量空间，我们可以将其完备化，就像把 $\mathbb{Q}$ 变成 $\mathbb{R}$ 一样。

为了说明这件事，我们需要一些新的定义。

定义 6.52 (等距同构)

设 (X,d_X) 和 (Y,d_Y) 为度量空间。如果存在双射 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$，使得对于任意 $x_1,x_2\in X$，都有

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$$

则我们称 f 为一个等距同构 (*Isometry*)，并称度量空间 (X,d_X) 和 (Y,d_Y) 是等距同构的 (*Isometric*)。♣

因为等距同构的度量空间具有完全相同的度量性质，我们将等距同构的度量空间视为相同的度量空间，比如你把一个度量空间如果只是简单地平移了一下，那前后其实没有本质上的区别，它们显然是等距同构的，所以仅仅针对度量表现出的性质而言我们当然认为它们是一回事。当然，绝大部分度量空间不是等距同构的。下面这个概念稍微放宽了限制。

定义 6.53 (等距嵌入)

如果单射 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 满足：对于任意 $x_1,x_2\in X$，均有

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$$

则我们称 f 为一个（度量）等距嵌入 (*Isometric embedding*)。♣

而所谓完备化，指的是这么一件事情：

定义 6.54 (完备化)

设 (X,d) 是度量空间，$(\hat{X},\hat{d})$ 为完备度量空间。如果存在等距嵌入 $f: X\to\hat{X}$ 使得 $\overline{f(X)}=\hat{X}$，则我们称 $(\hat{X},\hat{d})$ 是 (X,d) 的一个完备化 (*Completion*)。♣

注 这里 $\overline{f(X)}$ 指的是集合 $f(X)$ 的闭包，即 $f(X)\cup f(X)'$，$f(X)'$ 是 $f(X)$ 的导集，即 $f(X)$ 中所有聚点的集合，聚点指的是任何空心邻域均与 $f(X)$ 相交的元素。

这些都是点集拓扑的概念，就不详细介绍了，本书也没打算讲点拓。感兴趣的同学建议自行查找相关资料。

而完备化直观来讲就是找一个合适的完备度量空间，然后把原来那个度量空间恰好塞进去，且保持住度量性质。就像你可以把 $\mathbb{Q}$ 塞进 $\mathbb{R}$，而且不改变 $\mathbb{Q}$ 的度量结构。

自然我们要问，是否任何一个度量空间，都可以完备化？会不会有一些丑陋的度量空间，不能等

距嵌入任何一个完备度量空间？而令人舒心的是，这样丑陋的度量空间是不存在的。

定理 6.12

任意度量空间 (X,d) 均具有完备化 $(\hat{X},\hat{d})$，且在等距同构的意义下是唯一的。

这个定理的证明自然可以仿照我们对有理数的操作。回想一下我们是怎么从 $\mathbb{Q}$ 得到 $\mathbb{R}$ 的？如果单单考虑度量结构的话，我们首先需要构造 $\mathbb{R}$，它定义为所有有理数 Cauchy 列的等价类的集合。然后我们需要定义 $\mathbb{R}$ 上的度量结构（即绝对值），从而可以定义实数 Cauchy 列。最后我们证明 $\mathbb{R}$ 是完备的。

这里我们的操作是类似的。

证明 我们考虑构造性证明的方法。

Step 1：利用 (X,d) 来构造一个新的度量空间 $(\hat{X},\hat{d})$，但我们不确定它是否完备。

我们记 $CS(X,d)$ 为 (X,d) 中所有 Cauchy 列组成的集合，并在其上定义等价关系 $\sim$:

$$\{a_n\}\sim\{b_n\} :\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(a_n,b_n)=0,\ \forall\,\{a_n\},\{b_n\}\in CS(X,d)$$

这里我们略去等价关系的验证，这很容易。于是我们考虑 $CS(X,d)$ 在等价关系 $\sim$ 下的商集，即

$$\hat{X}:=CS(X,d)/\sim=\{[\{a_n\}]\mid\{a_n\}\in CS(X,d)\}$$

就像我们对有理数做过的那样。并且我们在其上定义度量函数 $\hat{d}$ 为

$$\hat{d}(\alpha,\beta)=\lim_{n\to\infty} d(a_n,b_n),\ \forall\,\alpha=[\{a_n\}],\beta=[\{b_n\}]\in\hat{X}$$

这样就给出了 $(\hat{X},\hat{d})$ 的定义。当然，我们需要检验定义的合理性，尤其是 $\hat{d}$ 到底是否成为一个度量函数。

首先我们要检验 $\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n,b_n)$ 是否收敛。

由于 $\{a_n\},\{b_n\}$ 为 Cauchy 列，对 $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,N_1,N_2\in\mathbb{N},\ \forall\,n_1,m_1>N_1,n_2,m_2>N_2$，有

$$d(a_{n_1},a_{m_1})<\frac{\varepsilon}{2},\quad d(b_{n_2},b_{m_2})<\frac{\varepsilon}{2}$$

于是取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，对 $n,m>N$，就有

$$\begin{aligned}|d(a_n,b_n)-d(a_m,b_m)|&\le|d(a_n,b_n)-d(a_n,b_m)|+|d(a_n,b_m)-d(a_m,b_m)|\\&\le d(b_n,b_m)+d(a_n,a_m)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

于是 $\{d(a_n,b_n)\}$ 是实数 Cauchy 列，自然收敛。所以 $\hat{d}(\alpha,\beta)$ 是有意义的。

接着我们要证明 $\hat{d}(\alpha,\beta)$ 是良定义的。

任取 $\{a_n\}\sim\{a_n'\}$，$\{b_n\}\sim\{b_n'\}$，要证明 $\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n,b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n',b_n')$，即证

$$\lim_{n\to\infty}(d(a_n,b_n)-d(a_n',b_n'))=0$$

由 $\{a_n\}\sim\{a_n'\}$，$\{b_n\}\sim\{b_n'\}$，对 $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,N_1,N_2\in\mathbb{N},\ \forall\,n_1>N_1,n_2>N_2$，有

$$d(a_{n_1},a_{n_1}')<\frac{\varepsilon}{2},\quad d(b_{n_2},b_{n_2}')<\frac{\varepsilon}{2}$$

那么取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，对 $n>N$，有

$$\begin{aligned}|d(a_n,b_n)-d(a_n',b_n')|&\le|d(a_n,b_n)-d(a_n,b_n')|+|d(a_n,b_n')-d(a_n',b_n')|\\&\le d(b_n,b_n')+d(a_n,a_n')<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}(d(a_n,b_n)-d(a_n',b_n'))=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n,b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n',b_n')$，所以 $\hat{d}(\alpha,\beta)$ 是良定义的。

最后，我们要检验 $\hat{d}$ 满足度量的三个条件。

- 正定性显然。
- 对称性显然。
- 三角不等式显然。

所以 $\hat{d}$ 是 $\hat{X}$ 上的度量函数。这样我们就成功构造了 $(\hat{X},\hat{d})$ 为度量空间。

Step 2：现在我们来证明 $(\hat{X},\hat{d})$ 是完备的。

不妨假设 $\{\alpha_n\}$ 为 $(\hat{X},\hat{d})$ 中的 Cauchy 列，现在我们要证明它收敛。

这里如果模仿 $\mathbb{Q}$ 到 $\mathbb{R}$ 的过程，我们需要依次完成以下准备工作：

1. 取出一个 $(\hat{X},\hat{d})$ 的稠子空间并证明其稠密。
2. 利用稠子空间来证明 Cauchy 列收敛。

对于第一步，本质上其实只是找到了 (X,d) 在 $(\hat{X},\hat{d})$ 中的替身。我们不妨设 $X'=\{\{a_n\}\mid a_n=a\in X,\ \forall\, n\in\mathbb{N}\}\subset\hat{X}$，即 $\hat{X}$ 中的所有常值 Cauchy 列。自然可以验证 $(X',\hat{d})$ 是度量空间[18]。

正如 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密那样，现在我们要证明 $(X',\hat{d})$ 是稠密的，也就是说，给定任意 $\alpha\in\hat{X}$, $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$，存在 $\gamma\in X'$ 使得 $\hat{d}(\alpha,\gamma)<\varepsilon$。自然，它可以作为下一命题的推论：

$$\alpha=[\{a_n\}]\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$$

证明略，细节留给你去补充。于是 $(X',\hat{d})$ 是 $(\hat{X},\hat{d})$ 的稠子空间。

第二步，我们要利用稠子空间 $(X',\hat{d})$ 来证明 $(\hat{X},\hat{d})$ 完备。这是顺理成章的。考虑前面我们假设的 Cauchy 列 $\{\alpha_n\}$，由 $(X',\hat{d})$ 的稠密性，对 $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\exists\,\gamma_n\in X'$ $s.t.$ $d(\alpha_n,\gamma_n)<\frac{1}{n}$。我们作出如下论断：

Claim 1：$\{\gamma_n\}$ 是 Cauchy 列。

Proof：因为 $\{\alpha_n\}$ 是 Cauchy 列，对 $\forall\,\varepsilon>0$，存在 $N'\in\mathbb{N}$，只要 $n,m>N'$，就有

$$d(\alpha_n,\alpha_m)<\frac{\varepsilon}{2}$$

于是取 $N=\max\{N',[\frac{4}{\varepsilon}]+1\}$，那么对 $n,m>N$，有

$$\begin{aligned}d(\gamma_n,\gamma_m)&\le d(\gamma_n,\alpha_n)+d(\alpha_n,\alpha_m)+d(\alpha_m,\gamma_m)\\&<\frac{1}{n}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{m}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2}{N}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

所以 $\{\gamma_n\}$ 是 Cauchy 列。设 $\gamma_n=\{r_n,r_n,\cdots\}$，自然，$\{r_n\}$ 也是 Cauchy 列。

Claim 2：$\{\alpha_n\}$ 收敛到 $\alpha:=[\{r_n\}]$。

Proof：要证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$，即对 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,N\in\mathbb{N}$, $\forall\,n>N$, $\hat{d}(\alpha_n,\alpha)<\varepsilon$。

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=\alpha$，对 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,N'\in\mathbb{N}$, $\forall\,n>N'$, $\hat{d}(\gamma_n,\alpha)<\frac{\varepsilon}{2}$，于是取 $N=\max\{N',[\frac{2}{\varepsilon}]+1\}$，那么对 $n>N$，有

$$\hat{d}(\alpha_n,\alpha)\le\hat{d}(\alpha_n,\gamma_n)+\hat{d}(\gamma_n,\alpha)<\frac{1}{n}+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{1}{N}+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

于是 $\{\alpha_n\}$ 收敛到 α。这样就证明了 $(\hat{X},\hat{d})$ 是完备的。

Step 3：然后我们将 (X,d) 等距嵌入 $(\hat{X},\hat{d})$。所以 $(\hat{X},\hat{d})$ 是 (X,d) 的完备化。

这一步非常容易。因为你很容易看出来 (X,d) 和 $(X',\hat{d})$ 是等距同构的。我们不再赘述。

Step 4：最后我们证明 $(\hat{X},\hat{d})$ 在等距同构的意义下是唯一的。

不妨设 $(\tilde{X},\tilde{d})$ 为另一个 (X,d) 的完备化。那么根据定义，存在等距嵌入 $f:X\to\hat{X}$, $g:X\to\tilde{X}$ 使得 $\overline{f(X)}=\hat{X}$, $\overline{g(X)}=\tilde{X}$。

[18]事实上我在写这里的时候才意识到度量有着非常好的性质：度量空间的任何子集都可以称为子空间！这太美妙了。

我们现在已经很清楚 $\hat{X}$ 中的元素可以表示为 X 中 Cauchy 列的等价类，自然我们会思考 $\tilde{X}$ 是否也可以类似地表示为 X 中 Cauchy 列的等价类？为此，我们需要考查 $g(X)$ 在 $\tilde{X}$ 中的作用。

根据我们之前提过的聚点的定义，这意味着对任意 $\tilde{x} \in \tilde{X} = \overline{g(X)}$，对 $\tilde{x}$ 的任意邻域 U，$(U - \{x\}) \cap g(X) \neq \varnothing$，不妨取 $U_n = B(x, \frac{1}{n}) := \{y \mid d(x,y) < \frac{1}{n}\}$，则 $(U_n - \{x\}) \cap g(X) \neq \varnothing$，取 $g(x_n) \in U_n - \{x\}$，那么容易验证 $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = \tilde{x}$，因此 $\{g(x_n)\}$ 为 Cauchy 列，自然其原像 $\{x_n\}$ 也是 Cauchy 列，因为它们是等距同构的。这就说明 $\tilde{X}$ 中的每一个元素均可以作为 $g(X)$ 中 Cauchy 列的极限。

这就启示我们去将 $\hat{X}$ 与 $\tilde{X}$ 通过 Cauchy 列对应起来，我们自然猜想等距同构应当为：

$$\begin{aligned} h :& \hat{X} \to \tilde{X} \\ & \lim_{n\to\infty} f(x_n) \mapsto \lim_{n\to\infty} g(x_n) \end{aligned}$$

毕竟 $\hat{X}$ 中的元素可以表示为 $f(X) = X'$ 中 Cauchy 列的极限，我们自然想到把 $f(x_n)$ 还原成 x_n，再映射到 $g(x_n)$，这样似乎就建立起了一一对应。不过我们自然要验证这么做的合理性：

- 我们需要验证 h 是良定义的，因为 $\hat{X}$ 中的元素可以作为不同 Cauchy 列的极限，我们必须确保不同的 Cauchy 列在 $\tilde{X}$ 中收敛到同一极限，这保证了映射的单值性。
- 我们必须验证这是一个等距的映射。
- 我们需要验证这是个双射，不过其实我们只需要验证它是满射，因为单射可以直接由等距给出。

首先不妨设 $\alpha = [\{x_n\}] = [\{y_n\}] \in \hat{X}$，$x_n, y_n \in X$，那么 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$，$g$ 为等距嵌入，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{d}(g(x_n), g(y_n)) = 0$，这就指出 $[\{g(x_n)\}] = [\{g(y_n)\}]$，即 $h(\alpha)$ 是单值的。

然后不妨设 $\alpha = [\{a_n\}], \beta = [\{b_n\}] \in \hat{X}$，那么

$$\hat{d}(\alpha, \beta) = \lim_{n\to\infty} \hat{d}(\alpha_n, \beta_n) = \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = \lim_{n\to\infty} \tilde{d}(g(a_n), g(b_n)) = \tilde{d}(h(\alpha), h(\beta))$$

所以它是等距的。因此为单射。

最后根据我们之前说过的，$\tilde{X}$ 中的任何元素 $\tilde{x}$ 都可以作为 $g(X)$ 中的 Cauchy 列 $\{g(x_n)\}$ 的极限，那么只需要取 $\hat{x} = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$，自然就有 $h(\hat{x}) = \tilde{x}$，所以是满射。

从而 h 为等距同构。

这样就给出了一般度量空间的完备化。

完备度量空间最基本的特征是 Cauchy 列等价于收敛列。然而我们在定义中只要求 Cauchy 列收敛。这自然是因为我们还有下面的命题：

命题 6.29

度量空间中收敛列均为 Cauchy 列。♠

证明留作习题。

6.3.2.2 Dedekind 分割

第二种定义方式是利用 $\mathbb{Q}$ 的 Dedekind 分割来构造实数，它的思想与极限是类似的。几何地来看，我们已经可以很自然地想象实数集形成了一条直线，而每一个实数都是直线上的点。但我们现在尚且不清楚这个直线是怎么样的，我们有的只有满是漏洞的有理数的直线，我们也无法直接将无理数作为孔洞看待（很难直接说清楚“孔洞”是什么东西），因此我们需要切换一种对应方式——我们可以转而将实数对应的“点”的左侧的开射线来表示实数。

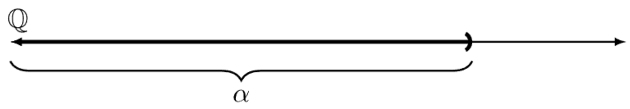


图 6.5: Dedekind 分割的几何直观

这样，你也可以想象，所有比某个实数小的有理数会聚集在这个实数左侧（和极限的过程很像），这样也是一种对应方式。下面我们给出具体定义：

定义 6.55 (Dedekind 分割)

设 $X \subset \mathbb{Q}$，令 $X' = \mathbb{Q} - X$。如果下面三条性质都成立：

1. $X \neq \varnothing$，$X' \neq \varnothing$；
2. 对任意 $x \in X$，$x' \in X'$，都有 $x < x'$；
3. X 中没有最大元，

我们就称 X 或 $X \cup X'$ 是 $\mathbb{Q}$ 的一个戴德金分割 (*Dedekind cut*)。我们用 $\mathcal{R}$ 表示所有 Dedekind 分割组成的集合。 ♣

注 我们之所以不直接把 X 干脆直接定义为 $X := \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \alpha \in \mathbb{R}\}$ 的原因是多方面的：

1. 你尚且不知道 $\mathbb{R}$ 是什么。(这个你可能又会说，$\sqrt{2}$ 可以写成 $\{x \in \mathbb{Q} \mid (x < 0) \vee (x^2 < 2)\}$，但根式无理数只是无理数的冰山一角，无理数的构造方式千奇百怪，在真正定义实数集前，你无法找到一种统一的式子去描述什么是无理数。)
2. 你无法找到一种统一的方式去描述 $\alpha \in \mathbb{R}$ 是怎么用有理数表示的。不是所有无理数都能像 $\sqrt{2}$ 一样简单地用 $x^2 < 2$ 去关联起来。

但就像 Cauchy 列那样，Cauchy 列不需要指出极限是什么就可以判断序列是否具有直观上的收敛（在我们证明实数完备之后它就可以判断序列是否真的收敛），我们如此构造的 Dedekind 分割也避开了直接描述实数，转而采取将 $\mathbb{Q}$ 一分为二的手段，从而将中间模糊的界限定义为实数。这是很精妙的想法，因为你只需要判断你所取的子集是否真的将 $\mathbb{Q}$ 恰好劈开，而不需要关心它是如何逼近它代表的那个实数的。

当然，我们可以重新解读一下三条性质：

- 第一条的含义是实数不包含无穷大。
- 第二条等价于说，如果 $x_1 \in X$，那么对任意的 $x_2 < x_1$，我们就有 $x_2 \in X$。这也表明，如果 $x_1' \in X'$，那么对任意的 $x_2' > x_1'$，我们就有 $x_2' \in X'$。[19]
- 第三条指的是对任意 $x \in X$，总存在 $x' \in X$，使得 $x' > x$。[20]

例题 6.20 我们给出两个 Dedekind 分割的例子：

1. 假设 $\frac{p}{q}$ 是有理数，其中 $p \in \mathbb{Z}$，$q \in \mathbb{Z}_+$ 并且 p 和 q 互素，我们定义

$$X_{\frac{p}{q}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \frac{p}{q}\}$$

这个例子将给出所有的有理数（注意，这里是实现了有理数嵌入实数）。

[19] 因此 $\mathbb{Q}$ 就被很好地分成了完整的两块：X 和 $\mathbb{Q} - X$，而且直观上来看 X 在 $\mathbb{Q} - X$ 的左边。不会出现 X 与 $\mathbb{Q} - X$ 交错排列的情况。

[20] 你可以思考我们为什么要求 Dedekind 分割不包含最大元，这是因为如果包含最大元，那么所有对应于无理数的 Dedekind 分割是不满足条件的（它当然不会有最大元！因为那是个无理数！）。

2. 我们定义 $X_{\sqrt{2}}$ 如下：

$$X_{\sqrt{2}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid (x < 0) \vee (x^2 < 2)\}$$

这个例子将给出我们所熟悉的 $\sqrt{2}$。你可以思考如何给出其它的根式无理数。

这样我们给出了实数的雏形，至少我们有了“实数”集 $\mathcal{R}$。接着我们需要定义上面的结构，即代数结构与序结构。和 Cauchy 列不一样，我们这里先定义序结构，因为它可以自然由集合的包含关系（它是偏序关系）诱导。

定义 6.56 (实数的序结构)

对任意的 $X, Y \in \mathcal{R}$，如果

- $X = Y$，则称 $X = Y$；
- $X \subset Y$ 且 $X \neq Y$，我们称 $X < Y$。

♣

注 你看到第一句话的时候可能会很莫名其妙，这其实是在用集合的相等来定义实数的相等，第一个等号是作为集合而言的，第二个等号是作为实数而言的。

现在我们来证明 $<$ 是一个严格全序关系。

- $\forall\, X \in \mathcal{R},\ X = X \Rightarrow X \not< X$。
- $\forall\, X, Y, Z \in \mathcal{R},\ (X < Y) \wedge (Y < Z) \Rightarrow (X \subset Y \subset Z) \wedge (X \neq Y \neq Z) \Rightarrow X < Z$，注意，$X \neq Z$ 不是直接由 $X \neq Y,\ Y \neq Z$ 推出的，它还借助了 $X \subset Y \subset Z$ 这一条件。
- $\forall\, X, Y \in \mathcal{R},\ X < Y \Rightarrow X \subset Y, X \neq Y \Rightarrow Y \not\subset X \Rightarrow Y \not< X$。
- $\forall\, X, Y \in \mathcal{R}$，我们不妨设 $X \not< Y,\ X \neq Y$，要证 $X > Y$。由 $X \not< Y$ 可知 $X \not\subset Y$，因此存在 $x \in X,\ x \notin Y$，那么自然有 $x \in \mathbb{Q} - Y$，于是 Y 中有理数均小于 x，从而 $Y \subset X$，故 $Y < X$。

那么根据定义，$<$ 为严格全序。

一件十分有趣而美妙的事情是，仅仅利用序结构我们就可以证明 $\mathcal{R}$ 的完备性，但这种完备性当然不是通过 Cauchy 完备性得到的，我们需要使用实数完备性的另外一个表述：最小上界原理。当然，那些表述是彼此等价的，所以我们可以转而验证其它的表述成立而同样得到完备性。

回顾一下最小上界原理的表述：

定理 6.13 (实数完备性 Ver.2：最小上界原理)

若 $\varnothing \neq \mathcal{X} \subset \mathcal{R}$ 有上界，那么它有唯一的最小上界。

♡

注 这里的上界定义与我们早在 6.1 节介绍序关系时定义的上界一致。上确界亦然。

证明仍然一定程度上依靠了我们的直观感受，想象一下，$\mathcal{X}$ 的几何直观不是一堆点，而是一堆套娃的开射线。$\mathcal{X}$ 有上界，说明这堆开射线在右边有个限度，那么我们要找上确界，自然只需要取最右边的那条射线即可（虽然不一定存在最右的射线），但这个操作在集合论中是通过取并运算得到的。

证明 记 $\bar{X} := \bigcup\limits_{X \in \mathcal{X}} X$，下证 $\bar{X}$ 为 $\mathcal{X}$ 的上确界。

首先我们需要证明 $\bar{X}$ 是个 Dedekind 分割。

- $\bar{X} \neq \varnothing$ 显然，而 $\mathcal{X}$ 有上界，不妨记为 X'，那么 $\bar{X} \subset X' \Rightarrow \mathbb{Q} - \bar{X} \supset \mathbb{Q} - X'$，$\mathbb{Q} - X'$ 非空，故 $\mathbb{Q} - \bar{X}$ 非空。
- 对任意 $x \in \bar{X},\ x' \in \mathbb{Q} - \bar{X}$，存在 $X \in \mathcal{X}$ 使得 $x \in X$，而 $\mathbb{Q} - \bar{X} \subset \mathbb{Q} - X$，所以 $x < x'$。
- 如果 $\bar{X}$ 中有最大元，不妨设为 $\bar{x}$，那么存在 X 使得 $\bar{x} \in X$，显然 $\bar{x}$ 也是 X 的最大元，矛盾。故 $\bar{X}$ 无最大元。

于是 $\bar{X}$ 为 Dedekind 分割。

然后我们要证明 $\bar{X}$ 为 $\mathcal{X}$ 上确界，这个过程分为两步，第一步是证明 $\bar{X}$ 为上界，第二步是证明 $\bar{X}$ 是最小的上界。

注意到 $\forall X \in \mathcal{X}$, $X \subset \bigcup_{X\in\mathcal{X}} X = \bar{X}$，于是自然由非严格偏序的定义，$X \subset \bar{X} \Leftrightarrow X \leq \bar{X}$，因此 $\bar{X}$ 是 $\mathcal{X}$ 的上界。

再设 X' 为 $\mathcal{X}$ 上界，则对 $\forall X \in \mathcal{X}$, $X \leq X' \Rightarrow X \subset X' \Rightarrow \bar{X} \subset X' \Rightarrow \bar{X} \leq X'$，所以 $\bar{X}$ 是最小上界。

所以 $\bar{X}$ 是 $\mathcal{X}$ 的上确界。唯一性是显然的（而且和 $\mathcal{R}$ 其实没啥关系，你回顾 6.1 节我们讲过的东西会发现任何情况下上确界当然都是唯一的。）。

接着我们可以再去定义 $\mathcal{R}$ 上的代数结构。

定义 6.57 (加法)

对 $\forall X, Y \in \mathcal{R}$，我们定义

$$X + Y := \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$$

♣

注 由于我们定义乘法时要用到加法的一些性质，所以我们需要先验证加法的性质再给出乘法的相关定义。

我们当然需要验证很多东西，比如加法是否良定义，$(\mathcal{R}, +)$ 是否构成 Abel 群

6.4 无穷级数

6.5 线性空间

第六章 练习

1. 集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 上可以定义多少种等价关系？
2. 我们定义平面上两个点 (x_0, y_0) 和 (x_1, y_1) 存在关系 $\sim$，如果它们满足 $y_0 - x_0^2 = y_1 - x_1^2$。验证 $\sim$ 是一个等价关系，并形容一下这个等价类。
3. 设 $Y \subseteq X$ 非空，$\sim$ 为 X 上的等价关系，证明 $\sim$ 对 Y 的限制 $\sim_Y$ 仍然是等价关系。
4. 下面是一个关于“若关系 $\sim$ 对称传递则自反”的伪证，看看哪里出了纰漏:

   因为 $\sim$ 对称，$a \sim b \Rightarrow b \sim a$。因为 $\sim$ 传递，$(a \sim b) \wedge (b \sim a) \Rightarrow a \sim a$，证毕。

5. (例 6.3(2) 的验证) 设 $f : A \to B$ 为满射，我们在 A 上定义关系 $\sim$ 为:

   $$a_0 \sim a_1 :\Leftrightarrow f(a_0) = f(a_1)$$

   (a). 证明 $\sim$ 为等价关系；
   (b). 证明 $A/\sim$ 与 B 间存在双射。
6. 设 R 为 X 上的关系，S 为 Y 上的关系。定义关系 $X \times Y$ 上的关系 $R \times S$ 为:

   $$(x, y)(R \times S)(u, v) :\Leftrightarrow (xRu) \wedge (ySv), \quad (x, y) \in R,\ (u, v) \in S$$

   证明：如果 R 和 S 均为等价关系，那么 $R \times S$ 也是等价关系。

7. 设 $\sim$ 和 $\dot{\sim}$ 分别为 X 和 Y 上的等价关系。假设映射 $f \in Y^X$ 满足

$$x \sim y \Rightarrow f(x) \dot{\sim} f(y), \quad x, y \in X$$

证明存在唯一的映射 $f' : X/\sim \to Y/\dot{\sim}$ 使得

$$p_Y \circ f = f' \circ p_X$$

这里 p_X 和 p_Y 分别为 X 和 Y 上的商映射。

8. 我们定义平面上两个点 (x_0, y_0) 和 (x_1, y_1) 存在关系 $<$:

$$(x_0, y_0) < (x_1, y_1) :\Leftrightarrow (y_0 - x_0^2 < y_1 - x_1^2) \vee ((y_0 - x_0^2 = y_1 - x_1^2) \wedge (x_0 < x_1))$$

证明 $<$ 是平面上的序关系，并几何地描述它。

9. 设 $Y \subseteq X$ 非空，$\leq$ 为 X 上的偏序关系，证明 $\leq$ 对 Y 的限制 $\leq_Y$ 仍然是偏序关系。
10. 验证例 6.4 中的关系为序关系。
11. 验证例 6.6 中的常序关系有相同的序结构。
12. 证明：紧接前元和紧接后元如果存在，则是唯一的。
13. 证明推论 6.1。
14. 若 C 为集合 A 上的关系，我们再在 A 上定义新的关系 D 为：$(b, a) \in D :\Leftrightarrow (a, b) \in C$
    (a). 证明 C 是对称的当且仅当 $C = D$；
    (b). 证明如果 C 是序关系，那么 D 也是；
    (c). 证明命题 6.1。
15. 设 $(X, \leq)$ 为偏序集，A, B, C, D 为 X 的非空子集。设 A 和 B 上有界，C 和 D 下有界。假设下面出现的确界都存在，证明以下结论：
    (a). $\sup(A \cup B) = \sup\{\sup(A), \sup(B)\}$，$\inf(C \cup D) = \inf\{\inf(C), \inf(D)\}$；
    (b). 若 $A \subseteq B$，$C \subseteq D$，则 $\sup(A) \leq \sup(B)$，$\inf(C) \geq \inf(D)$；
    (c). 若 $A \cap B$ 和 $C \cap D$ 均非空，那么 $\sup(A \cap B) \leq \inf\{\sup(A), \sup(B)\}$，$\inf(C \cap D) \geq \sup\{\inf(C), \inf(D)\}$；
    (d). 证明 (a) 中结论无法再加强到 $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$(Hint: 考虑一个非空集合的幂集)。
16. 举个例子来说明偏序集 $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ 可能不是全序集。
17. 证明例 6.8(1)。
18. 验证例 6.9(2)。
19. 集合 X 上的运算 $\circledast$ 是反对称的 *(Anticommutative)*，如果其满足：
    (a). 存在一个右单位元 $r := r_X$，即，$\exists r \in X : x \circledast r = x$，$x \in X$
    (b). $x \circledast y = r \Leftrightarrow (x \circledast y) \circledast (y \circledast x) = r \Leftrightarrow x = y \qquad x, y \in X$

    证明：当 X 中元素多于一个时，其上一个反对称的运算 $\circledast$ 不交换，且无单位元。
20. 设 $\circledast$ 和 $\circledcirc$ 分别为 X 和 Y 上的反对称运算。设 $f : X \to Y$ 满足：

$$f(r_X) = r_Y, \quad f(x \circledast y) = f(x) \circledcirc f(y), \qquad x, y \in X$$

证明：
    (a). $x \sim y :\Leftrightarrow f(x \circledast y) = r_Y$ 定义了 X 上的等价关系；
    (b). 映射

$$\tilde{f} : X/\sim \to Y, \quad [x] \mapsto f(x)$$

是良定义的，且为双射。如果 f 为满射，则 $\tilde{f}$ 为双射。

21. **(数学归纳法)** 设 $\mathcal{A}(n)$ 为关于自然数 n 的陈述。若 $\mathcal{A}(0)$ 为真，$\mathcal{A}(n)$ 为真可以推出 $\mathcal{A}(n++)$ 为真。证明 $\mathcal{A}(n)$ 对所有自然数 n 均为真。
22. 证明引理 6.4。
23. 证明命题 6.8。
24. 证明命题 6.9。
25. **(强归纳法原理)** 证明命题 6.10。(Hint：你可以曲线救国，考虑一个新的性质 $Q(n)$: 对 $\forall\, m_0 \leq m < n$，$P(m)$ 成立。通过证明 $Q(n)$ 对任意自然数 $n \geq m_0$ 成立来间接证明我们的命题。)
26. **(向后归纳原理)** 设 n 是自然数且设 $P(m)$ 是一个依赖于自然数的性质，它满足条件：只要 $P(m++)$ 成立则 $P(m)$ 也成立。假设 $P(n)$ 成立，证明对于一切自然数 $m \leq n$，$P(m)$ 成立。(Hint: 对 n 归纳)
27. 证明引理 6.5。
28. 证明引理 6.6。
29. 证明命题 6.11。
30. 证明完全平方公式：$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 对于一切自然数 a, b 成立。
31. 证明推论 6.4。
32. **(不从头开始的归纳)** 证明命题 6.12。
33. 验证例 6.17。
34. 证明命题 6.14。
35. 验证整数减法是良定义的，即 $(a,b) \sim (a',b')$，$(c,d) \sim (c',d')$，则 $(a,b)-(c,d) \sim (a',b')-(c',d')$。
36. 证明：$(-1) \times a = -a$。
37. 证明命题 6.16。
38. 证明命题 6.17。
39. 证明命题 6.18。
40. 证明命题 6.5。
41. **(整数不适用于归纳法)** 证明整数不直接适用于归纳法原理。更准确地说，你可以试着给出一个依赖于整数 z 的性质 $P(z)$ 的例子，使得 $P(0)$ 成立，而且对于一切整数 z，$P(z)$ 成立蕴含 $P(z++)$ 成立，但是 $P(z)$ 并不对一切整数 z 成立。于是归纳法和整数打交道可能没有和自然数打交道那么愉快。
42. 验证有理数的相反数与减法是良定义的。
43. 证明命题 6.19。
44. 证明命题 6.20。并验证负乘法是反序的：若 p, q, r 为有理数且满足 $p < q$，r 为负有理数，则 $pr > qr$。
45. 证明命题 6.21。
46. 证明命题 6.22。
47. 证明命题 6.23。(Hint：使用最小数原理)
48. (a). 证明不存在严格递减的无穷自然数列；
    (b). 是否存在严格递减的无穷整数列？是否存在严格递减的无穷正有理数列？想想看为什么。
49. 证明引理 6.7 中关于乘法的合理性。

50. 验证 $(\mathbb{R}, +, \times)$ 构成一个域（在 Cauchy 列的定义下），并在其上定义减法与除法，且验证其合理性。
51. 证明命题 6.29。

第七章 集合论初步

第八章 函数

本章介绍数集上的函数性质，且以单变量函数为主。

8.1 函数的连续性

本节意在介绍一些分析味道更浓的函数性质。

8.1.1 函数极限

8.1.1.1 函数在无穷大处的极限

首先我们来研究函数在无穷大处的极限，这与数列极限是极为相似的，都是观察对象在不断增大时的行为，无非数列是极限的离散情形，函数是极限的连续情形。

不过函数极限也略有区别，毕竟数列的下标取值一般是 $\mathbb{N}$（或者说 $\mathbb{N}^+$），$n \to +\infty$，但函数的自变量取值在 $\mathbb{R}$ 上，所以 $x \to \pm\infty$。因此我们此时考虑 $|x| \to \infty$，就得到类似的情形。

当然，很多时候我们不能要求函数的定义域能完美覆盖 $\mathbb{R}$，因此我们之后以一般情况为准。

不过你已经很熟悉了极限的精髓，因此我们可以直接介绍下面的定义：

定义 8.1 (函数的极限)

设函数 $y = f(x)$ 至少在 $|x| > a > 0$ 有定义。若存在实数 l 使得对于任意给定的正数 ε，总存在正数 $X = X(\varepsilon) > a$，使得当 $|x| > X$ 时有

$$|f(x) - l| < \varepsilon,$$

则称当 x 趋向无穷大时，$f(x)$ 以 l 为极限。记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l, \quad 或 \quad f(x) \to l\ (x \to \infty).$$

♣

注 这个定义是易于理解的，你完全可以类比前面数列极限的定义。自然，我们说函数极限存在，指的是 l 存在。

由于我们只关心函数在足够远的地方的行为，因此我们不要求函数在所有地方都有定义。

注意定义中的 x 是正负都要求的，我们可以削弱这个条件，得到 $x \to +\infty$ 与 $x \to -\infty$ 的情形，你可以尝试自己给出相关定义，这两种极限记为：

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l, \quad 与 \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = l.$$

称为 $f(x)$ 在正（或负）无穷大处的极限。这两种极限也称为 $f(x)$ 在无穷大处的单侧极限。不难看出，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在的充分必要条件是两个单侧极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 存在且相等。

8.1.2 函数的连续性

8.1.3 闭区间上的连续函数

8.2 微分中值定理

8.3 L' Hospital 法则

8.4 Taylor 定理

8.5 微积分基本定理

8.6 常微分方程初步

8.7 多变量函数初步

8.8 复变函数初步

第九章 不等式

第十章 解析几何

10.1 线性代数初步

10.2 仿射变换

第十一章 概率论与数理统计

11.1 概率密度函数

第十二章 代数学基础

本章向大家介绍少许的初等数论与抽象代数。

12.1 整除理论

12.1.1 整除

12.1.1.1 带余除法

这部分将带你回顾你在小学就学过的除法，即所谓带余除法。不过我们会严谨地建立起这个体系。在此之前，不如先稍微说说咱为啥要花大力气来干这件事情，以至于发展出一个分支——数论。

你已经熟知整数上可以执行加法、减法和乘法，整数对这三种运算是封闭的。你也知道对于非零有理数来讲，我们可以执行加减乘除四种运算。但整数的除法不是封闭的，除法在整数上的行为比另外三种运算实在是复杂得多。为了理清里面的幺蛾子，我们有必要好好搞清楚除法在整数上到底是如何作用的。

首先我们理所应当会去考虑除法执行得比较好的情况，也就是说，两个整数相除还是整数。这种情况你很熟悉，即所谓整除。

定义 12.1 (整除)

设 $a,b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$。若存在 $c \in \mathbb{Z}$ 使得 $a = bc$，则称 a 被 b 整除 (*Divisible*)，记作 $b \mid a$。称 b 为 a 的因子 (*Factor*) 或约数 (*Divisor*)，a 为 b 的倍数 (*Multiple*)。若 c 不存在，则称 a 不被 b 整除，记作 $b \nmid a$。♣

这当然是你很熟悉的概念，我们无需解释更多。但唯一可能要注意的是，由于我们不能在整数上定义除法（因为我们在 6.1.3 就讲过，你在集合上定义的运算必然是对集合封闭的，但除法显然对整数不封闭），所以我们应当借助乘法来表达我们的想法。你很容易看到，整除满足这么一些性质：

命题 12.1

1. 0 是任何非零整数的倍数。
2. 任何非零整数的因子必然包含 1 和它自身，这两个数称为它的平凡因子 (*Trivial factor*)。任何数是它自己的倍数。♠

以及更进一步：

命题 12.2

1. 若 $b \mid a$, $c \neq 0$，则 $bc \mid ca$，反之亦然。
   特别地，取 $c = \pm 1$，则 $b \mid a \Leftrightarrow \pm b \mid \pm a$；
2. 若 $b \mid c$, $c \mid a$，则 $b \mid a$；
3. 若 $a \mid b$, $a \mid c$，则 $\forall\, x, y \in \mathbb{Z}$, $a \mid bx + cy$，反之亦然。
   更一般地，若 $a \mid b_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$，那么 $\forall\, x_1, \cdots, x_k \in \mathbb{Z}$，有
$$a \mid b_1x_1 + \cdots + b_nx_n$$

反之亦然。

4. 若 $b \mid a$ 且 $a \neq 0$，则 $|b| \leq |a|$。
   从而若 $a \mid b$，$b \mid a$，则 $|a| = |b|$ 即 $a = \pm b$。

证明略，因为真没啥好证的，都是很平凡的玩意，不过我还是很乐意看到你们能动手推一下，这是好习惯。

注 要提一下，第四条为我们证明两数相等提供的新的手段。我们只需要证明它们互相整除，并且同号（这一点往往是已知条件）即可。

而一般的情况下，a 不一定是 b 的倍数，此时 a 如何与 b 执行除法呢？我们只需要把 a 用离它最近的而且比它小一点的 b 的倍数去替代就行了，然后 a 就可以写成这个倍数加上多出来的一部分。这是你小学就学过的带余除法，或者叫欧几里得除法 (*Euclidean division*)：

定理 12.1 (欧几里得除法)

设 $a, b \in \mathbb{Z}$，$b \neq 0$，则 $\exists\, q, r \in \mathbb{Z}\ s.t.\ a = bq + r$，$0 \leq r \leq |b|$，且 r, q 是唯一确定的。

啥意思呢，就是说，你有一根长为 a 的面包，然后每次切下来 b 这么长的一段，切了 q 次之后，剩下了 r 这么长的面包，你切不下去了，因为太短了。显然，就这么一种切法。不过证明我们还是得好好证：

证明 我们要将我们刚才的想法变成数学操作。首先，如何思考切面包这件事情？无非得到一系列数：$a-b$，$a-2b$，$a-3b, \cdots, a-kb, \cdots$。

那不妨构造一个集合来表示这些数：$I = \{a - bk \mid k \in \mathbb{Z}\}$。

什么叫砍不下去了？就是 $a - bk$ 已经足够小了，比 $|b|$ 还小，但它还是正的。也就是说，它是这个集合的最小正整数。那么我们现在只需要找到 I 的最小正整数，并且判断它满足条件即可。

取 $k = -2b|a|$，则 $a - kb = a + 2b^2|a| = |a|(2b^2 + \frac{a}{|a|}) \geq 0$

从而 $I \cap \mathbb{N} \neq \varnothing$。于是由最小数原理，$I$ 中存在最小自然数，设为 r，那么存在相应的 q 使得 $r = a - qb$。现在我们断言 $0 \leq r < |b|$。

若不然，则 $r > |b|$，也就是说你这面包还能继续切，$r - |b| = a - (q + \frac{|b|}{b})b > 0$，那么 $r - |b| \in I$，这就与 r 的最小性矛盾了。因此 $0 \leq r < |b|$。这样才算切到底。

这样只是存在性，我们接下来证明唯一性。

假如 $a = q_1 b + r_1 = q_2 b + r_2$，$0 \leq r_1, r_2 \leq |b|$，则 $(q_1 - q_2)b = r_2 - r_1$。

但 $-|b| < |r_2 - r_1| < |b|$，所以 $r_2 - r_1$ 必须为 0，从而 $r_2 = r_1$，$(q_1 - q_2)b = 0 \Rightarrow q_1 = q_2$。所以唯一性成立。

注 对 $a = bq + r$，$0 \leq r < |b|$，这里 q 称作商 (*Quotient*)，r 称作余数 (*Remainder*)。

当然我注释了个废话，毕竟大家懂得都懂。

因此对于整数上的除法的定义，我们就说清楚了。接下来我们深入讨论除法在整数上的性质。

12.1.1.2 最大公约数

现在我们介绍一个十分重要的概念：最大公约数。

定义 12.2 (最大公约数)

设 a,b 为非零整数（不全为零），d 称为 a,b 的最大公约数 (*Greatest common divisor*)，若：

1. $d \mid a$，$d \mid b$
2. 若 $d' \mid a$，$d' \mid b$，则 $d' \le d$

记 $d = (a,b)$ 或 $\gcd(a,b)$。若 $(a,b) = 1$，称 a,b 互素 (*Coprime*)。

这当然是一个很顾名思义的定义。首先每个整数都有约数，那对于两个整数来讲，难免有共同的约数（当然你可以注意到 1 是任何两个数的公约数），称为公约数。那么我们当然会对最大的公约数感兴趣。什么是公约数？就是同时整除两个数。什么是最大的公约数？就是任何一个公约数都不比它大。那很自然地就给出了上面两个约束。不过要注意，最大公约数是正的，这从定义就可以看出来（虽然有些地方是额外指出来的，而且仅仅是方便起见作此规定）。

不过事实上，最大公约数所表现出来的性质，比第二条要好得多：

命题 12.3

若 $d \mid a$，$d \mid b$，那么 $d \mid (a,b)$。

也就是说，任何一个公约数不只是不大于最大公约数，更是最大公约数的因子。但是证明这里先暂且不给，在介绍了更多性质后给出。

你很容易看到最大公约数有这么几条性质：

命题 12.4

设 $a,b \in \mathbb{Z}$，则

1. $(\pm a, \pm b) = (a,b)$；
2. $(a,b) = (b,a)$；
3. 若 $a \ne 0$，则 $(a,a) = (a,0) = |a|$；
4. $(a,b) = (a+by, b) = (a, b+ax)$，$\forall\, x,y \in \mathbb{Z}$。

都挺好证的，这里就不解释了。

接下来一个定理很重要，它指出：两个数的线性组合恰好为它们最大公约数的所有倍数。

定理 12.2

设 $d = (a,b)$，那么

$$\{ax + by \mid x,y \in \mathbb{Z}\} = d\mathbb{Z}$$

这里 $d\mathbb{Z} := \{dz \mid z \in \mathbb{Z}\}$。特别地，

1. $\exists\, x,y \in \mathbb{Z}$ *s.t.* $(a,b) = ax + by$；
2. $(a,b) = 1 \Leftrightarrow \exists\, x,y \in \mathbb{Z}$ *s.t.* $ax + by = 1$。

证明 证明两个集合相等的一种常见方法是证明它们互相包含。我们采取这个策略。

记 $I = \{ax + by \mid x,y \in \mathbb{Z}\}$。首先很容易看出来 $I \subseteq d\mathbb{Z}$，因为 $d \mid a$，$d \mid b$，而命题 12.2(3) 指出 $d \mid ax + by$，因此 $ax + by$ 是 d 的倍数，所以 $\forall\, ax + by \in I$，$ax + by \in d\mathbb{Z}$，故 $I \subseteq d\mathbb{Z}$。

下面要证明 $d\mathbb{Z} \subseteq I$，这就略有复杂。我们的考虑是，如果 $d \in I$，那么 $d\mathbb{Z} \subseteq I$。这是因为 $d \in I \Rightarrow \exists\, x,y \in \mathbb{Z}$，$d = ax + by$，于是 $\forall\, dz \in d\mathbb{Z}$，$dz = (ax+by)z = a(xz) + b(yz) \in I$，从而 $d\mathbb{Z} \in I$。

因此我们考虑证明 $d \in I$。

按道理，d 应该是 I 中最小的元素，那么我们考虑取 $d_1 = ax_1 + by_1 \in I$ 为 I 中最小正整数，再证明 $d = d_1$。而 $d \mid d_1 \Rightarrow d \le d_1$ 是显然的，所以我们只需要证明 $d_1 \le d$。而这件事可以由 d_1 为 a,b 公因数推出，所以我们考虑证明 d_1 是 a,b 公因数。

若 $d_1 \nmid a$，则 $a = qd_1 + r,\ 0 < r < d_1$。于是

$$r = a - qd_1 = a - q(ax_1 + by_1) = (1 - qx_1)a + (-qy_1)b \in I$$

这意味着 r 是 I 中比 d_1 更小的正整数，这和 d_1 的最小性矛盾。因此 $d_1 \mid a$。同理 $d_1 \mid b$，所以 d_1 是 a,b 的公因数，再根据最大公约数的定义，就有 $d_1 \le d$。

于是 $d = d_1$，就完成了证明。

注

1. 其实这件事本质上说的是两个整数生成的理想一定是主理想，这是我们后面要讲的环的内容。建议学了环之后再倒回来看看这个定理。
2. 取 $d = (a,b)$，则 $\exists\, x, y \in \mathbb{Z}\ s.t.\ d = ax + by$。这个等式称为 $Bézout's\ identity$，或贝祖等式，裴蜀定理。

而更进一步的结论是：

定理 12.3

若非空集合 $I \subset \mathbb{Z}$ 满足：

1. $\forall\, x, y \in I \Rightarrow x \pm y \in I$;
2. $\forall\, x \in I,\ r \in \mathbb{Z} \Rightarrow rx \in I$,

即 I 为 $\mathbb{Z}$ 中理想 (*Ideal*)，则 $I = d\mathbb{Z}$，其中 d 是非负整数。故 $\mathbb{Z}$ 中理想均为主理想 (*Principle ideal*)。

注 当然，抛开新引入的术语不谈，仅仅是理解这两条定理的内容并不是什么难事。但学习了环论之后最好回来看看这两条定理。

证明 证明可以参考上一条定理的 proof，思想是类似的。

首先我们需要确定 d 是谁，我们猜测它应当是 I 中最小正整数，于是我们取 $d = \min\{n \in I \mid n > 0\}$，那么

$$d\mathbb{Z} = \{rd \mid r \in \mathbb{Z}, d \in I\} \subset I$$

下证 $I \subset d\mathbb{Z}$，即 I 中每个数都是 d 的倍数。

不妨设任意的 $n \in I$，要证 $d \mid n$。若不然，则有 $n = qd + r,\ 0 < r < d$，那么 $r = n - qd \in I$，于是和 d 的最小性矛盾。所以 $d \mid n$。于是 $I \subset d\mathbb{Z}$。

从而 $I = d\mathbb{Z}$，便完成了证明。

接着我们再列举几条最大公约数的常用性质。

命题 12.5

1. $d_1 \mid a,\ d_1 \mid b$，则 $d_1 \mid (a,b)$。
2. 若 $m > 0$，则 $m(a,b) = (ma, mb)$。
3. $(a,b) = d$，则 $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$。
4. $(a,m) = (b,m) = 1$，则 $(ab, m) = 1$。
5. 若 $c \mid ab$ 且 $(c,b) = 1$，则 $c \mid a$。

证明 我们这里仅证明第一条，其余留作习题。

由 *Bézout* 等式，不妨设 $(a,b)=ax+by$，显然 $d_1 \mid ax+by$，所以 $d_1 \mid (a,b)$。

最后，我们也可以类似地定义 n 个数的最大公约数。

定义 12.3 (最大公约数)

设有 n 个非零整数 $a_1,\cdots,a_n$，$n \geq 2$，则我们称 d 为 $a_1,\cdots,a_n$ 的最大公约数，记作 $(a_1,\cdots,a_n)$ 或 $\gcd(a_1,\cdots,a_n)$，若

1. $d \mid a_i,\ \forall\, i=1,\cdots,n$;
2. $d' \mid a_i,\ \forall\, i=1,\cdots,n \Rightarrow d' \leq d$。

♣

同样你可以验证

$$\{a_1x_1+\cdots+a_nx_n \mid x_i \in \mathbb{Z}\} =: a_1\mathbb{Z}+\cdots+a_n\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$$

和前面的思路是类似的。于是基于这点我们也有相应的 *Bézout* 等式：

$$\exists\, r_1,\cdots,r_n \in \mathbb{Z}\ s.t.\ d = a_1r_1\cdots+a_nr_n$$

12.1.1.3 辗转相除法

这里我们介绍一种如何求得两个数最大公约数的算法：欧几里得算法 (*Euclidean Algorithm*)，又称辗转相除法。

算法流程如下：

已知 $a,b \in \mathbb{Z}$，$(a,b) \neq (0,0)$，欲求 $\gcd(a,b)$。

- 若 $b=0$，则 $(a,b)=(a,0)=|a|$。
- 若 $b \neq 0$，则 $a=bq_1+r_1$，$0 \leq r_1 < |b|$，
  - 若 $r_1=0$，则参考 $b=0$。
  - 若 $r_1 \neq 0$，则 $b=r_1q_2+r_2$，$0 \leq r_2 < r_1$，
    - 若 $r_2=0$，则参考 $b=0$。
    - 若 $r_2 \neq 0$，则 $r_1=r_2q_3+r_3$，$0 \leq r_3 < r_2$，
    - $\cdots$
    - $\cdots$

注意到 $\{r_n\}$ 是递减的，故算法在有限步之后必然得到 $r_{n-2}=r_{n-1}q_n+r_n$，$r_n=0$，这样的 n 必然存在。从而 $(a,b)=(b,r_1)=(r_1,r_2)=\cdots=(r_{n-2},r_{n-1})=r_{n-1}>0$。

只要你注意到多个数的最大公约数实际上可以递归地求出之后，就可以利用该算法计算多个数的最大公约数。

举个例子，如何计算 $(114,514)$？流程如下：

$$514 = 114 \times 4 + 58$$

$$114 = 58 \times 1 + 56$$

$$58 = 56 \times 1 + 2$$

$$2 \mid 56$$

于是 $(114, 514) = 2$。

辗转相除法还有一个优点。综合算法中的所有等式，逐项代入后可以得到相应的 $Bézout$ 等式。比如在上例中，有

$$58 = (-4) \times 114 + 1 \times 514$$
$$56 = 114 - 58 = 5 \times 114 + (-1) \times 514$$
$$2 = 58 - 56 = (-9) \times 114 + 2 \times 514$$

思想就是用 a, b 的线性组合去逐一表示 $r_1, r_2, \cdots, r_{n-1}$。

12.1.1.4 最小公倍数

和最大公约数相伴的一个概念是最小公倍数。

定义 12.4 (最小公倍数)

设 $a, b \neq 0$，$m \in \mathbb{N}$ 称为 a, b 的最小公倍数 (*Least Common Multiple*)，若

1. $a \mid m$, $b \mid m$;
2. 若 $m' > 0$, $a \mid m'$, $b \mid m'$，则 $m \leq m'$。

记 $m = [a, b]$ 或 $\operatorname{lcm}(a, b)$。

想必这个概念不必过多介绍。作为对偶的概念，它们在很多地方表现出了相似的性质。同样我们可以列举一些最小公倍数的性质：

命题 12.6

设 $a, b \neq 0$，则

1. $a \mid m$, $b \mid m$，则 $[a, b] \mid m$。
2. $[ma, mb] = |m|[a, b]$。
3. $(a, b)[a, b] = |ab|$，特别地，若 a, b 互素，则 $[a, b] = |ab|$。

证明

1. 设 I 为 a, b 的公倍数组成的集合，那么 $\forall x, y \in I$, $x - y \in I$，且 $I \neq \{0\}$，于是 $I = d\mathbb{Z}$，并由最小公倍数定义，d 恰为 $[a, b]$。
2. $ma \mid |m|[a, b]$, $mb \mid |m|[a, b] \Rightarrow [ma, mb] \mid |m|[a, b]$。

   设 $m' = [ma, mb] \Rightarrow ma \mid m'$, $mb \mid m'$
   $$\Rightarrow a \mid \frac{m'}{m}, b \mid \frac{m'}{m} \Rightarrow [a, b] \mid \left|\frac{m'}{m}\right| \Rightarrow |m|[a, b] \mid m'$$
   从而 $[ma, mb] = |m|[a, b]$。
3. 若 $(a, b) = 1$，则 $ax = [a, b] = by$。显然 $[a, b] \leq |ab|$，而 $a \mid by$, $(a, b) = 1 \Rightarrow a \mid y$，故 $|by| \geq |ba| \Rightarrow [a, b] \geq |ab|$，从而 $[a, b] = |ab|$。再考虑一般情况，有
   $$(a, b)[a, b] = (a, b)^2 \left[\frac{a}{(a, b)}, \frac{b}{(a, b)}\right] = (a, b)^2 \cdot \frac{|ab|}{(a, b)^2} = |ab|$$

我们也可以类似地定义多个数的最小公倍数：

定义 12.5 (最小公倍数)

设 $a_1,\cdots,a_n$, $n\geq 2$ 为非零整数，m 称为 $a_1,\cdots,a_n$ 的最小公倍数，若

1. $a_i\mid m,\ \forall\, i=1,\cdots,n$;
2. $m'>0,\ a_i\mid m,\ \forall\, i=1,\cdots,n\Rightarrow m\leq m'$。

♣

自然，第二条可以加强到 $m\mid m'$。

12.1.2 素数与算术基本定理

首先我们回顾素数的定义。

定义 12.6 (素数与合数)

设 $p\geq 2$, $p\in\mathbb{Z}$，若 p 的正约数仅有平凡因子 (*Trivial divisor*)1 和 p 其自身，则称 p 为素数 (*Prime number*)，否则称其为合数 (*Composite number*)。

♣

注 由素数的定义容易得到一个实用的结论：$\forall\, a\in\mathbb{Z}$，若 p 为素数，则 $(a,p)=1$ 或 p。

以及由定义也容易得到一个判别素数的方式：若 n 为合数，则必然有一个不大于 $\sqrt{n}$ 的因子，所以如果 1 到 $\sqrt{n}$ 的所有整数均不整除 n，则 n 为素数。

素数之所以重要，是因为素数通过乘法生成了所有整数，换言之，素数就像堆砌整数大厦的不同形状的砖，每个整数无非是若干个素数的“砖”组合而成的一个房间，而且成分是唯一的。这个事实通过下面的定理给出。

定理 12.4 (算术基本定理 (The fundamental theorem of arithmetic))

每个不等于 1 的正整数可分解为有限个素数的乘积，且如果不计素因子在乘积中的次序，则分解方式唯一。

♡

在证明这个重要的定理之前，我们需要一些引理。

引理 12.1 (欧几里得引理 (Euclidean lemma))

设 p 为素数，则 $p\mid ab\Rightarrow p\mid a$ 或 $p\mid b$。

更一般地，可归纳地证明，若 $p\mid\prod\limits_{i=1}^{n}a_i$，则 p 至少整除其中一个整数。

♡

注 意思是一块完整的砖没法被拆成两半同时属于两个房间。

证明 若 $p\nmid a$，则 $(p,a)=1$，于是 $p\mid ab\Rightarrow p\mid b$。

值得一提的是，对 $\forall\, n\geq 2$, $n\in\mathbb{Z}$, n 的最小正约数 (>1) 必为素数。这件事情虽然十分显然，但它在我们下面一个定理的证明起到了奇妙的作用。

定理 12.5 (欧几里得定理)

素数有无穷多个。

♡

证明 若仅有有限个素数 $p_1,\cdots,p_n$，取 $N=p_1\cdots p_n+1$，有 $(N,p_i)=(1,p_i)=1$，所以 N 的最小正约数不在 $\{p_1,\cdots,p_n\}$ 中，则 N 是一个新的素数，矛盾。

注 这是一个很经典的定理，证法有许多种，这里是最基础的一种。

于是我们可以给出算术基本定理的证明:

证明 (存在性) 设 $X=\{n\in\mathbb{Z}\mid n\geq 2$且不可分解$\}$，若 $X\neq\varnothing$，则存在一个最小的 $n_0\in X$。显然 n_0 必为合数 $\Rightarrow n_0=mn,\ m,n>1\Rightarrow m,n<n_0$。由 n_0 的最小性，$m,n\notin X\Rightarrow m,n$ 可分解 $\Rightarrow n_0$ 可分解，矛盾。

于是 $X=\varnothing$。即每个不小于 2 的整数均可分解。

(唯一性) 设 $n=p_1\cdots p_s=q_1\cdots q_t$，$p_i,q_j$ 是质数。

$p_i\mid n=q_1\cdots q_t$，由引理 12.1，$\exists\, 1\leq j\leq t,\ p_1\mid q_j\Rightarrow p_1=q_j$。不妨设 $j=1\Rightarrow q_2\cdots q_t=p_2\cdots p_s$，归纳可得 $p_i=q_i$，从而唯一。

算术基本定理向我们展示了整数在乘法下的结构，而下面的定理进一步展示了细节。

定理 12.6

$\forall\, n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ 可表示为

$$n=\operatorname{sgn}(n)\cdot\prod_{p\text{ is prime}}p^{\nu_p(n)}$$

其中

1. $\operatorname{sgn}(n)=\frac{n}{|n|}=\pm 1$ 为 n 的符号。
2. $\nu_p(n)\in\mathbb{N}$，且除去有限多个 p 外，$\nu_p(n)=0$。
3. $p\mid n\Leftrightarrow \nu_p(n)>0$。
4. 该表示形式唯一。

♡

注

1. n 的乘积形式称为 n 的因式分解 (*Factorization*)
$$n=\operatorname{sgn}(n)\cdot p_1^{\nu_{p_1}(n)}p_2^{\nu_{p_2}(n)}\cdots p_s^{\nu_{p_s}(n)}$$
这里 $p_i\neq p_j\Leftrightarrow i\neq j$，且 $\nu_{p_i}(n)>0$。
2. 约定 $\nu_p(0)=+\infty$。

我们知道如果 $a\in\mathbb{Q}$，则 a 可以写成 $\frac{m}{n}$ 的形式，这里 $(m,n)=1$，$m,n\in\mathbb{Z}$，$n\neq 0$。于是有下述推论:

推论 12.1

任意非零有理数 $a\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ 可唯一表示成

$$a=\operatorname{sgn}(a)\cdot\prod_{p\text{ is prime}}p^{\nu_p(a)}$$

这里

1. $\operatorname{sgn}(a)=\frac{a}{|a|}$;
2. $\nu_p(a)\in\mathbb{Z}$;
3. 若 $|a|=\frac{m}{n}$，$m,n\in\mathbb{Z}_+$，$(m,n)=1$，则
$$m=\prod_{p:\nu_p(a)>0}p^{\nu_p(a)},\quad n=\prod_{p:\nu_p(a)<0}p^{\nu_p(a)}$$
4. 若 $a=\frac{\alpha}{\beta}$，$\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$，则对任意素数 p
$$\nu_p(a)=\nu_p(\alpha)-\nu_p(\beta)$$

♡

我们自然也能想到，如果一个数整除另外一个数，那么它们的素因子种类应当一致，而且前者相应的指数应当不高于后者。也就是下面的命题。

命题 12.7

设 $n \in \mathbb{Z}_+$，则 $d = \prod\limits_{p \text{ is prime}} p^{\nu_p(d)}$ 为 n 的因子等价于对任意素数 p，$0 \le \nu_p(d) \le \nu_p(n)$。

证明 若 $d \mid n$，则 $n = dd'$，$d' \in \mathbb{Z}_+$。

设 $d = \prod\limits_{p \text{ is prime}} p^{\nu_p(d)}$，$d' = \prod\limits_{p \text{ is prime}} p^{\nu_p(d')}$，$\nu_p(d), \nu_p(d') \ge 0$，则 $n = \prod\limits_{p \text{ is prime}} p^{\nu_p(d)+\nu_p(d')}$。

由唯一性，$\nu_p(n) = \nu_p(d) + \nu_p(d') \ge \nu_p(d) \ge 0$。

反过来，若 $0 \le \nu_p(d) \le \nu_p(n)$ 对任意 p 素成立，令 $d' = \prod\limits_{p \text{ is prime}} p^{\nu_p(n)-\nu_p(d)} \in \mathbb{Z}_+$，则 $n = dd' \Rightarrow d \mid n$。

有一个常见而实用的结论：

$$\max(a, b) + \min(a, b) = a + b, \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$$

在下面的命题中我们要用到这件事。

命题 12.8

设 $a, b \in \mathbb{Z}_+$，则

$$(a, b) = \prod_{p \text{ is prime}} p^{\min(\nu_p(a),\nu_p(b))}, \quad [a, b] = \prod_{p \text{ is prime}} p^{\max(\nu_p(a),\nu_p(b))}$$

证明 设 $d = \prod\limits_{p \text{ is prime}} p^{\min(\nu_p(a),\nu_p(b))}$，要证 $(a, b) = d$，只需证 $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$。而

$$ab = (a, b)[a, b],\ a, b \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow \left(\prod_{p \text{ is prime}} p^{\nu_p(a)}\right)\left(\prod_{p \text{ is prime}} p^{\nu_p(b)}\right) = RHS$$

可以预料，若 $(a, b) = \prod\limits_{p \text{ is prime}} p^{\min(\nu_p(a),\nu_p(b))}$，则根据上面的结论可立得 $[a, b]$ 的因式分解成立。

因此只需证 $(a, b) = \prod\limits_{p \text{ is prime}} p^{\min(\nu_p(a),\nu_p(b))}$。

$$\frac{a}{d} = \prod_{p \text{ is prime}} p^{\nu_p(a)-\min(\nu_p(a),\nu_p(b))}$$

$$\frac{b}{d} = \prod_{p \text{ is prime}} p^{\nu_p(b)-\min(\nu_p(a),\nu_p(b))}$$

于是对任意素数 p，有

$$\begin{aligned} p \mid \frac{a}{d} &\Rightarrow \nu_p(a) - \min(\nu_p(a), \nu_p(b)) > 0 \\ &\Rightarrow \nu_p(b) < \nu_p(a) \\ &\Rightarrow \min(\nu_p(a), \nu_p(b)) = \nu_p(b) \\ &\Rightarrow p \nmid \frac{b}{d} \end{aligned}$$

同理知 $p \mid \frac{b}{d} \Rightarrow p \nmid \frac{a}{d}$。

这就指出 $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$，从而原命题成立。

注 当然这个命题的含义就是展示了最大公约数和最小公倍数的素因子结构与原来两数的关系。如果给出了原来两数的因式分解，就能够很容易求得最大公约数与最小公倍数，但求一个数的因式分解并不是一件容易的事情。所以如果要求最大公约数，还是建议使用辗转相除法，还能顺带得到相应的 *Bézout* 等式。

下面我们拿一个经典结论结束本节

例题 12.1 设 $n \in \mathbb{Z}_+$，$n = p_1^{\nu_{p_1}(n)} p_2^{\nu_{p_2}(n)} \cdots p_s^{\nu_{p_s}(n)}$，定义

$\sigma_0(n) = \sum\limits_{1 \leq d | n} 1$，即正因子的数目。

$\sigma_1(n) = \sum\limits_{1 \leq d | n} d$，即全体正因子之和。

则

$$\sigma_0(n) = (\nu_{p_1}(n) + 1) \cdots (\nu_{p_s}(n) + 1) = \prod_{j=1}^{s} (\nu_{p_j}(n) + 1)$$

$$\sigma_1(n) = \prod_{i=1}^{s} \frac{p_i^{\nu_{p_i}(n)+1} - 1}{p_i - 1}$$

证明

1. $d \mid n \Leftrightarrow d = \prod\limits_{i=1}^{s} p_i^{\nu_{p_i}(d)}$，$0 \leq \nu_{p_i}(d) \leq \nu_{p_i}(n)$。注意到每个 $\nu_{p_i}(d)$ 有 $\nu_{p_i}(n) + 1$ 种取值，故能产生 $\prod\limits_{j=1}^{s} (\nu_{p_j}(n) + 1)$ 种因子。
2.
$$\begin{aligned}
\sigma_1(n) = \sum_{1 \leq d | n} d &= \sum_{\nu_{p_1}(d)=0}^{\nu_{p_1}(n)} \cdots \sum_{\nu_{p_s}(d)=0}^{\nu_{p_s}(n)} \prod_{i=1}^{s} p_i^{\nu_{p_i}(d)} \\
&= \sum_{0 \leq \nu_{p_i}(d) \leq \nu_{p_i}(n)} \prod_{i=1}^{s} p_i^{\nu_{p_i}(d)} \\
&= \left(\sum_{\nu_{p_1}(d)=0}^{\nu_{p_1}(n)} p_1^{\nu_{p_1}(d)} \right) \cdots \left(\sum_{\nu_{p_s}(d)=0}^{\nu_{p_s}(n)} p_s^{\nu_{p_s}(d)} \right) \\
&= \prod_{i=1}^{s} \frac{p_i^{\nu_{p_i}(n)+1} - 1}{p_i - 1}
\end{aligned}$$

注 介绍一个我们之后会接触到的概念。

$f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{C}$ 称为积性函数 (*Multiplicative function*)，若对 $(m, n) = 1$，有 $f(mn) = f(m) \cdot f(n)$。

若对 $\forall\, m, n \in \mathbb{Z}_+$，$f(mn) = f(m)f(n)$，则称 f 为完全积性函数 (*Completely multiplicative function*)。

可以看出 $\sigma_0(n), \sigma_1(n)$ 是积性函数，但不是完全积性函数。

12.2 群环域初步

其实我一开始打算先讲同余，再讲这部分。但意识到同余的许多事实从群环域的角度看其实是自然而然的，但用原来那套语言则令初学者困惑。所以我把这一节放到了同余之前。

不过每次在正式开始讨论知识前，我们总是尽可能地讲明白这件事的动机是什么，这样你才能理解我们为什么要如此定义，以及它应当具有哪个方向的性质。

回想一下我们从前所学的数学，大多是在与数打交道。我们频繁地遇见 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$，并对其上的运算了如指掌。我们知道自然数上可以定义加法和乘法，整数上可以定义加法、乘法和减法，有理数上可以定义加法、乘法、减法和除法，实数上也类似。当然，这里我们所说的运算都是二元运算。我们也知道诸多运算相关的性质，比如交换律，结合律，分配律，消去律等等。而我们后来也接触到一些不太一样的运算，不管是习题中的"新定义问题"，比如定义二阶行列式[1]，还是更加抽象一点的运算，比如集合上映射的复合。但毫无疑问，它们都是运算。

我们也很清楚，数学的发展是一个从具体走向抽象的过程。我们现在要做的也正是从我们所接触的众多例子中抽象出我们所需要的结构。从集合论的观点来看，我们所研究的问题都是建立在拥有一定结构的集合上的。如果要打个比方，给出一个集合就像在游戏中新建一个角色，在集合上附加结构就像给角色点技能树的大方向，比如近卫、术士、医疗……咳咳，跑题了。集合上有三种主要结构：代数结构，序结构，拓扑结构。而我们上面的诸多例子正是集合上代数结构的体现。通俗来讲，所谓代数结构就是你集合间的元素能算来算去。例如集合 $A = \{pine, apple, pineapple\}$，如果 A 上不带有任何结构，那么这个集合就是单单只是一个集合，就像你把几个纸团放到一起也还是一堆纸团，没有什么区别。但是我如果在集合 A 上定义了一个运算，让 $pine + apple = pineapple$，这就使得 A 具有了代数结构，就像你把一堆雪球放到一起可以把它们揉一块搓出一个大雪球来。**注** 有个相关的概念。我们称配备了某些结构的集合为空间 (*Space*)，比如 Euclid 空间，度量空间，线性空间，内积空间，拓扑空间……

而我们今天要讨论的正是代数结构。

12.2.1 群

12.2.1.1 群的定义与一些例子

首先我们考虑最简单的情况，一个集合，上面有一个运算。如果这个运算过于一般以至于它不具有任何好的性质，那就没必要研究了，比如像上文定义 $pine + apple = pineapple$，就是很无厘头的一个运算。

因此我们需要让这个运算有一些好的性质，这样我们就可以研究这个集合配备了该运算后能形成怎样的结构。这就是下面的概念：

定义 12.7 (群)

对非空集合 G 与其上的二元运算"$\cdot$"，若满足

1. 结合律：$\forall\, a, b, c \in G$，$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$；
2. 单位元：$\exists\, e \in G$，$\forall\, a \in G$，$e \cdot a = a \cdot e = a$，称 e 为群的单位元 (*Identity*)
3. 可逆：$\forall\, a \in G$，$\exists\, b \in G\ s.t.\ ab = ba = 1$。称 b 为 a 的逆 (*Inverse*)。

则称 $(G, \cdot)$ 为群 (*Group*)，称"$\cdot$"为群乘法 (*Group multiplication*)。一般简称集合 G 为群。♣

注

1. 同往常一样，我们倾向于省略乘号，将 $a \cdot b$ 简写为 ab。

[1]这是四元运算。

2. 这里乘法是抽象的乘法，不要和前面数的乘法等同起来。本质上它就是个运算，“乘法”只是一个称呼。与这个称呼相应的，我们通常将单位元记为 1_G，或直接记为 1。这自然也只是一个记号，并非数字。
3. 有些教材会把封闭性放在第四条，注意封闭性是运算的定义自然蕴含的。不过按经验而言，验证一个集合及其上运算构成群，的确需要先验证运算的封闭性成立。
4. 如果 $(G,\cdot)$ 只满足结合律，则称为半群 (*Semigroup*)；如果 $(G,\cdot)$ 满足结合律和单位元，则称为含幺半群 (*Monoid*)。不过这不是我们讨论的重点。

例题 12.2 你很容易验证，整数在加法下构成群，称为整数加群，单位元是 0。以及非零实数在乘法下构成群。

我们很容易看见群具有以下基本性质：

命题 12.9

设 G 为群。

1. 单位元唯一。
2. 每个元素的逆唯一。
3. 消去律：$ab=ac \Leftrightarrow b=c$, $ba=ca \Leftrightarrow b=c$。

证明

1. 不妨设 $1,1'$ 均为群 G 的单位元，那么根据单位元的性质，很容易看见
$$1=1\cdot 1'=1'$$
这就说明所有单位元都是相同的，准确来说，单位元是唯一的。
2. 不妨设 f,h 均为 g 的逆，那么
$$f=f\cdot e=f\cdot(g\cdot h)=(f\cdot g)\cdot h=e\cdot h=h$$
所以逆也是唯一的。
3. 这里只证明 $ab=ac\Leftrightarrow b=c$，后者证明思路一致。
若 $ab=ac$，两边同时左乘 a 的逆 d，则
$$d(ab)=d(ac)\Rightarrow(da)b=(da)c\Rightarrow b=c$$
若 $b=c$，两边同时左乘 a 即得 $ab=ac$。故两者等价。

注 正因为单位元和逆是唯一的，所以我们可以放心地使用 1_G 来表示群 G 的单位元，用 g^{-1} 来表示元素 g 的逆，而且不引起歧义，也就是说，当你看见 1_G 与 g^{-1} 时，你立刻就能明白它指代的是哪个元素，而不是在一堆元素中纠结。

有些同学可能看到消去律的时候会愣一下，觉得 $ab=ac$ 和 $ba=ca$ 是一回事。但这是不负责任的行为，因为我们并未要求群乘法满足交换律。事实上你在后面会认识到交换律并不是一个普遍的性质，对于那些满足交换律的群，我们如下有特别的称呼。

定义 12.8 (交换群)

若群 G 满足交换律，即
$$\forall\, a,b\in G,\ ab=ba$$
则称 G 为阿贝尔群 (*Abelian group*)，或交换群 (*Commutative group*)。

此外，我们还可以对元素的个数进行讨论，术语与集合是类似的。

定义 12.9 (阶)

对 $|G| < +\infty$，称 G 为有限群 (*Finite group*)。若 $|G| = +\infty$，则称 G 为无限群 (*Infinite group*)。$|G|$ 称为群 G 的阶 (*Order*)。♣

例题 12.3 若 $g : A \to A$ 为双射，则称 g 为 A 的置换 (*Permutation*)。所有置换构成的群（在映射的复合意义下）称为置换群 (*Permutation group*) 或对称群 (*Symmetric group*)，记为 S_A。特别地，若 $A = \{1, 2, \cdots, n\}$，则 S_A 可表示为 S_n，称为n 阶置换群 (*Permutation group of degree n*)。

值得一提的是，S_3 是最小的非 Abel 群。而你很容易看见 $|S_n| = n!$，所以五阶以下的群必为 Abel 群。这部分内容我们会在后面详细描述。

12.2.1.2 子群与直积

接着我们可以关心如何利用已有的群来产生新的群。

定义 12.10 (子群)

设 G 为群，若 H 为 G 的非空子集，且 H 关于群 G 的乘法构成群，则称 H 为 G 的子群 (*Subgroup*)，记为 $H \leq G$，若 $H \neq G$，且 $H \neq \{1_G\}$，则我们称 H 为真子群 (*Proper subgroup*)，记为 $H < G$，$H \neq \{1_G\}$。$\{1_G\}$ 称为平凡子群 (*Trivial subgroup*)。♣

注 这是一个和子集很相似的定义，不过该定义当然是基于子集的。此外，“关于群 G 的乘法”意思是 H 自然继承了 G 的群乘法，你可以把 H 的群乘法当做 G 的群乘法在 H 上的限制。如果你对这些概念感到奇怪或者陌生，别忘了这些本质上就是集合与映射。

$H \leq G$ 这个记号不仅指代的是 $|H| \leq |G|$ 这件事，还表明 H, G 具有相同的代数结构，譬如均为群，或者环，域。

当然，要想得到 G 的子群，随意选取一个非空子集 H 当然是不负责任的。下面的命题给出了一个子群的判据。

命题 12.10

非空子集 H 为 G 子群 $\Leftrightarrow \forall\, a, b \in H,\ ab^{-1} \in H$。♠

证明 $(\Rightarrow)$：$a, b \in H \Rightarrow b^{-1} \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$。

$(\Leftarrow)$：$H \neq \varnothing,\ \exists\, a \in H \Rightarrow a \cdot a^{-1} \in H$ *i.e.* $1_G \in H$。

$\forall\, a \in H,\ 1_G \in H \Rightarrow 1_G \cdot a^{-1} \in H$ *i.e.* $a^{-1} \in H$。

$\forall\, a, b \in H,\ b^{-1} \in H \Rightarrow a \cdot (b^{-1})^{-1} \in H$ *i.e.* $ab \in H$。

于是 H 对 G 的群乘法构成群。

值得一提的是，群 G 的单位元必然是子群的单位元。子群的逆在原群中当然也是逆。

子群比原群当然更小，而下面的定义可以产生更大的群。

定义 12.11 (群的直积)

设 G_1, G_2 为群，$G = G_1 \times G_2$ 定义为：

$$(g_1, g_2) \cdot (h_1, h_2) = (g_1 h_1, g_2 h_2)$$

这里 $g_1, h_1 \in G_1$，$g_2, h_2 \in G_2$，$(g_1, g_2), (h_1, h_2) \in G$。
可以验证 G 构成群，称为 G_1 与 G_2 的直积 (*Direct product*) 或笛卡尔积。♣

注 本质上这就是把两个集合作 Cartesian 积，然后再在这个积上面，借助原有的两个群乘法来定义新的群乘法。很容易看出来

1. $|G| = |G_1| \cdot |G_2|$。
2. $H_1 \le G_1$，$H_2 \le G_2 \Rightarrow H_1 \times H_2 \le G_1 \times G_2$。特别地，$\{1_{G_1}\} \times G_2$，$G_1 \times \{1_{G_2}\} \le G_1 \times G_2$。也就是说子群在直积下是保持的。

12.2.2 环与域

进一步我们可以考虑更复杂一点的情况，比如在一个集合上定义了两种运算。

定义 12.12 (（含幺）环与域)

设有集合 R，其上配备有两个运算 $+, \times$，如果满足：

1. $(R, +)$ 是 Abel 群；
2. $(R, \times)$ 是含幺半群；
3. $(R, +, \times)$ 满足（左右）分配律，即 $\begin{cases} (f+g) \times h = f \times h + g \times h \\ h \times (f+g) = h \times f + h \times g \end{cases}$，$f, g, h \in R$，

则称 $(R, +, \times)$ 为（含幺）环 (*Ring(with identity)*)。若 $\times$ 是交换的，那么称 $(R, +, \times)$ 为交换环 (*Commutative ring*)。♣

注 这里特别注明含幺的原因是，一些数学家认为环是不必含幺的。因此如果在其它地方遇到环，最好先看看作者认为环是否含幺。不过在低年级阶段遇到的绝大多数环都是含幺的，本书也默认环含幺。

注意，对一般环而言，左右分配律不是互推的，因为环乘法不必交换。

12.3 同余

12.4 群论初步

12.5 多项式

12.6 对称群

12.7 素数域上的算术

第十二章 练习

1. 证明命题 12.5 剩下的部分。
2. 设 $n \in \mathbb{Z}_+$，证明 $(n! + 1, (n+1)! + 1) = 1$，这里 $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$ 是 n 的阶乘。
3. 设 m, n 为正整数，m 是奇数。证明 $(2^m - 1, 2^n + 1) = 1$。(Hint：利用 2^{mn})

4. 设 n 为正整数，证明
   (1) $(a^n, b^n) = (a, b)^n$；
   (2) 设 $(a, b) = 1$，$ab = c^n$，$a, b, c \in \mathbb{Z}_+$，则 a, b 都是正整数的 n 次幂。事实上，$a = (a, c)^n, b = (b, c)^n$。
   一般地，如果若干个两两互素的正整数之积是整数的 n 次幂，则这些整数都是 n 次幂。
5. 证明：
   (1) 若 $(a, b) = 1$，则 $(a^n, b) = 1$，n 为任意正整数。
   (2) $(a, b) = 1 \Rightarrow (a^m, b^n) = 1, \forall\, m, n \in \mathbb{Z}_+$
6. 用辗转相除法求 963 和 657 的最大公约数，并求出方程
$$963x + 657y = (963, 657)$$
的一组特解，及所有整数解。
7. 设 $a, b \in \mathbb{Z}_+$, $(a, b) = 1$。证明：当整数 $n > ab$ 时，方程
$$ax + by = n$$
有正整数解；但当 $n = ab$ 时，方程没有正整数解。
8. 设 $n > 1$ 为整数，如果对于任何整数 m，或者 $n \mid m$ 或者 $(n, m) = 1$，证明 n 必是素数。
9. **(素数有无穷多个的另一种证明)** 设整数 $n > 2$，证明：n 和 $n!$ 之间必有素数。由此证明素数有无穷多个。（Hint：处理类似于定理 12.5 的 Proof）
10. **(费马素数)**
   (1) 设 m 为正整数，证明：如果 $2^m + 1$ 为素数，则 m 为 2 的方幂。
   (2) 对 $n \geq 0$，记 $F_n = 2^{2^n} + 1$，这称为费马数。证明：如果 $m > n$，则 $F_n \mid (F_m - 2)$；
   (3) 证明：如果 $m \neq n$，则 $(F_m, F_n) = 1$。由此证明素数有无穷多个。
11. **(梅森素数)**
   (1) 设 m, n 都是大于 1 的整数，证明：如果 $m^n - 1$ 是素数，则 $m = 2$ 并且 n 是素数。
   (2) 设 p 是素数，记 $M_p = 2^p - 1$，这称为梅森数。证明：如果 p, q 是不同的素数，则 $(M_p, M_q) = 1$。
12. 设 $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq b$, $n \in \mathbb{Z}_+$，如果 $n \mid (a^n - b^n)$，则 $n \mid \frac{a^n - b^n}{a - b}$。
13. 设 $n \geq 1$。证明
   (1) n 为完全平方数的充要条件是 $\sigma_0(n)$ 为奇数；
   (2) $\sigma_0(n) \leq 2\sqrt{n} - 1$；
   (3) n 的正约数之积等于 $n^{\frac{\sigma_0(n)}{2}}$。
14. 设 $m \in \mathbb{Z}_+$ 的因式分解为 $m = \prod_i p_i^{\alpha_i}$。若 f 为积性函数，证明
$$f(m) = \prod_i f(p_i^{\alpha_i})$$
若 f 为完全积性函数，证明
$$f(m) = \prod_i f(p_i)^{\alpha_i}$$

15. **($M\ddot{o}bius$ 函数)** 对于 $n = p_1^{e_1}\cdots p_s^{e_s} \in \mathbb{Z}_+$，令

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{如果} n = 1, \\ (-1)^s, & \text{如果} e_1 = \cdots = e_s = 1, \\ 0, & \text{其他情况。} \end{cases}$$

$\mu(n)$ 称为莫比乌斯函数 (*Möbius function*)。证明

$$\sum_{1 \le d | n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{如果} n = 1, \\ 0, & \text{如果} n > 1. \end{cases}$$

16. **($M\ddot{o}bius$ 反演)** 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为两个定义在 $\mathbb{Z}_+$ 上的函数（值域可以为任何数域）。证明

(1) $g(n) = \sum\limits_{1 \le d | n} f(d)$ 当且仅当 $f(n) = \sum\limits_{1 \le d | n} \mu(d) g(\frac{n}{d})$。

(2) 如果 $g(x) \neq 0$，则 $g(n) = \prod\limits_{1 \le d | n} f(d)$ 当且仅当 $f(n) = \prod\limits_{1 \le d | n} g(\frac{n}{d})^{\mu(d)}$。

其中 μ 为上题的 $M\ddot{o}bius$ 函数。上面两个等价关系习惯上称为莫比乌斯反演公式 (*Möbius inversion formula*)。