任选至少二题作答，给出证明或计算的必要依据和路线 (所有方向的问题均可以链接或图片的形式给出完整解答):

代数与数论

1. 令 S 为正有理数集的子集，满足：对加法和乘法封闭；对每个不等于 1 的正有理数 x 而言，x 和 x^{-1} 恰有一个在 S 中。那么 S 是否一定包含大于 1 的全体有理数?
2. 求 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{28})$ 的整数环的判别式 (Discriminant)。
3. 设 $\mathbb{K}$ 是域，求证 $\mathbb{K}$ 在 Laurent 级数域 $\mathbb{K}((X))$ 中代数闭。
4. $\mathbb{K}$ 是无限域，X 是其上一超越元，证明 $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}(X)/\mathbb{K})$ 的稳定子域是 $\mathbb{K}$。
5. $UMU^{-1}+VMV^{-1}=2M$, U,V 是酉方阵，证明 $UMU^{-1}=VMV^{-1}=M$。
6. 假设 $x_1=\sqrt{3}$, $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$。证明 $[\mathbb{Q}(x_n),\mathbb{Q}]=2^n$，$\mathbb{Q}$ 是有理数域，$[\cdot]$ 是域扩张次数。(最好给出代数做法)
7. 一个域 K 上的奇数维正交矩阵 A，域的特征不为 2，证明 A 有某个特征值和 $\det A$ 相同。
8. 假设 A 是含幺交换环，证明 $A/\mathrm{rad}(0)$ 有非 $0,1$ 的满足 $e^2=e$ 的元素，当且仅当 A 有这样的元素。
9. 特殊线性群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 可以视为满足如下两条件的矩阵之集合：矩阵元都是整数，且行列式为 1。设 $\mathbb{C}^{\times}$ 为复平面上乘法群，试求 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 到 $\mathbb{C}^{\times}$ 的所有群同态。
10. $\mathbb{Q}[x]$ 上的 p 次不可约多项式 $f(x)$ 恰好有两个非实复根 (p 是素正整数)，证明它的 Galois 群是置换群 S_p。
11. 令 G 是一个忠实与可迁作用在势为 7 的集合 X 上的群，假设其满足
    (i)对每个 $x\in X$ 有 $\mathrm{Stab}_G(x)\simeq S_4$;
    (ii)对每个不同的 $x,y\in X$ 有 $\mathrm{Stab}_G(x)\cap\mathrm{Stab}_G(y)\simeq C_2\times C_2$.
    试:
    (1)确定 G 的阶和它的每个素数 p 的 Sylow-p 子群的个数。
    (2)证明 G 不存在被 3 或 7 整除的阶的真正规子群。
    (3)证明 G 是单的, 并且指出是哪个有限单群。

几何与拓扑

1. 计算 $\pi_3(SO(4))$。
2. 流形 M^4 闭，$\pi_3(M)=0$, $f\colon \mathbb{RP}^3\to M^4$, $\alpha=f_*([\mathbb{RP}^3])\in H_3(M^4,\mathbb{Z})$。

   (1)若 M 可定向，证明 $\alpha=0$;

   (2)若 M 不可定向，结论是否正确?
3. (1)计算 $\pi_2(T^4\#\mathbb{CP}^2)$;

   (2)$\pi_2(M^4)=\pi_2(N^4)=0$，证明 $\pi_2(M^4\#N^4)=0$。
4. 称流形 M 有 k 个 ends，若 $k=\sup\limits_{K\subset M,\ K\text{ compact}}|\{\text{noncompact components of } M\setminus K\}|$。

   (1)若 M^3 同伦等价于 S^1，证明 M 仅有 1 个 end;

   (2)若 Riemann 流形 M 有两个 ends，证明存在测地线。
5. 设 M 是可定向 n 维光滑流形，S_1,S_2 是 M 中两个不交的可定向嵌入闭超曲面，满足 $M-S_1-S_2$ 连通。证明存在 $\pi_1(M)$ 到二阶自由群 F_2 的满射。
6. S 是亏格为 2 的闭曲面，l 是 S 上可分的单闭曲线，构造 S 的有限覆盖 $\widetilde{S}\xrightarrow{p}S$ 及 $\widetilde{S}$ 上的单闭曲线 $\widetilde{l}$，使得 p 将 $\widetilde{l}$ 同胚地映到 l，且 $\widetilde{l}$ 在 $\widetilde{S}$ 中不可分。
7. 证明紧 Riemann 面上的全纯向量丛上配备处处非退化复对称双线性型之后迷向子丛和正交补的 degree 相等。
8. 假设 $f\colon\mathbb{R}^n\to GL_n(\mathbb{C})$ 连续，并且 $|x|\le 1$ 时 $f(x)$ 是可逆矩阵。是否存在连续函数 $g:\mathbb{R}^n\to GL_n(\mathbb{C})$ 使得 $|x|\le 1$ 时 $g(x)=f(x)$，$|x|\ge 2$ 时 $g(x)=I$? 这里 I 是单位矩阵。
9. 令 f 为 $S^{2n-1}\to S^n$ 的光滑映射，令 α 为 S^n 上的体积形式 $\int_{S^n}\alpha=1$(假设 $n\ge 2$)，证明: 总存在 S^{2n-1} 上的形式 β，满足 $f^*(\alpha)=\mathrm{d}\beta$。

   定义 $H(f)=\int_{S^{2n-1}}\beta\wedge f^*(\alpha)$，证明 (二选一，若选择 (ii) 可以假定 (i) 成立):

   (i) $H(f)$ 的值与 α,β 的具体选择无关 (只要满足条件即可) 并且当 n 为奇数时必为 0。

   (ii) $H(f)$ 是不随 f 的光滑同伦型改变的，并且对于任何 S^{2n-1} 上的自同构 F 有 $H(f\cdot F)=H(f)*\deg(F)$。
10. (i) 对于给定的正整数 n，是否存在 n 维流形 M，满足 $\dim(H^k(M))=C(n,k)$，其中 $H^k(M)$ 表示 M 的 k 阶 de Rham cohomology，$C(n,k)$ 表示 n 个元素里取 k 个的组合数。

    (ii) 对于满足 $\dim(H^k(M))=C(n,k)$ 的光滑流形 M，M 的 k 阶同伦群是否一定同构于 $\pi_k(T^n)$? (本问选做，谈谈想法即可)

分析与方程

1. 正定矩阵 A, B 满足 $A \geq B$，求证 $\ln A \geq \ln B$。
2. 证明 weighted sobolev space(L^2 based) 的嵌入定理，当且仅当 regularity 和 decay 都更高阶的时候是紧嵌入。
3. 证明若在箱 $B := I_1 \times \cdots \times I_n$ 上有 $|\partial^\alpha \phi(x)| \geq 1$，则存在 $y \in B$ 使得 $|\phi(y)| \geq c_\alpha |I_1|^{\alpha_1} \cdots |I_n|^{\alpha_n}$。
4. 设 $\mathbb{R}$ 上的可测函数 f 满足 $|f(x)| \leq e^{-|x|}$，证明 f 的 Fourier 变换 $\widehat{f}$ 不能有紧支集，除非 $f(x) = 0$ a.e. $x \in \mathbb{R}$。
5. 考虑一个 $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 的映射 f，求证：f 保距当且仅当 f 是单射，$|f(0) - f(1)| = 1$，并且 f 全纯或者反全纯。
6. 假设 f 在 $\mathbb{R}$ 上可测，并且存在 $T_n \to 0$ 使得 T_n 均为 f 的周期（$T_n > 0$），证明存在常数 c 使得 $f = c$ a.e.
7. 对于任意实数 $T > 0$，以及边界为 $\partial\Omega$ 的有界开集 Ω，假设 $\partial\Omega$ 光滑。考虑 $\Omega \times [0, T)$ 上的方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \ \forall\, x \in \Omega \\ u(y, t) = 0, \ \forall\, y \in \partial\Omega \end{cases}.$$

其中 $u_0(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$。求证：上述方程存在唯一的 $C_1^2(\mathbb{R}^n \times [0, T))$ 解 $u(x, t)$，($u(x, t)$ 对 x 二阶可微，且导数关于 t 连续，$u(x, t)$ 对 t 一阶可微，且导数关于 x 连续)。并且对于任何 $\infty > p > 1$，$\tau \in [0, T]$，都有 $\|u(\cdot, \tau)\|_{L^p} \leq c_1 e^{-c_2 \tau}$，其中 c_1, c_2 只与 u_0, p, Ω 有关，$\|u(\cdot, \tau)\|_{L^p}$ 表示 t 变量取值为 τ 时，$u(x, t)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的 L^p 范数。
8. X 为 Banach 空间且自反 (X^{**} 自然同构于 X)，$\{C_n\}$ 为 X 中一列递减凸闭集，且满足 $C = \bigcap_{n=1}^\infty C_n \neq \varnothing$，$\forall x \in X$，是否总有 $d(x, C) = \lim_{n\to\infty} d(x, C_n)$?
   (i) X 为 Hilbert 空间时成立；
   (ii) X 自反时成立；
   (iii) 去掉自反条件时的反例 (本问选做，谈谈自己的想法即可)。

概率

1. $X_1, ..., X_n$ 均服从 $N(0,1)$，不一定独立，证明:$\mathbb{E}\max\{X_1,...,X_n\} \le 2\sqrt{\ln n}$。
2. 设 (X,Y) 服从二维正态分布，满足 $\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}[Y]=0, \mathrm{Var}[X]=\mathrm{Var}[Y]=1, \mathbb{E}[XY]=1$。证明：$\mathbb{E}[\max(X,Y)]=\sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}$。
3. 在 Pólya 坛子模型中，设坛子中有 b 个黑球和 w 个白球。现每次从中取一个，第 n 次若抽到黑球则加入 $(1-\xi_n)M$ 个黑球及 $\xi_n M$ 个白球，若抽到白球则加入 $(1-\eta_n)M$ 个白球及 $\eta_n M$ 个黑球，这里 $M>0$ 为常数，$\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots$ 独立同分布，$\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ 独立同分布，上述随机变量相互独立。设 B_n 为第 n 次取得黑球的概率，求 $P=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(B_n)$。
4. 设每隔一个独立服从参数为 λ 的 Poisson 分布的时间，切换某特定开关一次 (开变为关，关变为开)。将 $[0,t]$ 中该开关处于“开”的状态的总时间记为 R_t，证明：$\frac{R_t}{t} \xrightarrow{\text{a.s.}} \frac{1}{2}$。
5. 设 Z 为 n 维随机变量，且其特征函数为 $f_Z(t)=\exp\left(\mathrm{i}t^T\mu-\frac{1}{2}t^Tt\right)$。证明：存在 n 维标准正态随机向量 X 及 n 阶矩阵 $\mathbf{B}$ 使得 $Z=\mu+\mathbf{B}X$, a.s. 。
6. 设某个以 $p\ (0<p<1)$ 为参数 (成功概率) 的 Bernoulli 试验的成功次数 Y 与失败次数 X 独立，求试验总次数 $X=Y+Z$ 的分布。
7. 仿照 Buffon 投针问题，考虑将给定的三角板投向画有相隔为 H 的平行线的平面上，求三角板压线的概率。
8. 设 m 是整数，n 是正整数，在 $(0,n)$ 点释放一个粒子，它每一步都会等概率地移动到一个相邻格点 (即坐标为整数的点)，而且一旦移动到 x 轴上就停留在该点，不再移动。求粒子最终停留在 $(m,0)$ 点的概率。