Lec8 Note of Mathematical Analysis B3

Xuxuayame

日期：2022 年 9 月 23 日

这一节依然参考讲义与 Munkres。

§7 列紧和紧致（覆紧）

7.1 列紧和紧致（覆紧）

定义 7.1. 设 $(X, \mathcal{T})$ 为拓扑空间，如果 X 的每一无限子集至少有一个聚点（不必属于此无限子集），则称 $(X, \mathcal{T})$（或拓扑空间 X）是列紧的 *(Sequentially compact)*。

拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 的一个子集 Y 称为列紧的，如果 Y 作为子拓扑空间 $(Y, \mathcal{T}_Y)$ 是列紧的（即 Y 的每一无限子集有一聚点属于 Y）。

定义 7.2. 设 $(X, \mathcal{T})$ 为拓扑空间，如果对于 X 的每一个开覆盖 η 必有一个有限的（开）子覆盖 η'，则称 $(X, \mathcal{T})$（或拓扑空间 X）为紧致的 *(Compact)* 或覆紧的。

定理 7.1. 拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 是紧致的 $\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T})$ 是列紧的。反之不成立（见例 *7.1*）。

证明. 若 X 不列紧，即存在 X 的无限子集 A，使 $A' = \varnothing$。于是 $\bar{A} = A \cup A' = A$ 是闭集，$X - A$ 是开集。此外，由于任何 $a \in A$, $a \notin A' = \varnothing$，故存在 a 的邻域 $U(a)$，使得 $U(a) \cap (A - \{a\}) = \varnothing$。于是 $\{X - A, U(a) \mid a \in A\}$ 是 X 的一个开覆盖，但显然无有限的自费该，这与 X 是紧致的矛盾。 □

例 7.1. 列紧 $\not\Rightarrow$ 紧致。

设 $X = \{n \mid n = 1, 2, 3, \cdots\}$, $\mathcal{B} = \{B_n = \{2n-1, 2n\} \mid n = 1, 2, 3, \cdots\}$。容易验证 $\mathcal{B}$ 是一个拓扑基，由 $\mathcal{B}$ 诱导出拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$。

X 是列紧的。事实上，对每个自然数 n，点 $2n$ 是独点集 $\{2n-1\}$ 的聚点，而点 $2n-1$ 是独点集 $\{2n\}$ 的聚点。因而 X 的每个非空子集至少有一个聚点。

但 X 不是紧致的。因为 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个可数无限开覆盖，而它不包含有限的子覆盖。

定理 7.2. 紧致（或列紧）拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 的任一闭子集 Y 是紧致的（或列紧的）。

证明. 设 $\eta_Y=\{G_a\cap Y\in\mathcal{T}_Y \mid G_a\in\mathcal{T}\}$ 是 Y 的任一开覆盖。因为 Y 是 X 的闭子集，$X-Y$ 是开集，所以 $\eta=\{G_a,X-Y\}$ 是 X 的一个开覆盖。由于 X 紧致，必有一个有限的子覆盖 $\eta'=\{G_1,\cdots,G_k\}$。于是 $\eta'_Y=\{G_i\cap Y \mid G_i\in\eta'\}$ 是 η_Y 的有限子覆盖。这就证明了 Y 也是紧致的。

考虑任一无限子集 $A\subset Y\subset X$。由 X 列紧，存在 $a\in A'\subset X$，则 $a\in\bar{A}\subset\bar{Y}=Y$（在 X 中的闭包，且 Y 是 X 的闭集）。这就证明了 Y 是列紧的。 □

评论. 拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 的子集 Y 称为紧致的，如果 Y 作为子拓扑空间 $(Y,\mathcal{T}_Y)$ 是紧致的。容易证明

> Y 是紧致的 $\Leftrightarrow$ 对于 Y 的在 X 中的每个开覆盖 $\eta(\subset\mathcal{T})$ 必有一个有限的子覆盖 η'。（留作习题）

用此结论重新证明定理 7.2 的前半部分（留作习题）。

7.2 度量空间 (X,ρ) 中的列紧和紧致

设 $(X,\mathcal{T})$ 为 (X,ρ) 所诱导的拓扑空间。

定理 7.3. *X（或 (X,ρ)）是列紧的 $\Leftrightarrow$ X 中的每个点列必有收敛的子列。*

证明. $(\Rightarrow)$：设 $\{x_n\}$ 是 X 中的任一点列。如果它有一个子点列 $x_{n_k}=x\ (k=1,2,\cdots)$，则显然 $\lim\limits_{k\to+\infty}x_{n_k}=x$。如果它无完全相同的点组成的子点列，则 $\{x_n\}$ 有完全不同的点所组成的一个子点列 $\{y_n\}$。由于 X 列紧，无限子集 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{y_n\}$ 有一个聚点 a，再从 Lec4 的定理 3.6，$\{y_n\}$ 有一个子点列收敛于 a，当然，它也是 $\{x_n\}$ 的收敛于 a 的子点列。

$(\Leftarrow)$：设 $A\subset X$ 是任一无限子集，作 A 的由完全不同的点所组成的一个点列 $\{x_n\}$。由已知，$\{x_n\}$ 有一个子点列 $\{y_n\}$ 收敛于点 $a\in X$。根据定理 3.6，子集 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{y_n\}$ 以 a 为聚点，于是 A 也以 a 为聚点。 □

定理 7.4. *设 (X,ρ) 是列紧度量空间，$\eta=\{G_a\}$ 是 X 的一个开覆盖，则存在一个正数 $\lambda=\lambda(\eta)$（称为覆盖 η 的 Lebesgue 数）具有性质：如果 $A\subset X$，且当直径*

$$d(A)=\begin{cases}0, & A=\varnothing,\\ \sup\{\rho(x,y)\mid x,y\in A\}, & A\neq\varnothing\end{cases}<\lambda$$

时，至少有一个 $G_a\supset A$，$G_a\in\eta$。

证明. 假设具有上述性质的 λ 不存在，则对任何自然数 n，存在 $A_n\subset X$，$d(A_n)<\frac{1}{n}$，且对任何 $G_a\in\eta$，$A_n\not\subset G_a$。任取 $a_n\in A_n\ (n=1,2,\cdots)$，因为 X 列紧，从定理 7.3，点列 $\{a_n\}$ 有一个子点列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛于 $a\in X$。由于 η 是 X 的开覆盖，存在 $G\in\eta$，使得 $a\in G$。因为 G 是开集，所以 $d=\rho(a,X-G)>0$。

我们取自然数 $m > \frac{2}{d}$，且 $a_m \in \{a_{n_k}\}$，$\rho(a, a_m) < \frac{d}{2}$。于是，对任何 $x \in A_m$，有

$$\rho(a, x) \leq \rho(a, a_m) + \rho(a_m, x) < \frac{d}{2} + \frac{1}{m} < \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d$$

所以 $A_m \subset G$，这与 $A_m \not\subset G_a$（对任何 $G_a \in \eta$）相矛盾。 □

引理 7.5. 设 (X, ρ) 为列紧度量空间。对任何 $\varepsilon > 0$，X 必有 ε 网 A（即 A 是 X 的有限集，并且对任何 $x \in X$，有 $\rho(x, A) < \varepsilon$）。

证明. 若存在某个 $\varepsilon_0 > 0$, X 无 ε_0 网。任取 $a_1 \in X$。因为 $\{a_1\}$ 不是 X 的 ε_0 网, 则有 $a_2 \in X$, 使 $\rho(a_1, a_2) \geq \varepsilon_0$。设 $\{a_1, \cdots, a_n \mid n > 1\}$ 已取定, 其中 $\rho(a_i, a_j) \geq \varepsilon_0\ (1 \leq i < j \leq n)$。因为 $\{a_1, \cdots, a_n\}$ 不是 X 的 ε_0 网, 则有 $a_{n+1} \in X$, 使得 $\rho(a_i, a_j) \geq \varepsilon_0\ (1 \leq i < j \leq n+1)$。这样就得到了一个无限子集 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$，其中 $\rho(a_i, a_j) \geq \varepsilon_0\ (1 \leq i < j)$。由例 3.6 可知这无限子集无聚点，这与 X 列紧相矛盾。 □

定理 7.6. 设 (X, ρ) 为度量空间，则

$$X\text{是紧致的} \Leftrightarrow X\text{是列紧的。}$$

证明. $(\Rightarrow)$：由定理 7.1。

$(\Leftarrow)$：设 η 是 X 的任一开覆盖，$\lambda = \lambda(\eta)$ 是开覆盖 η 的 Lebesgue 数。由引理 7.5，X 有一个 $\frac{\lambda}{3}$ 网 $\{a_1, \cdots, a_n\}$。于是，$X = \bigcup_{k=1}^{n} U(a_k, \dfrac{\lambda}{3})$。因为 $d(U(a_k, \dfrac{\lambda}{3})) < \lambda$，从定理 7.4，存在 $G_k \in \eta$，使得 $U(a_k, \dfrac{\lambda}{3}) \subset G_k\ (k = 1, 2, \cdots, n)$。于是 $\{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$ 就是所求的 η 的有限子覆盖。 □

定理 7.7. 设 (X, ρ) 为度量空间。

$$A\text{是}X\text{的列紧子集} \Rightarrow A\text{是}X\text{的有界闭集。}$$

反之不成立（参看例 7.2）。

证明. 先证 A 有界。如果 A 无界，则有 $B \subset A$，使得对任何 $b_1, b_2 \in B$，有 $\rho(b_1, b_2) > 1$。由例 3.6，$B' = \varnothing$，这与 A 列紧相矛盾。

再证 A 是闭集。只需证 $A' \subset A$。若 $a \in A'$（$A' = \varnothing \subset A$ 显然），从定理 3.6，$A - \{a\}$ 中存在一个由完全不同的点所组成的点列 $\{x_n\}$，$\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$。于是 A 的无限子集 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}$ 以 a 为唯一的聚点。由 A 列紧，$a \in A$。 □

例 7.2. $\mathbb{R}$ 中子度量空间 $A = (0, 1)$，它作为一个度量空间，A 自身是一个有界闭集，但不列紧。

7.3 紧致拓扑空间的连续映射

定理 7.8. 设 $(X, \mathcal{T}_1)$ 为紧致拓扑空间，$(Y, \mathcal{T}_2)$ 为拓扑空间，$f : X \to Y$ 是连续映射。则 $f(X)$ 是 Y 的紧致子集（紧致性是连续映射下的不变性质，当然也是拓扑性质）。

证明. $f(X)$ 视作 $(Y,\mathcal{T}_2)$ 的子拓扑空间，显然 $f:X\to f(X)$ 也是连续映射。设 $\eta=\{V_a\}$ 是 $f(X)$ 的任一开覆盖。由定理 4.1，$f^{-1}(V_a)$ 是 X 的开集。显然，$\{f^{-1}(V_a)\}$ 是 X 的一个开覆盖。因为 X 紧致，$\{f^{-1}(V_a)\}$ 有一个有限的子覆盖

$$\{f^{-1}(V_{a_k})\mid k=1,\cdots,n\}.$$

由于 $ff^{-1}(V_a)=V_a$，所以

$$\{V_{a_k}\mid k=1,\cdots,n\}$$

是 $f(X)$ 的一个有限开覆盖，它是 η 的有限子覆盖。这就证明了 $f(X)$ 是 Y 的紧致子集。 □

例 7.3. 容易证明列紧性是拓扑性质。但是，列紧性不是连续映射下的不变性质。举反例如下：

设 $(X,\mathcal{T}_1)$ 为例 7.1 中的列紧拓扑空间，$(Y,\mathcal{T}_2)$ 为 $\mathbb{R}$ 的子拓扑空间，这里 $Y=\{n\mid n=1,2,\cdots\}$。令 $f:X\to Y$, $f(2n-1)=f(2n)=n$。则 f 是连续映射，但 $f(X)=Y$ 不列紧。

引理 7.9. *1.* 设 $(X,\mathcal{T})$ 为 T_2 空间。则

$$A\text{是}X\text{的紧致子集}\Rightarrow A\text{是}X\text{的闭集。}$$

2. 设 $(X,\mathcal{T})$ 是紧致的 T_2 空间。则

$$A\text{是}X\text{的紧致子集}\Leftrightarrow A\text{是}X\text{的闭集。}$$

证明. 1. 对任何 $p\in X-A$。因为 X 是 T_2 空间，所以对任何 $x\in A$，存在 p 的邻域 $U(p,x)$ 和 x 的邻域 $V(x)$，使得 $U(p,x)\cap V(x)=\varnothing$。显然，$\{V(x)\mid x\in A\}$ 是 A 的在 X 中的一个开覆盖。由 A 紧致，它有一个有限的子覆盖 $\{V(x_k)\mid k=1,\cdots,n\}$。令

$$U(p)=\bigcap_{k=1}^{n}U(p,x_k)$$

易见，$U(p)$ 是 p 的邻域，且 $U(p)\cap V(x_k)=\varnothing$，所以

$$U(p)\cap A\subset U(p)\cap\left(\bigcup_{k=1}^{n}V(x_k)\right)=\bigcup_{k=1}^{n}(U(p)\cap V(x_k))=\varnothing.$$

于是 $p\in U(p)\subset X-A$，即 $X-A$ 是开集，A 是 X 的闭集。

2. $(\Rightarrow)$：由 1。

$(\Leftarrow)$：由定理 7.2，紧致拓扑空间 X 是闭子集 A 是紧致的。

□

定理 7.10. 设 $(X,\mathcal{T})$ 为紧致拓扑空间，$f:X\to\mathbb{R}$ 是任一连续函数，则 f 有界。而且存在 $x_1,x_2\in X$，使得

$$f(x_1)=\inf\{f(x)\mid x\in X\}\quad(\text{因而达到最小值}),$$

$$f(x_2)=\sup\{f(x)\mid x\in X\}\quad(\text{因而达到最大值})。$$

证明. 由定理 7.8，$f(X)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的紧致子集，再由定理 7.6 和 7.7，$f(X)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的有界闭集，所以 f 有界。而且存在 $x_1, x_2 \in X$，使得

$$f(x_1) = \inf\{f(x) \mid x \in X\} = \min\{f(x) \mid x \in X\},$$
$$f(x_2) = \sup\{f(x) \mid x \in X\} = \max\{f(x) \mid x \in X\}.$$

□

定理 7.11. 设 $(X, \mathcal{T}_1)$ 为紧致拓扑空间，$(Y, \mathcal{T}_2)$ 是 T_2 空间，$f : X \to Y$ 是连续映射，则 f 是闭映射 (Closed map)（即如果 $A \subset X$ 是闭集，则 $f(A) \subset Y$ 也是闭集）。

证明. 设 $A \subset X$ 是任何闭集，由定理 7.2，A 是 X 的紧致子集。由定理 7.8，$f(A)$ 是 Y 的紧致子集。再根据引理 7.9，$f(A)$ 是 Y 的闭子集。 □

例 7.4. 定理 7.10 和 7.11 中的“紧致”改为“列紧”，结论不成立。

设 $(X, \mathcal{T})$ 为例 7.1 中的列紧拓扑空间。

1. $Y = \mathbb{R}$。令
$$f(2n-1) = f(2n) = \begin{cases} n, & 当n为偶数, \\ -n, & 当n为奇数, \end{cases}$$
容易看出 f 连续。但无上界和下界，当然达不到最大值，也达不到最小值。
2. $Y = [0, 1]$。令
$$f(2n-1) = f(2n) = 1 - \frac{1}{n}$$
显然，f 连续。但 $f(X)$ 不是 $Y = [0, 1]$ 的闭子集。

定理 7.12. 设 $(X, \mathcal{T}_1)$ 为紧致拓扑空间，$(Y, \mathcal{T}_2)$ 是 T_2 空间，$f : X \to Y$ 是连续的双射，则 f 是同胚映射。

证明. 由于 f 是双射，则 $f(X) = Y$，且有逆映射 $f^{-1} : Y \to X$。设 $A \subset X$ 为任一闭集，由定理 7.11，$(f^{-1})^{-1}(A) = f(A) \subset Y$ 为闭集，所以 f^{-1} 是连续映射，从而 f 是同胚映射。 □

定理 7.13. 设 (X, ρ_1) 为列紧（也是紧致）的度量空间，(Y, ρ_2) 为度量空间。$f : X \to Y$ 是连续映射，则 f 是一致连续映射 (Uniformly continuous map)（即对任何 $\varepsilon > 0$，存在 $\lambda > 0$，当 $\rho_1(x', x'') < \lambda$ 时，必有 $\rho_2(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$）。

证明. 证法 1：任何 $\varepsilon > 0$，因为 f 是连续映射，对任何 $x \in X$，存在 $\delta(x) > 0$，当 $x' \in U(x, \delta(x))$ 时，$\rho_2(f(x'), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$。由定理 7.4，$X$ 的开覆盖 $\{U(x, \delta(x)) \mid x \in X\}$ 有一个 Lebesgue 数 λ。如果 $\rho_1(x', x'') < \lambda$，则存在 $x \in X$，使得 $x', x'' \in U(x, \delta(x))$。于是

$$\rho_2(f(x'), f(x'')) \le \rho_2(f(x'), f(x)) + \rho_2(f(x), f(x'')) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

证法 2：若 f 非一致连续，则有 $\varepsilon_0 > 0$，相应的 λ 不存在。特别当 $\lambda_n = \frac{1}{n}$ 时，必有 $x'_n, x''_n \in X$，$\rho_1(x'_n, x''_n) < \dfrac{1}{n}$，但 $\rho_2(f(x'_n), f(x''_n)) \geq \varepsilon_0$。因为 (X, ρ_1) 列紧，由定理 7.3，$\{x'_n\}$ 必有收敛于 x_0 的子点列，为方便起见，仍记为 $\{x'_n\}$。由

$$0 \leq \rho_1(x''_n, x_0) \leq \rho_1(x''_n, x'_n) + \rho_1(x'_n, x_0) < \frac{1}{n} + \rho_1(x'_n, x_0) \to 0 \ (n \to +\infty)$$

可知 $x''_n \to x_0$。因为 f 在 x_0 连续，所以 $f(x'_n) \to f(x_0)$，$f(x''_n) \to f(x_0)$。于是存在 N，$n > N$，有

$$\varepsilon_0 \leq \rho_2(f(x'_n), f(x''_n)) \leq \rho_2(f(x'_n), f(x_0)) + \rho(f(x''_n), f(x_0)) < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0,$$

这就推出了矛盾。 □