Lec7 Note of Mathematical Analysis B3

Xuxuayame

日期：2022 年 9 月 20 日

这一节依然参考讲义与 Munkres。

§6 连通性

6.1 连通

定义 6.1. 设 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间，如果 $X=A\cup B$, $A,B\in\mathcal{T},A\neq\varnothing,B\neq\varnothing,A\cap B=\varnothing$，则称 X 为非连通的 *(Disconnected)* 拓扑空间。这样的二元对 A,B 称为 X 的分割 *(Separation)*。

如果 X 不是非连通的，或者说分割不存在，就称它为连通的 *(Connected)* 拓扑空间。

设 $Y\subset X$，如果子空间 $(Y,\mathcal{T}_Y)$ 是非连通或连通的拓扑空间，则称 Y 为非连通或连通的子集。

评论. 定义 6.1 中的“开集 A,B”改为“闭集 A,B”或“既开又闭的集合 A,B”，则容易看出这三种定义是等价的。

拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 是连通的 $\Leftrightarrow$ X 的子集中只有 X 和 $\varnothing$ 是既开又闭的。

这件事情很容易想清楚。如果 A 是 X 的非空真子集，且既开又闭，那么 $X=A\cup(X-A)$，且 A 与 $X-A$ 为非空不相交的开集，这与 X 连通矛盾。反过来，如果 X 不连通，则存在非空不相交的开集 A,B 使得 $A\cup B=X$，于是 $A=X-B$ 为闭集，从而 A 既开又闭，因此 A 只能是 X 或 $\varnothing$，要么与 B 非空矛盾，要么与 A 非空矛盾。

定理 6.1. 设 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间，且 $X=A\cup B$, $A,B\in\mathcal{T}$, $A\cap B=\varnothing$。如果 Y 是 X 的连通子集，则 $A\cap Y=\varnothing$ 或 $B\cap Y=\varnothing$。

证明. 显然 $Y=(A\cup B)\cap Y=(A\cap Y)\cup(B\cap Y)$, $A\cap Y\in\mathcal{T}_Y$, $B\cap Y\in\mathcal{T}_Y$, $(A\cap Y)\cap(B\cap Y)=\varnothing$。若 $A\cap Y\neq\varnothing$, $B\cap Y\neq\varnothing$，则 Y 是非连通的，这与已知 Y 是 X 的连通子集矛盾。 $\square$

定理 6.2. 设 $Y,Y_\alpha(\alpha\in I)$ 都是拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 的连通子集。如果对任何 $\alpha\in I$, $Y_\alpha\cap Y\neq\varnothing$，则 $Y\cup(\bigcup\limits_{\alpha}Y_\alpha)$ 是 X 的连通子集。

证明. 若 $Y\cup(\bigcup\limits_{\alpha}Y_\alpha)$ 是非连通的，则 $Y\cup(\bigcup\limits_{\alpha}Y_\alpha)=A\cup B$，$A$ 和 B 是 $Y\cup(\bigcup\limits_{\alpha}Y_\alpha)$ 的两个非空不相交的开集。由定理 6.1，连通子集 $Y\subset A$（或 B），连通子集 $Y_\alpha\subset A$（或 B）。不妨设 $Y\subset A$，因为 $Y\cap Y_\alpha\neq\varnothing$，所以 $Y_\alpha\subset A\,(\alpha\in I)$。于是 $Y\cup(\bigcup\limits_{\alpha}Y_\alpha)\subset A$，$Y\cup(\bigcup\limits_{\alpha}Y_\alpha)=A$，因而 $B=\varnothing$，这与上述 $B\neq\varnothing$ 矛盾。 □

定理 6.3. 设 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间，Y 是 X 的连通子集，且 $Y\subset Y_1\subset\bar{Y}$，则 Y_1 也是连通的。特别地 $\bar{Y}$ 也是连通的。

换句话说，如果 Y_1 是通过往连通子集 Y 上增添部分或全部它的极限点得到的，那么 Y_1 是连通的。

证明. 设 Y_1 非连通，因而 $Y_1=A\cup B$，这里 A,B 是 Y_1 的非空不相交的开集。因为 Y 连通，由定理 6.1，$A\cap Y=\varnothing$ 或 $B\cap Y=\varnothing$。不妨设 $B\cap Y=\varnothing$，于是 $Y\subset A$。

由题设 $Y\subset Y_1\subset\bar{Y}$，则 Y_1-Y 中的每一点都是 Y 在 X 中的聚点。因为 $Y\subset A$, $B=Y_1-A\subset Y_1-Y$，所以非空集合 B 的任一点 b 都是 Y 在 X 中的聚点。此外，由于 $Y\subset A\cup B=Y_1\subset X$，$b$ 也是 Y 在 Y_1 中的聚点。再由 $Y\subset A$，b 也是 A 在 Y_1 中的聚点，则 $b\in A$(A 是 Y_1 中既开又闭的子集)，$b\in A\cap B=\varnothing$，矛盾。 □

例 6.1. Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 是连通的。

若 $\mathbb{R}$ 非连通，于是 $\mathbb{R}=A\cup B$，A,B 是 $\mathbb{R}$ 的非空不相交闭集。设 $a\in A$, $b\in B$。不妨设 $a<b$，显然 $A\cap[a,b]$ 和 $B\cap[a,b]$ 都是 $\mathbb{R}$ 的非空闭集。令 $\lambda=\inf(B\cap[a,b])$，容易看出 $\lambda\in\bar{B}=B$，且 $a<\lambda$（若 $a=\lambda\in B$，则 $a\in A\cap B=\varnothing$，矛盾）。此外，$\lambda_n=\lambda-\frac{\lambda-a}{n}\to\lambda\,(n\to+\infty)$，且 $\lambda_n\in A$，则 $\lambda\in\bar{A}=A$。于是 $\lambda\in A\cap B=\varnothing$，矛盾。

设 $Y=\{0_{\mathbb{R}^n}=(0,\cdots,0)\}$，显然 Y 是连通的。对任何 $a\in\mathbb{R}^n$, $a\neq 0$，作过 0 和 a 的直线 $Y_a=\{ta\mid t\in\mathbb{R}\}$，由上述可知 Y_a 是连通的。于是，从定理 6.2 推出 $\mathbb{R}^n=Y\cup(\bigcup\limits_{a\in\mathbb{R}^n}Y_a)$ 也是连通的。

我们也可用反证法来证明 $\mathbb{R}^n$ 是连通的、若 $\mathbb{R}^n$ 是非连通的，则 $\mathbb{R}^n=A\cup B$, A,B 是 $\mathbb{R}^n$ 中非空不相交的闭集。设 $a\in A$, $b\in B$，l 为连 a 和 b 的直线，于是 $A\cap l$ 和 $B\cap l$ 是 l 的两个非空不相交闭集，这与上述直线 l 连通相矛盾。

例 6.2.

1. 设 $(X,\mathcal{T}_{discrete})$ 是不少于二点的离散拓扑空间。由于 $X=\{a\}\cup(X-\{a\})$, $a\in X$，这里 $\{a\}$ 和 $X-\{a\}$ 是 X 的两个不相交的非空开集，所以 X 是非连通的。
2. 由于 $\mathbb{Q}=\{q\in\mathbb{Q}\mid q<\sqrt{2}\}\cup\{q\in\mathbb{Q}\mid q>\sqrt{2}\}$。所以 $\mathbb{Q}$ 是非连通的。
3. Lec3 例 2.6 中的 X 是非连通的。事实上，

$$\begin{aligned}X&=\{x\mid-\infty<x<0\}\cup\{x\mid 0\leq x<+\infty\}\\&=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}[-n,0)\right)\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}[0,n)\right)\end{aligned}$$

它是两个不相交的非空开集的并。

定理 6.4. 设 $(X, \mathcal{T}_1)$ 和 $(Y, \mathcal{T}_2)$ 为拓扑空间，$f : X \to Y$ 是连续映射。如果 X 是连通的，则 $f(X)$ 也是连通的（连通性在连续映射下是不变的）。

证明. $f(X) \subset Y$ 为 Y 的子拓扑空间。显然 $f : X \to f(X)$ 也是连续映射。设 $f(X)$ 是非连通的，则 $f(X) = A \cup B$，A 与 B 是 $f(X)$ 的非空不相交的开子集。由 f 连续，$f^{-1}(A)$ 与 $f^{-1}(B)$ 也是 X 的开自己，明显地，它们非空且不相交，又 $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$，这与 X 连通相矛盾。 □

评论. 由定理 6.4 得到连通性是拓扑性质。也可直接证明连通性和非连通性是拓扑性质。非连通性是连续映射下不变的吗？

例 6.3.
1. 由 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \tan \frac{2x-(b+a)}{2(b-a)}\pi$ 是同胚映射以及 $\mathbb{R}$ 是连通的。所以 (a, b) 是连通的。类似地可证，$(-\infty, a), (a, +\infty)$ 是连通的。
2. 由 $(a, b) \subset [a, b) \subset [a, b] = \overline{(a, b)}$ 及定理 6.3 可得到 $[a, b)$ 和 $[a, b]$ 是连通的。类似地，$(-\infty, a], [a, +\infty), (a, b]$ 是连通的。

例 6.4. S^1 与双纽线 $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2\}$ 是不同胚的，若存在同胚映射 $f : S^1 \to Y$, 则 $f : S^1 - \{f^{-1}(0, 0)\} \to Y - \{(0, 0)\}$ 也是同胚映射。但 $S^{-1} - \{f^{-1}(0, 0)\}$ 连通，而 $Y - \{(0, 0)\}$ 不连通，矛盾。

6.2 道路连通

定义 6.2. 设 $(X, \mathcal{T})$ 为拓扑空间，$p, q \in X$，$I = \{t \mid 0 \le t \le 1\} \subset \mathbb{R}$。如果连续映射 $f : I \to X$ 使得 $f(0) = p$, $f(1) = q$，则 f 称为 X 中连接 p 与 q 的一条道路 *(Path)*。

如果对于 X 的任意两点，在 X 中都有一条连接它们的道路，X 就称为道路连通的 *(Path-connected)*。

例 6.5. X 中的一条道路指的是一个连续映射 $f : I \to X$，而不是像集 $f(I) \subset X$。可能有另一个连续映射 $g : I \to X$, $g \ne f$，但像集 $g(I) = f(I)$。这是 f 和 g 是连接 $f(0)$ 和 $f(1)$ 的两条不同的道路。例如

$$f : I \to X = I, \quad f(t) = t,$$
$$g : I \to X = I, \quad g(t) = \sin \frac{\pi}{2} t$$

显然，$f \ne g$，但 $f(I) = g(I) = I$。

例 6.6. 设 $A \subset \mathbb{R}^n$，如果任何 $p, q \in A$，必有直线段 $(1-t)p + tq \in A$ $(0 \le t \le 1)$，则称 A 为 $\mathbb{R}^n$ 中的凸集 *(Convex set)*。例如：$\mathbb{R}^n$，$\mathbb{R}^n$ 中的 k 维子向量空间，$\mathbb{R}^n$ 中的开（或闭）的长方体，$\mathbb{R}^n$ 中开（或闭）的球体，$\mathbb{R}$ 中各种区间等都是凸集。

对于任何 $p, q \in A$，令 $f : I \to A$, $f(t) = (1-t)p + tq$。显然 f 是连接 p 和 q 的一条道路。因此，凸集 A 是道路连通的。

例 6.7. 设 $S^n = \{x = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$，对于任何 $p, q \in S^n$，取 p, q 所在的二维平面上的一个规范正交基 $\{e_1 = p,\ e_2\}$，则 $q = \cos\theta \cdot e_1 + \sin\theta \cdot e_2$，令

$$\begin{aligned} f : & I \to S^n, \\ & t \mapsto \cos t\theta \cdot e_1 + \sin t\theta \cdot e_2 \end{aligned}$$

于是 f 是连接 p 与 q 的一条道路，所以 S^n 是道路连通的。

定理 6.5. *道路连通的拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 是连通的。但反之并不成立（参看例 6.8）*

证明. 若 X 非连通，则 $X = A \cup B$, A, B 是 X 的非空不相交的开集。取 $a \in A$, $b \in B$。因为 X 是道路连通的，X 中存在连接 a 与 b 的一条道路 $f : I \to X$, $f(0) = a \in A$, $f(1) = b \in B$，于是

$$f(I) = f(I) \cap (A \cup B) = (f(I) \cap A) \cup (f(I) \cap B)$$

$$f(I) \cap A \neq \varnothing,\ f(I) \cap B \neq \varnothing,\ (f(I) \cap A) \cap (f(I) \cap B) = f(I) \cap (A \cap B) = \varnothing$$

即 $f(I)$ 是非连通的。另一方面，因为 I 是连通的，由定理 6.4，$f(I)$ 也是连通的，这就推出了矛盾。 $\square$

评论. *由定理 6.5 可知例 6.1,3,6,7 中的拓扑空间都是连通的。*

例 6.8. 连通的拓扑空间不必是道路连通的。

设 $A = \{(x, y) \mid y = \sin\frac{1}{x},\ 0 < x \leq \frac{2}{\pi}\} \subset \mathbb{R}^2$, $B = \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$。显然 $\bar{A} = A \cup B$。因为 A 是 $(0, 1]$ 的连续像，由定理 6.4 它是连通的。再由定理 3，$\bar{A}$ 也是连通的。

但 $\bar{A}$ 不是道路连通的。事实上，设 $a \in A$, $b \in B$，$f : I \to \bar{A}$ 是任一映射，使得 $f(0) = a$, $f(1) = b$，则 f 必不连续。

若 $f(t) = (x(t), y(t))$ 连续。令

$$t_1 = \inf\{t \mid f(t) \in B\}$$

显然 $0 < t_1$。由 t_1 的定义，存在 $t_n \to t_1^+$, $f(t_n) \in B$。于是

$$\lim_{t \to t_1^-} x(t) = x(t_1) = \lim_{n \to +\infty} x(t_n) = \lim_{n \to +\infty} 0 = 0,$$

$$y(t_1) = \lim_{t \to t_1^-} y(t) = \lim_{t \to t_1^-} \sin\frac{1}{x(t)}$$

但明显地，当 $t \to t_1^-$ $(x(t) \to 0)$ 时，右边的极限不存在，矛盾。

定理 6.6. *设 $(X, \mathcal{T}_1)$ 和 $(Y, \mathcal{T}_2)$ 为拓扑空间，$f : X \to Y$ 是连续映射。如果 X 是道路连通的，则 $f(X)$ 也是道路连通的（道路连通性在连续映射下是不变的）。*

证明. 设 $p, q \in f(X)$。则存在 $a, b \in X$，使得 $f(a) = p$, $f(b) = q$。由于 X 是道路连通的，则存在连续映射 $\varphi : I \to X$, $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$。于是 $f \circ \varphi : I \to f(X)$, $f \circ \varphi(0) =$

p，$f\circ\varphi(1)=q$ 就是 $f(X)$ 中连接 p 和 q 的一条道路。这就证明了 $f(X)$ 是道路连通的。 □

6.3 连通分支

定义 6.3. 设 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间，如果 A 是最大的连通子集（即 A 既是连通的，并且又不是 X 的另一连通子集的真子集），则称 A 为 X 的一个连通分支 *(Connected component)*。

如果 A 是 X 的最大的道路连通子集，则称 A 为 X 的一个道路连通分支 *(Path-connected component)*。

定理 6.7. 拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 的每一个非空连通子集 Y 必落在一个连通分支中。X 的每个连通分支都是 X 的闭集。于是 X 划分成若干个两两不相交的连通分支。

证明. 设 C 是包含 Y 的所有连通子集的并集。由定理 6.2，C 是连通的。如果 D 是 X 中包含 C 的连通子集，由 C 的取法可知 $D\subset C$，所以 $D=C$。这就证明了 C 是一个连通分支。

X 的每一个分支 C 是连通的，所以根据定理 6.3，它在 X 中的闭包 $\bar{C}$ 也是连通的。由 C 的最大性推出 $\bar{C}\subset C$，则 $C=\bar{C}$ 是 X 的闭集。

设 C_x 是 X 中含 x 的连通分支（它是所有含 x 的连通子集的并集）。如果 C_{x_1} 和 C_{x_2} 相交，则由定理 6.2 推出 $C=C_{x_1}\cup C_{x_2}$ 也是连通的。再从 C_{x_1} 和 C_{x_2} 的最大性可知 $C=C_{x_1}=C_{x_2}$。因此，X 的任两连通分支或者不相交或者重合。 □

定理 6.8. 拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 的每一个非空道路连通子集 Y 必落在一个道路连通分支中。于是 X 划分为若干个两两不相交的道路连通分支。

证明. 设 $C_x=\{y\mid \text{在}X\text{中存在连接}x\text{和}y\text{的道路}f\}$，则 C_x 是含 x 的一个道路连通分支。

因为 $\varphi(u)=f(ut)$ 是连接 $\varphi(0)=f(0)=x$ 和 $\varphi(1)=f(t)$ 的一条道路，所以 $f(t)\in C_x$ $(0\le t\le 1)$。

对任何 $y,z\in C_x$，设 f 是连接 x 和 y 的道路，g 是连接 x 和 z 的道路。则

$$h(t)=\begin{cases} f(1-2t), & 0\le t\le \frac{1}{2},\\ g(2t-1), & \frac{1}{2}<t\le 1\end{cases}$$

是 C_x 中连接 y 和 z 的一条道路。

如果 D 是包含 C_x 的道路连通子集，则 x 与 D 中任一点都有一条道路相连，所以 $D\subset C_x$，$D=C_x$。这就证明了 C_x 是一个道路连通分支。

如果 Y 是一个非空道路连通子集，任取 $y\in Y$，显然 $Y\subset C_y$。

最后，如果 C_{x_1} 和 C_{x_2} 相交，$z\in C_{x_1}\cap C_{x_2}$，则对任何 $x\in C_{x_1}$，x 与 z 道路相连接，所以 $x\in C_z$，$C_{x_1}\subset C_z$。而 C_z 是包含 C_{x_1} 的道路连通子集，于是 $C_{x_1}=C_z$。同理 $C_{x_2}=C_z$。这就证明了 C_{x_1} 与 C_{x_2} 或者不相交，或者重合。 □

例 6.9. 1. $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ 形成的子拓扑空间的连通分支和道路连通分支都是单点集，是 $\mathbb{R}$ 的闭集但非开子集。

2. 例 6.8 中的拓扑空间 $X = A \cup B$，只有一个连通分支 $A \cup B$。但道路连通分支却有两个，即 $A \cup B$。其中 A 是 $A \cup B$ 的开子集但非闭子集，而 B 是闭子集但非开子集。

6.4 $\mathbb{R}^n$ 中的区域

定义 6.4. 设 $A \subset \mathbb{R}^n$，如果对任何 $p, q \in A$，必存在一条 A 中的折线 $pp_1p_2\cdots p_Rq$ 连接 p 和 q（严格地说，存在一条连接 p 和 q 的连续曲线 f，而它的像集是 A 中的折线 $pp_1p_2\cdots p_Rq$），则称 A 为折线连通的。（显然，折线连通 $\Rightarrow$ 道路连通 $\Rightarrow$ 连通）

定理 6.9. 设 $G \subset \mathbb{R}^n$ 是开集，则以下表述等价：

1. G 是折线连通的；

2. G 是道路连通的；

3. G 是连通的。

连通（或折线连通或道路连通）的开集 G 称为 $\mathbb{R}^n$ 中的开区域 (Open region)。而 $\bar{G}$ 称为闭区域 (Closed region)。

证明. $(1 \Rightarrow 2)$ 显然。

$(2 \Rightarrow 3)$ 由定理 6.5 推出。

$(3 \Rightarrow 1)$ 设 $G_x = \{y \mid 在G中存在连接x和y的折线\}$。类似于定理 6.8 的证明（只需将“道路连接”改为“折线连接”）可以得到 G_x 是一个折线连通分支。如果 Y 是一个非空折线连通子集，则对任何 $y \in Y$，有 $Y \subset G_y$。此外，G_x 和 G_y 或者不相交，或者重合。

不难看出 G_x 是 $\mathbb{R}^n$ 的开集。事实上，对任何 $p \in G_x$，由于 G 是开集，存在球形邻域 $U(p,\varepsilon) \subset G$，而对任何 $q \in U(p,\varepsilon)$ 有直线段连接 p 和 q，所以有折线将 x 和 q 相连，即 $q \in G_x$，$U(p,\varepsilon) \subset G_x$。

如果 $G_x \neq G$ $(x \in G)$，则 $G = G_x \cup \left(\bigcup_{y \in G - G_x} G_y\right)$。因此 G 可表示为两个非空不相交的开集的并集，这与 G 连通相矛盾。于是 $G_x = G$，即 G 是折线连通的。 □