Lec6 Note of Mathematical Analysis B3

Xuxuayame

日期：2022 年 9 月 16 日

这一节依然参考讲义与 Munkres。

§5 可数性和分离性

5.1 可数性

定义 5.1. 设 $(X, \mathcal{T})$ 为拓扑空间，如果对每一点 $x \in X$，存在 x 处的一个可数拓扑基（即点 x 处的一个可数的开集族 $\mathcal{B}(x) = \{G_\alpha\}$，它对 x 的任何邻域 G，都有 $G_\alpha \in \mathcal{B}(x)$，使得 $x \in G_\alpha \subset G$），则称 $(X, \mathcal{T})$ 为A_1（拓扑）空间。

定义 5.2. 如果拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 存在一个可数拓扑基，则称 $(X, \mathcal{T})$ 为A_2（拓扑）空间。

定理 5.1. *A_2 空间必为 A_1 空间，反之不成立（参看例 5.1）。*

证明. 设 $\mathcal{B}$ 是 A_2 空间 $(X, \mathcal{T})$ 的可数拓扑基。对任何 $x \in X$，令 $\mathcal{B}(x) = \{G \mid x \in G,\ G \in \mathcal{B}\}$，容易验证 $\mathcal{B}(x)$ 满足定义 5.1 中的条件，因此 $(X, \mathcal{T})$ 是 A_1 空间。 □

例 5.1. 设 $X = \mathbb{R}$，取离散拓扑空间 $(X, \mathcal{T}_{discrete})$，$X$ 的任何子集既是开集又是闭集。因为 $(X, \mathcal{T}_{discrete})$ 的任一拓扑基必须包含所有的单点集，所以不可数，这就证明了它不是 A_2 空间。此外，单点集 $\{x\}$ 显然形成点 x 处的一个可数拓扑基，因而 $(X, \mathcal{T}_{discrete})$ 是 A_1 空间。

例 5.2. Lec4 例 3.9 中的 $(X, \mathcal{T})$ 不是 A_1 空间。

（反证）设 $x \in X$，$\{X - C_n \mid C_n\text{是至多可数集},\ n = 1, 2, \cdots\}$ 是 x 处的一个可数拓扑基。因为 X 不可数，存在 $a \in X$，$a \neq x$，$a \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$。$X - \{a\}$ 是 x 的一个邻域，但 $X - C_n \not\subset X - \{a\}\ (n = 1, 2, \cdots)$，这与 $\{X - C_n\}$ 是 x 处的拓扑基相矛盾。于是，$(X, \mathcal{T})$ 不是 A_1 空间。

定理 5.2. *拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 为 A_2 空间 $\Rightarrow (X, \mathcal{T})$ 有可数稠密子集。反之不成立（参看例 5.3）。*

证明. 设 $\{G_n \mid n = 1, 2, \cdots\}$ 是 X 的可数拓扑基。令 $Y = \{y_n \mid y_n \in G_n\}$，容易证明 Y 是 X 的可数稠密子集。事实上，对任何 $x \in X$ 和 x 的邻域 G，存在 G_n，使得 $x \in G_n \subset G$，于是 $y_n \in G$，则 $x \in \bar{Y}$，$\bar{Y} = X$。 □

例 5.3. 设 Y 是异于 x 的不可数集，$X = \{x\} \cup Y$, $\mathcal{T} = \{\varnothing, \{x\} \cup A \mid A \subset Y\}$，容易验证 $(X, \mathcal{T})$ 是拓扑空间，且 $\overline{\{x\}} = X$，所以 X 具有可数稠密子集。但由于 $(X, \mathcal{T})$ 的任何拓扑基必包含开集族 $\{\{x\} \cup \{y\} \mid y \in Y\}$，而它是不可数的。因此，$(X, \mathcal{T})$ 无可数拓扑基，即不是 A_2 空间。

定义 5.3. 如果度量空间 (X, ρ) 有一个可数稠密子集，则称 (X, ρ) 为可分度量空间 *(Separable metric space)*。

定理 5.3. 设 $(X, \mathcal{T})$ 为由度量空间 (X, ρ) 诱导的拓扑空间。则以下三个条件：

1. $(X, \mathcal{T})$ 是 A_2 空间；
2. (X, ρ) 有一个可数球形邻域族为 $(X, \mathcal{T})$ 的拓扑基；
3. (X, ρ) 是可分度量空间。

是彼此等价的。

证明. $(2 \Rightarrow 1)$：由 A_2 空间的定义。

$(1 \Rightarrow 3)$：由定理 5.2。

$(3 \Rightarrow 2)$：设 Y 是可分度量空间 (X, ρ) 的稠密子集，则 $\mathcal{B} = \{U(y, r) \mid y \in Y, r \in \mathbb{Q}\}$ 是 (X, ρ) 的可数球形邻域族，它是一个拓扑基。因为 $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$，所以只需验证 X 的任一开集 G 和任何 $x \in G$，存在 $U(y, r) \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in U(y, r) \subset G$。

当 $G = X$ 时，任取一点 $y \in Y$ 和有理数 $r > \rho(x, y)$，则 $x \in U(y, r) \subset X = G$。

当 $G \neq X$ 时，因为 $x \notin X - G$（闭集），所以 $d = \rho(x, X - G) > 0$[1]。则存在 $y \in Y$，使 $\rho(x, y) < \frac{d}{3}$。再取有理数 r 满足 $\frac{d}{3} < r < \frac{2d}{3}$。于是 $x \in U(y, r) \subset G$。 □

定义 5.4. 设 $(X, \mathcal{T})$ 为拓扑空间，$Y \subset X$，如果 $\eta = \{G_\alpha\}$ 是 X 的一族子集，使得

$$Y \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$$

则称 η 为 Y 的在 X 中的一个覆盖 *(Cover)*。如果 η 中元素的个数是有限的或可数的，η 分别称为有限覆盖 *(Finite cover)* 或可数覆盖 *(Countable cover)*。如果 $\eta' \subset \eta$ 也是 Y 的在 X 中的一个覆盖，则称 η' 为 η 的子覆盖 *(Subcover)*。如果 $Y = X$，我们简称 η 为 X 的覆盖。特别当所有的 G_α 为开（闭）集是，称 η 为 Y 的在 X 中的开（闭）覆盖 *(Open(closed)cover)*。

定理 5.4. ***(Lindelöf)*** 设 $(X, \mathcal{T})$ 为 A_2 空间（即具有可数拓扑基 $\mathcal{B}$），则它的任意开覆盖 η 有一个可数的子覆盖。

---

[1]需证明

证明. 设 $\mathcal{B}' = \{B \mid B \in \mathcal{B},\ B \subset G,\ G \in \eta\} \subset \mathcal{B}$。对于每个 $B' \in \mathcal{B}'$，取定一个 $G(B') \in \eta$，使得 $B' \subset G(B')$。我们令

$$\eta' = \{G(B') \mid B' \in \mathcal{B}'\}$$

由于 $\mathcal{B}'$ 可数，η' 是 η 的可数子族。余下的只需证明 η' 是 η 的子覆盖。事实上，对任何 $x \in X$，必有 $G \in \eta,\ x \in G$。于是存在 $B \in \mathcal{B}$，使 $x \in B \in G$。从 $\mathcal{B}'$ 的定义可知 $B \in \mathcal{B}'$，这就证明了

$$x \in G(B) \in \eta'$$

□

5.2 分离性

当我们考虑更一般的拓扑空间中的开集、闭集与极限点时，我们对实直线与实平面的认识可能是具有误导性的。举个例子，在 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}^2$ 中，每个单点集 $\{x_0\}$ 都是闭的。这当然很容易，每个异于 x_0 的点都有一个与 $\{x_0\}$ 不交的邻域，所以 $\{x_0\}$ 是它自己的闭包。但这件事对任意拓扑空间而言并不都是对的。考虑一个三元集 $\{a, b, c\}$ 上的拓扑 $\mathcal{T} = \{X, \varnothing, b, \{a, b\}, \{b, c\}\}$。在这个拓扑空间中，单点集 $\{b\}$ 不是闭的，因为它的补集不是开的。

类似地，当我们处理更一般的拓扑空间中的收敛序列时，我们所熟知的 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}^2$ 所具有的性质可能是十分误导人的。在任意拓扑空间中，我们称 X 中的一个序列 $x_1, x_2, \cdots$ 收敛到 $x \in X$，指的是对每个 x 的邻域 U，存在正整数 N 使得 $x_n \in U$ 对所有 $n > N$ 成立。在 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}^2$ 中，一个序列不可能收敛到多个点，但在任意拓扑空间中，它可以。还是刚才的例子，取常序列 $x_n = b,\ \forall\, n \in \mathbb{N}_+$，那么该序列不仅收敛到 b，还收敛到 a 和 c。

数学家们认为那些单点集不闭，或是序列收敛到多个点的拓扑，多少有点怪。它们实在没啥意思，因为它们很少出现在数学的其他分支中。而且如果我们承认这样的例子，那么我们能证明的拓扑空间的定理将十分有限。因此，我们经常附加额外的条件来排除这样的例子，使得我们考虑的一类空间更加贴近我们的几何直观。下面的条件是数学家 Felix Hausdorff 提出的，所以数学家们用他的名字来命名之。

定义 5.5. 如果拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 的任意两个不同的点有不相交的邻域，则称 $(X, \mathcal{T})$ 为T_2 空间或豪斯多夫空间 *(Hausdorff space)*。

定理 5.5. *Hausdorff* 空间 X 中的任意有限点集为闭集。

证明. 只需证任意单点集 $\{x_0\}$ 为闭集。若 $x \in X$ 异于 x_0，那么 x 和 x_0 分别有不交邻域 U 和 V。因为 U 和 $\{x_0\}$ 不交，x 不在集合 $\{x_0\}$ 的闭包中。于是 $\{x_0\}$ 的闭包是 $\{x_0\}$ 自己，所以它是闭集。 □

不过有限点集为闭集的条件事实上是弱于 Hausdorff 条件的。比如说，实直线 $\mathbb{R}$ 配备余有限拓扑不是 Hausdorff 空间，但有限点集是闭集。而有限点集为闭集的条件也有一个名字：T_1 公理 *(T_1axiom)*。不过我们只在下面的定理中提到它：

定理 5.6. *设 X 为满足 T_1 公理的空间，$A \subset X$。那么 x 为 A 的极限点当且仅当 x 的每个邻域都包含 A 的无穷多点。*

证明. 若 x 的每个邻域都交 A 于无穷多点，则邻域必然交 A 于 x 以外的点，故 x 为 A 的极限点。

反过来，假设 x 为 A 的极限点，且 x 的某些邻域 U 仅交 A 于有限多点。那么 U 也交 $A-\{x\}$ 于有限多点。设 $\{x_1, \cdots, x_m\} = U \cap (A - \{x\})$。则 $X - \{x_1, \cdots, x_m\}$ 为 X 的开集，因为有限点集 $\{x_1, \cdots, x_m\}$ 为闭集。于是

$$U \cap (X - \{x_1, \cdots, x_m\})$$

为 x 的与 $A - \{x\}$ 不交的邻域。这与 x 为 A 的极限点矛盾。 □

我们对 T_1 公理不感兴趣的原因之一是，很多拓扑中有趣的定理不只是需要这个公理，还需要 T_2 公理。更进一步，绝大多数对数学家重要的空间是 Hausdorff 空间。下面两个定理一定程度上支撑了这个说法。

定理 5.7. *若 X 为 Hausdorff 空间，则 X 中的序列收敛到 X 中至多一点。*

证明. 假设 X 中序列 $\{x_n\}$ 收敛到 x。若 $y \neq x$，分别取 x 和 y 的不交邻域 U 和 V。因为至多有有限多项 x_n 不在 U 中，所以 V 只能包含有限多项 x_n。因此 x_n 不收敛到 y。 □

定理 5.8.
1. *设 $(X, \mathcal{T})$ 为 T_2 空间，则它的子拓扑空间 Y 也是 T_2 空间。*
2. *设 $(X_1, \mathcal{T}_1)$ 和 $(X_2, \mathcal{T}_2)$ 为 T_2 空间，则它们的积拓扑空间也是 T_2 空间。*

证明.
1. 设 $x, y \in Y \subset X$，$x \neq y$。由 $(X, \mathcal{T})$ 是 T_2 空间，存在 x 和 y 的不相交的邻域 $U(x)$ 和 $U(y)$，则 $U(x) \cap Y$ 和 $U(y) \cap Y$ 是 x 和 y 关于 Y 的不相交的邻域，于是子空间 Y 也是 T_2 空间。
2. 设 $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$，$(x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)$，则至少有一个分量不同，不妨设 $x_2 \neq y_2$。由于 $(X_2, \mathcal{T})$ 是 T_2 空间，所以存在 x_2 和 y_2 关于 $(X_2, \mathcal{T})$ 的不相交邻域 $V(x_2)$ 和 $V(y_2)$，而 $X_1 \times V(x_2)$ 和 $X_1 \times V(y_2)$ 就是 (x_1, x_2) 和 (y_1, y_2) 关于积拓扑空间不相交的邻域，这证明了积拓扑空间也是 T_2 空间。

□

定义 5.6. 如果拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 的任意一点与不包含此点的一个闭集有不相交的邻域，则称 $(X, \mathcal{T})$ 为正则空间 *(Regular space)*。

如果拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 的任意两个不相交的闭集有不相交的邻域，则称 $(X, \mathcal{T})$ 为正规空间 *(Normal space)*。

定理 5.9. 设 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间，则

1. $(X,\mathcal{T})$ 为正则空间 $\Leftrightarrow$ 拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 的任一点 x 的每个邻域 $U(x)$，必存在 x 的邻域 $V(x)$，使得 $\overline{V(x)} \subset U(x)$。
2. $(X,\mathcal{T})$ 为正规空间 $\Leftrightarrow$ 拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 的任一闭集 F 的每个邻域 $U(F)$（即包含 F 的开集），必存在 F 的邻域 $V(F)$，使得 $\overline{V(F)} \subset U(F)$。

证明. 1. $(\Rightarrow)$ 因为 $(X,\mathcal{T})$ 是正则的，所以 x 与闭集 $F = X - U(x)$ 各有一个邻域 $V(x)$ 和 $V(F)$，使得 $V(x) \cap V(F) = \varnothing$，即 $V(x) \subset X - V(F)$。于是

$$\overline{V(x)} \subset \overline{X - V(F)} = X - V(F) \subset X - F = U(x)$$

$(\Leftarrow)$ 设 $x \in X$，F 是 $(X,\mathcal{T})$ 的闭集，且 $x \notin F$。显然 $U(x) = X - F$ 是 x 的一个邻域。由题设，存在 x 的邻域 $V(x)$，使得 $\overline{V(x)} \subset U(x)$。因为 $U(x) \cap F = (X - F) \cap F = \varnothing$，$\overline{V(x)} \cap F = \varnothing$，所以

$$X - \overline{V(x)}$$

是 F 的一个邻域，且 $V(x) \cap (X - \overline{V(x)}) = \varnothing$。

2. $(\Rightarrow)$ 因为 $(X,\mathcal{T})$ 是正规空间，则两个不相交的闭集 F 与 $F^* = X - U(F)$ 各有一个邻域 $V(F)$ 与 $V(F^*)$，使得 $V(F) \cap V(F^*) = \varnothing$，于是 $V(F) \subset X - V(F^*)$，

$$\overline{V(F)} \subset \overline{X - V(F^*)} = X - V(F^*) \subset X - F^* = U(F)$$

$(\Leftarrow)$ 设 F_1 和 F_2 是 $(X,\mathcal{T})$ 的任意两个不相交的闭集。容易看出，$U(F_1) = X - F_2$ 是 F_1 的一个邻域。根据题设，存在 F_1 的邻域 $V(F_1)$，使得 $\overline{V(F_1)} \subset U(F_1)$。因为 $U(F_1) \cap F_2 = (X - F_2) \cap F_2 = \varnothing$，$\overline{V(F_1)} \cap F_2 = \varnothing$，所以 $X - \overline{V(F_1)}$ 是 F_2 的一个邻域，且

$$V(F_1) \cap (X - \overline{V(F_1)}) = \varnothing$$

□

定理 5.10. 设 (X,ρ) 为度量空间，则由它诱导的拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 是 T_2 空间、正则空间和正规空间。

证明. 1. 对任何 $x_1, x_2 \in X$，$x_1 \neq x_2$。$U(x_1, \frac{\rho(x_1,x_2)}{2})$ 和 $U(x_2, \frac{\rho(x_1,x_2)}{2})$ 分别是 x_1 和 x_2 的不相交的邻域。因此，$(X,\mathcal{T})$ 是 T_2 空间。

2. 设 F 是 $(X,\mathcal{T})$ 的闭集，$x \notin F$，则 $\rho(x,F) > 0$，于是 $U(x, \frac{\rho(x,F)}{2})$ 与 $X - \overline{U(x, \frac{\rho(x,F)}{2})}$ 分别是 x 和 F 的不相交的邻域。因此，$(X,\mathcal{T})$ 是正则空间。
3. 设 F_1 和 F_2 是 $(X,\mathcal{T})$ 的任意两个不相交的闭集。对于 $x_1 \in F_1$，$x_2 \in F_2$，由 $\varepsilon_1(x_1) = \frac{1}{2}\rho(x_1, F_2) > 0$ 和 $\varepsilon_2(x_2) = \frac{1}{2}\rho(x_2, F_1) > 0$ 得到 $U(F_1) = \bigcup\limits_{x_1 \in F_1} U(x_1, \varepsilon_1(x_1))$ 和 $U(F_2) = \bigcup\limits_{x_2 \in F_2} U(x_2, \varepsilon_2(x_2))$ 分别是 F_1 和 F_2 的邻域、

假设 $U(F_1)\cap U(F_2)\neq\varnothing$，即存在 $x\in U(F_1)\cap U(F_2)$。于是有 $x_1\in F_1$，$x_2\in F_2$，使得

$$x\in U(x_1,\varepsilon_1(x_1))\cap U(x_2,\varepsilon_2(x_2))$$

我们不妨设 $\varepsilon_1(x_1)\geq\varepsilon_2(x_2)$。则

$$\rho(x_1,F_2)\leq\rho(x_1,x_2)\leq\rho(x_1,x)+\rho(x,x_2)<\varepsilon_1(x_1)+\varepsilon_2(x_2)\leq 2\varepsilon_1(x_1)=\rho(x_1,F_2)$$

这就推出了矛盾。

□

评论. 因为 (X,ρ) 中单点集是闭集，所以定理 5.10 中的前两条可以作为第三条的特例。

例 5.4. T_2 空间但既非正则空间又非正规空间的例子。设

$$X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y\geq 0\},\ R:=\{(x,0]\}\subset X$$

记 $U(p,\varepsilon)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的通常的球形邻域。

对于任何 $p\in X,\varepsilon>0$，定义

$$V(p,\varepsilon)=\begin{cases}U(p,\varepsilon)\cap X, & \text{当}p\in X-R\\ [U(p,\varepsilon)\cap(X-R)]\cup\{p\}, & \text{当}p\in R\end{cases}$$

容易验证 $\mathcal{B}=\{V(p,\varepsilon)\}$ 是 X 的一个拓扑基，因而诱导出一个拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$。

设 $p,q\in X$，且 $p\neq q$，则 $\varepsilon=\frac{\rho(p,q)}{2}>0$，于是

$$p\in V(p,\varepsilon),q\in V(q,\varepsilon),V(p,\varepsilon)\cap V(q,\varepsilon)=\varnothing$$

即 $(X,\mathcal{T})$ 是 T_2 空间。

此外，点 $a=(0,0)$ 与 $R-\{a\}=X-\bigcup\limits_{\varepsilon>0}V(a,\varepsilon)$ 都是闭集。易证它们无不相交的邻域。因此，$(X,\mathcal{T})$ 既非正则空间又非正规空间。