Lec5 Note of Mathematical Analysis B3

Xuxuayame

日期：2022 年 9 月 13 日

这一节依然参考讲义与 Munkres。

§4 连续映射和同胚映射

4.1 映射

定义 4.1. 设 X,Y 是集合，如果有一个对应法则，使得对任何 $x \in X$，存在唯一的 $y \in Y$ 与之对应，我们就说给出了一个从 X 到 Y 的（单值）映射 *(Map)*f，记作

$$f : X \to Y \quad 或 \quad X \xrightarrow{f} Y$$

X 称为 f 的定义域 *(Domain)*，而

$$f(X) := \{f(x) \mid x \in X\} \subset Y$$

称为 f 的值域 *(Range)*。

如果 $f(X) = Y$，称 f 为满射 *(Surjection)* 或映上 *(Onto map)* 的。

如果 $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$，称 f 为单射 *(Injection)* 或一一映内 *(One-to-one map)* 的。

如果 f 既是满射，又是单射（即在 f 下，X 与 Y 是一一对应的），称 f 为双射 *(Bijection)* 或一一映上 *(One-to-one onto)* 的。此时令 $x = f^{-1}(y)$，就得到一个 $f^{-1} : Y \to X$，它也是双射，称为 f 的逆映射 *(Inverse map)*。

例 4.1.

1. 设 $y_0 \in Y$，如果
$$f : X \to Y, \quad f(x) = y_0$$
则称 f 为以 y_0 为值的常值映射 *(Constant map)*。
2. 如果 $f : X \to X$，且 $f(x) = x,\ x \in X$，则称 f 为 X 的恒等映射 *(Identity map)*，用 Id_X 表示。
3. 设 $X \subset Y,\ f : X \to Y,\ f(x) = x,\ x \in X$，则称 f 为包含映射 *(Inclusion map)*。
4.
$$\begin{aligned} f :& X_1 \times \cdots \times X_n \to Y \\ &(x_1, \cdots, x_n) \mapsto y \end{aligned}$$

称为n 元映射。

特别地，映射

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

是微积分中的 n 元函数。

5. 设 X, Y 都是实向量空间，如果映射

$$f : X \to Y$$

满足：

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),\ x_1, x_2 \in X, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

则称 f 为线性映射 *(Linear map)*。

6. 在 4 中用 $f_{X_i}(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n) = x_i$ 表示映射

$$f_{X_i} : X_1 \times \cdots \times X_n \to X_i$$

称 f_{X_i} 为第 i 个投影 *(Projection)*。

7. 设 $A \subset X$，我们定义

$$\chi_A : X \to \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 1,\ x \in A \\ 0,\ x \notin A \end{cases}$$

称 χ_A 为 A 的特征函数 *(Characteristic function)*。

8. Lec1 中的范数，内积，度量都是映射的例子。

定义 4.2. 如果映射

$$f, g : X \to Y$$

满足 $f(x) = g(x)$ 对任何 $x \in X$ 成立，则称 f 和 g 相等 *(Equivalent)*，记为 $f = g$。

设 $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$，用

$$h(x) = g(f(x)),\ x \in X$$

来定义映射 $h : X \to Z$，我们称 h 为 f 和 g 的复合 *(Composition)*，记作 $h = g \circ f$。

设 $A \subset X$，如果映射 $f : X \to Y,\ g : A \to Y$ 满足:

$$f(x) = g(x),\ x \in A$$

则称 f 为 g 在 X 上的扩张 *(Extension)* 或延拓，而 g 为 f 在 A 上的限制 *(Restriction)*，记作 $g = f|_A$。

设 $A \subset X$，称 $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ 为 A 在 f 下的像 *(Image)*。如果 $B \subset Y$，则称

$$f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\}$$

为 B 在 f 下的原像 *(Preimage)*。

4.2 连续映射

定义 4.3. 设 $(X,\mathcal{T}_1)$ 和 $(Y,\mathcal{T}_2)$ 为拓扑空间，$f:X\to Y$ 是一个映射，$x_0\in X$。如果 $f(x_0)$ 的任何邻域 $V(f(x_0))\subset Y$，必存在 x_0 的邻域 $U(x_0)\subset X$，使得

$$f(U(x_0))\subset V(f(x_0))$$

则称 f 在点 x_0 处连续 *(Continuous)*。

如果 f 在 X 的每点都连续，我们称 f 为连续映射 *(Continuous map)*。

当 $Y=\mathbb{R}$ 时，f 就是通常的连续函数 *(Continuous function)*。

例 4.2. 记 $\mathbb{R}$ 为实数集，配有通常拓扑，而 $\mathbb{R}_l$ 是实数集配有下限拓扑（由全体左闭右开区间生成的拓扑）。令

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_l$$

为恒等函数，$f(x)=x$ 对任意 $x\in\mathbb{R}$ 成立。那么 f 不是个连续函数；$\mathbb{R}_l$ 中的开集 $[a,b)$ 的原像就是它自己，但在 $\mathbb{R}$ 中不是开的。另一方面，恒等函数

$$g:\mathbb{R}_l\to\mathbb{R}$$

是连续的，因为 (a,b) 的原像是它自己，在 $\mathbb{R}_l$ 中为开集。

在分析中，我们学习了几条连续性的等价命题。某些可以拓展到任意空间，而它们会在下面的定理中被讨论。我们熟悉的“$\varepsilon-\delta$”定义和“收敛列”定义没法被拓展到任意空间，它们会在我们学习度量空间时被讨论。

定理 4.1. 设 $(X_1,\mathcal{T}_1)$ 和 $(Y,\mathcal{T})$ 是拓扑空间。$f:X\to Y$ 是映射，则下面四个条件是彼此等价的：

1. f 是连续映射；

2. Y 中每个开集在 f 下的原像是 X 中的开集；

3. Y 中每个闭集在 f 下的原像是 X 中的闭集；

4. 对任何 $A\subset X$，$f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}$。

证明. $(1\Rightarrow 2)$ 设 V 是 Y 中的任一开集。如果 $f^{-1}(V)\neq\varnothing$，则对任何 $x_0\in f^{-1}(V)$，有 $f(x_0)\in V$。因为 f 为连续映射，特别地，在点 x_0 也连续，于是存在 x_0 的一个邻域 $U(x_0)$，使得 $f(U(x_0))\subset V$，即

$$U(x_0)\subset f^{-1}(V)$$

所以

$$f^{-1}(V)=\bigcup_{x_0\in f^{-1}(V)}U(x_0)$$

为 X 中的开集。

$(2\Leftrightarrow 3)$ 由 $f^{-1}(Y-B)=X-f^{-1}(B)$ 推出。（留作习题）

$(3 \Rightarrow 4)$（反证）若 4 不成立，则存在一个 $A \subset X$ 和一点 $x_0 \notin A$，使得 $f(x_0) \notin \overline{f(A)}$，令 $B = \overline{f(A)}$，它是 Y 的一个闭集，容易证明 $f^{-1}(B)$ 不是 X 的闭集，因而与 3 矛盾。

事实上，因为 $f(A) \subset \overline{f(A)} = B$，所以 $A \subset f^{-1}(B)$，于是

$$x_0 \in \bar{A} \subset \overline{f^{-1}(B)}$$

此外，

$$f(x_0) \notin \overline{f(A)} = B$$

即

$$x_0 \notin f^{-1}(B)$$

因而 $f^{-1}(B)$ 不是 X 的闭集。

$(4 \Rightarrow 1)$（反证）如果 1 不成立，则存在 $x_0 \in X$，与 Y 中含 $f(x_0)$ 的某个开集 V，使得 x_0 的每个邻域都有一点 $x \neq x_0$，其像 $f(x) \notin V$。于是 x_0 是 $A = f^{-1}(Y - V)$ 的聚点，因而 $x_0 \in \bar{A}$。此外，显然

$$f(x_0) \notin Y - V = \overline{Y - V}$$

因为

$$f(A) = f \circ f^{-1}(Y - V) \subset Y - V$$

(留作习题)，

$$\overline{f(A)} \subset \overline{Y - V}$$

推出

$$f(x_0) \notin \overline{f(A)}$$

这与 4 相矛盾。 □

定理 4.2. *设 $(X, \mathcal{T}_1)$ 和 $(Y, \mathcal{T}_2)$ 为拓扑空间，如果 $f : X \to Y$ 在 x 处连续，则对于 X 中的任何 $\{x_n\}$，$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$，必有 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$。反之不成立（参看例 4.3）。*

证明. 设 V 为 $f(x)$ 的邻域，因为 f 在 x 连续，则存在 x 的邻域 U，使得 $f(U) \subset V$。由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x \in U$，故存在 N，当 $n \in N$ 时，有 $x_n \in U$。于是对于 V，存在 N，当 $n > N$ 时，有 $f(x_n) \in V$，这就证明了 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$。 □

例 4.3. 设 $(X, \mathcal{T})$ 为 Lec4 的例 3.9 所述的拓扑空间。$Y = \{y \mid 0 \le y \le 1\}$ 为 $\mathbb{R}$ 的子拓扑空间。而

$$f : X \to Y$$

由 $y = f(x) = x$ 来定义。由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ $(x_n, x \in X)$，必有 N，当 $n > N$ 时，$x_n = x$，所以

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$$

但是，f 在任何 $x \in X$ 都不连续。事实上，我们取球形邻域 $V(f(x),\varepsilon)$ 使得 $Y - V(f(x),\varepsilon)$ 还含不可数个点。于是，显然不存在 x 在 X 中的邻域 $U = X - C$（C 为至多可数集），使得

$$f(U) = U \subset V(f(x),\varepsilon)$$

那么我们如何构造从一个拓扑空间到另一个的连续映射呢？在分析中有很多种方法，某些可以拓展到任意空间，某些不能。我们先考虑一些对一般拓扑空间都成立的构造。

定理 4.3. 构造连续映射的方法

1. 拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 的恒等映射 Id_X 是连续映射。
2. 常值映射 $f: X \to Y$, $f(x) = y_0 \in Y$, $\forall\, x \in X$ 为连续映射。
3. 设 $(X,\mathcal{T}_1),(Y,\mathcal{T}_2)$ 和 $(Z,\mathcal{T}_3)$ 都是拓扑空间，且
$$\begin{aligned} f :& X \to Y & g : Y \to Z && g \circ f : X \to Z \\ & x_0 \mapsto y_0 & y_0 \mapsto z_0 && x_0 \mapsto z_0 \end{aligned}$$
如果 f 在 x_0 连续，g 在 y_0 连续，则 $g \circ f$ 在 x_0 也连续。
4. 在 3 中，如果 f 和 g 都是连续映射，则 $g \circ f$ 也是连续映射。
5. 若 A 是 X 的子空间，那么包含映射 $i: A \to X$ 为连续映射。
6. 若 $f: X \to Y$ 为连续映射，A 为 X 的子空间，那么限制映射 $f|_A : A \to Y$ 为连续映射。
7. 设 $f: X \to Y$ 为连续映射。如果 Z 是 Y 的子空间，且包含像集 $f(X)$，那么通过限制 f 的到达域得到的映射 $g: X \to Z$ 是连续的。如果 Z 是包含 Y 的拓扑空间，那么通过扩张 f 的到达域得到的映射 $h: X \to Z$ 是连续的。
8. 映射 $f: X \to Y$ 是连续的，如果 X 可以写成开集 U_α 的并，且 $f|_{U_\alpha}$ 对每个 α 都连续。

证明. 留作习题。 □

定理 4.4. 设 (X,ρ_1) 和 (Y,ρ_2) 都是度量空间，

$$f: X \to Y$$

是映射，则 f 在 x_0 连续 $\Leftrightarrow$ 对任何 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，对 $x, x_0 \in X$，当 $\rho_1(x,x_0) < \delta$ 时，必有 $\rho_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$。

$\Leftrightarrow$ 对 X 中的任何 $\{x_n\}$，$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$，必有 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$。

证明. 1. $(\Rightarrow)$ 任给 $\varepsilon > 0$，球形邻域 $V(f(x_0),\varepsilon)$ 是 Y 中的开集。由 f 在 x_0 连续，存在 X 中的 x_0 的邻域，使得 $f(U(x_0)) \subset V(f(x_0),\varepsilon)$，所以存在球形邻域 $U(x_0,\delta) \subset U(x_0)$，于是 $f(U(x_0,\delta)) \subset V(f(x_0),\varepsilon)$。

(⇐) 设 $V(f(x_0))$ 是 Y 中的 $f(x_0)$ 的任一邻域，则存在球形邻域

$$V(f(x_0),\varepsilon) \subset V(f(x_0))$$

由题设存在球形邻域 $U(x_0,\delta)$（X 中 x_0 的邻域）使得 $f(U(x_0,\delta)) \subset V(f(x_0),\varepsilon) \subset V(f(x_0))$。

2. (⇒) 由定理 4.2。

   (⇐)（反证）设 f 在 x_0 不连续，则存在 $f(x_0)$ 的邻域 V，不存在 x_0 的邻域 U，使得 $f(U) \subset V$。特别地，在 $U(x_0,\frac{1}{n})$ 中总有一点 x_n，使 $f(x_n) \notin V$。显然，$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$，但

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$$

   这与已知矛盾。

□

4.3 同胚映射或拓扑映射

定义 4.4. 设 $(X,\mathcal{T}_1)$ 和 $(Y,\mathcal{T}_2)$ 为拓扑空间，如果映射 $f: X \to Y$ 是双射，且 f 和逆映射 $f^{-1}: Y \to X$ 都是连续的，则称 f 为*同胚映射 (Homeomorphism)* 或*拓扑映射*。

如果存在一个同胚映射 f，则称拓扑空间 X 和 Y 是*同胚的 (Homeomorphic)*，记作 $X \cong Y$。

在任一同胚映射下保持不变的性质，称为*拓扑性质 (Topological property)*。

f^{-1} 连续的条件说的是，对每个 X 中的开集 U，U 在 $f^{-1}: Y \to X$ 下的原像在 Y 中是开的。但 U 在 f^{-1} 下的原像恰恰是 U 在 f 下的像。见图 1。

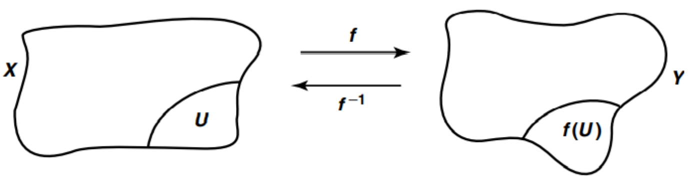

图 1

因此另一种定义同胚的方法是，一个双射 $f: X \to Y$ 满足 $f(U)$ 为开集当且仅当 U 为开集。

这指出同胚 $f: X \to Y$ 不只是给出了 X 和 Y 之间的双射，更是给出了 X 与 Y 的开集族之间的一一对应。于是，X 的任何完全用其拓扑表述的性质（即用 X 的开集表述的性质），通过对应 f，产生了 Y 上对应的性质。这样一种性质就是刚才提到的拓扑性质。

你可能已经在现代的代数中学习过代数对象比如群或者环之间同构 *(Isomorphism)* 的概念。同构是保持了代数结构的双射。拓扑中类似的概念就是上面的同胚，即保持了拓扑结构的双射。

定理 4.5. *设 $(X, \mathcal{T}_1)$ 和 $(Y, \mathcal{T}_2)$ 为拓扑空间，如果*

$$f : X \to Y$$

是连续双射，则下面的任意条件都能推出 f 是拓扑映射：

1. *如果 A 是 X 的任一开集，则 $f(A)$ 是 Y 的开集；*
2. *如果 A 是 X 的任一闭集，则 $f(A)$ 是 Y 的闭集；*
3. *对于任何 $A \subset X$，$f(\bar{A}) \supset \overline{f(A)}$。*

证明.

1. 因为 f 是 f^{-1} 的逆映射，并且开集 A 的原像 $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ 是 Y 的开集，所以 f^{-1} 也连续。
2. 因为闭集 A 的原像 $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ 是 Y 的闭集，所以 f^{-1} 也连续。
3. 对任何 $B \subset Y$，令 $A = f^{-1}(B)$，则 $f^{-1}(\bar{B}) = f^{-1}(\overline{f(A)}) \subset f^{-1}(f(\bar{A})) = \bar{A} = \overline{f^{-1}(B)}$，所以 f^{-1} 也连续。

□

例 4.4.

1. 令
$$\begin{aligned} f :& \mathbb{R} \to (a, b) \\ x \mapsto& f(x) = \frac{b-a}{\pi} \arctan x + \frac{b+a}{2} \end{aligned}$$
是一个同胚，且 f 有各阶导数。
2. 令
$$\begin{aligned} f :& \mathbb{R}^n \to \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\} \\ x \mapsto& f(x) = \frac{x}{1 + \|x\|} \end{aligned}$$
是一个同胚。
3. 考虑 f 从椭球面 $\{x = (x_1, \cdots, x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1\}$ 映到单位球面 $S^{n-1} = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\}$，$y = f(x) = \frac{x}{\|x\|}$。它是一个同胚。
4. 考虑 $f : [0, 1) \to S^1$，即单位圆，定义为 $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$。由三角函数的性质容易知道 f 是连续的双射，但其逆 f^{-1} 并不连续。比如说，定义域中开集 $[0, \frac{1}{4})$ 在 f 下的像在 S^1 中并不开，因为点 $p = f(0)$ 不落在 $\mathbb{R}^2$ 的任何使得 $V \cap S^1 \subset f(U)$ 的开集 V 中。见图。

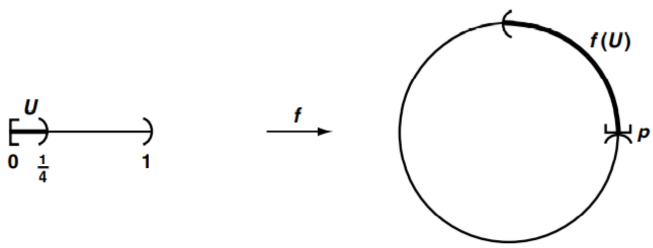

图 2