Lec4 Note of Mathematical Analysis B3

Xuxuayame

日期：2022 年 9 月 9 日

这一节依然参考讲义与 Munkres。

§3 开集、闭集、聚点、极限点和闭包

3.1 开集和闭集

定义 3.1. 设 $(X, \mathcal{T})$ 为拓扑空间，$a \in A \subset X$。如果存在一个开集 G_a，使得 $a \in G_a \subset A$，则称 a 为 A 的在 X 中的一个内点 *(Interior point)*。A 的在 X 中的内点的全体称为 A 的在 X 中的内部 *(Interior)*，记作 $\mathrm{Int}A$ 或 A° 或 A^i。

如果 a 是 $A^c = X - A$（A 在 X 中的余集）的一个内点，则称 a 为 A 的外点 *(Exterior point)*。A 的外点的全体称为 A 的外部 *(Exterior)*，记作 $\mathrm{Ext}A$ 或 A^e。

如果 a 既不是 A 的内点，又不是 A 的外点，即 a 的任何邻域 *(Neighborhood)*（含 a 的开集）必与 A 和 A^c 都相交，则称 a 为 A 的边界点 *(Boundary point)*。A 的边界点的全体称为 A 的边界 *(Boundary)*，用 ∂A 或 A^b 来表示。

定理 3.1. 设 $(X, \mathcal{T})$ 为拓扑空间，$A \subset X$，则

1. $A^\circ \subset A$, $A^e = (A^c)^o$, $\partial A = \partial A^c$;
2. A° 是 A 中关于 X 的最大开集；
3. A 是 X 的开集 $\Leftrightarrow A = A^\circ$。

证明. 1. 由定义 3.1 显然。

2. 对任何 $a \in A^\circ$，存在开集 G_a，使得 $a \in G_a \subset A$，因而 $G_a \subset A^\circ$，$A^\circ = \bigcup\limits_{a \in A^\circ} G_a$ 是开集。

   此外，如果 $G \subset A$ 是 X 的开集，则对任何 $a \in G$，取开集 $G_a = G$，于是 $a \in G_a = G \subset A$, $a \in A^\circ$, $G \subset A^\circ$。这就证明了 A° 是 A 中的关于 X 的最大开集。

3. $(\Rightarrow)$ 因为 A 是 X 的开集，所以 A 是 A 中关于 X 的最大开集，即 $A = A^\circ$。

   $(\Leftarrow)$ 若 $A = A^\circ$，由 2，它是 X 的开集。

$\square$

定义 3.2. 设 $(X,\mathfrak{T})$ 为拓扑空间，$A\subset X$，如果 $A^c=X-A$ 是 X 的开集，则称 A 为 $(X,\mathfrak{T})$ 或 X 的闭集 *(Closed set)*。闭集的全体记作 σ。

例 3.1. $\mathbb{R}$ 的子集 $[a,b]$ 是闭的，因为它的补集

$$\mathbb{R}-[a,b]=(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$$

是开的。类似地，$[a,+\infty)$ 是闭的，因为它的补集 $(-\infty,a)$ 是开的。这些事实解释了我们所用的术语“闭区间”和“闭射线”。而 $\mathbb{R}$ 的子集 $[a,b)$ 既不是开集也不是闭集。

例 3.2. 在集合 X 上的余有限拓扑中，σ 由 X 自己和所有有限子集组成。

例 3.3. 在集合 X 上的离散拓扑中，每个集合都是开集，进而指出每个集合也都是闭集。

这些例子暗含了一个数学家们谜语的答案：“一个集合和门有什么不同？”应当是：“一扇门要么是关的要么是开的，而不能二者皆之，但一个集合可以是开的，或闭的，或都是，或都不是！”

拓扑空间 X 的闭子集族 σ 具有类似于它的开子集族满足的性质：

定理 3.2. *拓扑空间 $(X,\mathfrak{T})$ 的闭集族 σ 具有下列三个性质：*

1. $X,\varnothing\in\sigma$；

2. *如果* $F_\alpha\in\sigma$，*则* $\bigcap\limits_\alpha F_\alpha\in\sigma$；

3. *如果* $F_1,F_2\in\sigma$，*则* $F_1\cup F_2\in\sigma$，

由 3 和归纳法可推出：如果 $F_j\in\sigma\ (j=1,\cdots,n)$，*则* $\bigcup\limits_{j=1}^n F_j\in\sigma$。

反之，设 σ 是 X 的一个子集族，且满足上述 1,2,3 的三个条件。则存在 X 的唯一的一个拓扑 $\mathfrak{T}$，使得拓扑空间 $(X,\mathfrak{T})$ 的闭集族就是 σ。

证明. 因为 $X^c=X-X=\varnothing\in\mathfrak{T}$, $\varnothing^c=X-\varnothing=X\in\mathfrak{T}$，所以 $X,\varnothing\in\sigma$。

如果 $F_\alpha,F_1,F_2\in\sigma$，则 $F_\alpha^c,F_1^c,F_2^c\in\mathfrak{T}$。由 De Morgan 公式和 $\mathfrak{T}$ 的条件 2,3 得到

$$(\bigcap_\alpha F_\alpha)^c=\bigcup_\alpha F_\alpha^c\in\mathfrak{T},\quad \bigcap_\alpha F_\alpha\in\sigma$$

$$(F_1\cup F_2)^c=F_1^c\cap F_2^c\in\mathfrak{T},\quad F_1\cup F_2\in\sigma$$

为了证明定理的后半部分，我们令

$$\mathfrak{T}=\{X-F=F^c\mid F\in\sigma\}$$

从 De Morgan 公式和 σ 的三个条件，$\mathfrak{T}$ 是 X 的一个拓扑。由 $\mathfrak{T}$ 的定义可知，

$$F\in\sigma\Leftrightarrow F^c=X-F\in\mathfrak{T}$$

因此，σ 是 $(X,\mathfrak{T})$ 的所有闭集组成的闭集族。此外，要使 σ 是另一个拓扑空间 $(X,\mathfrak{T}')$ 的所有闭集所组成的闭集族，当且仅当 $\mathfrak{T}'=\mathfrak{T}$。 $\square$

比起使用开集，我们也可以通过给出一个满足这条定理三个性质的的集族（即所谓的“闭集”）来确定集合上的拓扑。我们可以定义开集为闭集的补集，并像前面一样推导。这一套流程比起我们已经接受的那一套并没有什么特别的好处，而且绝大多数数学家偏好以开集来定义拓扑。

例 3.4. $\mathbb{R}^n$ 中开集的构造：

1. 直线 $\mathbb{R}^1$ 中的开集 G 是至多可数个两两不相交的开区间的并集。

   事实上，对任何 $a \in G$，令

   $$\alpha_a = \inf\{\alpha \mid a \in (\alpha, \beta) \subset G\},$$
   $$\beta_a = \sup\{\beta \mid a \in (\alpha, \beta) \subset G\},$$

   则显然有 $a \in (\alpha_a, \beta_a)$，$\alpha_a, \beta_a \notin G$，且 (α_a, β_a) 是 G 中含 a 的最大区间（称为 G 的**构成区间**）。不难看出，这种构成区间或者不相交，或者重合。在 G 的每个构成区间中取一个有理点与它相对应，显然，不同的构成区间对应着不同的有理点，而有理点的全体是可数的，因此，G 的构成区间的全体是至多可数的。

2. $\mathbb{R}^n$，$n \geq 1$ 中的开集 $\mathcal{O}$ 是至多可数个两两几乎不相交[1]的闭立方体的并集。

   我们需要构造一个含有可数多个闭立方体的集族 $\mathcal{Q}$，满足它们的内部不交，且 $\mathcal{O} = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q$。

   第一步，考虑 $\mathbb{R}^n$ 中取所有顶点为整点且边长为 1 的闭立方体形成的网格。换句话说，我们考虑平行于坐标轴的自然网格，即由 $\mathbb{Z}^n$ 生成的网格。我们还要用到通过不断二分原来的网格得到的边长为 2^{-N} 的网格。

   我们将最开始网格的格子，作为 $\mathcal{Q}$ 的一部分，进行筛选。若 Q 完全包含在 $\mathcal{O}$ 内，则我们保留 Q；若 Q 同时与 $\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{O}^c$ 相交，则我们暂时保留它；若 Q 完全被 $\mathcal{O}^c$ 包含，则我们删去它。

   第二步，我们将那些暂时保留的立方体二分成 2^d 个边长为 $\frac{1}{2}$ 的立方体。然后我们重复这一过程，保留那些完全被 $\mathcal{O}$ 包含的小之又小的立方体，暂时保留那些同时与 $\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{O}^c$ 的立方体，删去那些完全被 $\mathcal{O}^c$ 的立方体。图 1 描述了 $\mathbb{R}^2$ 中的过程。

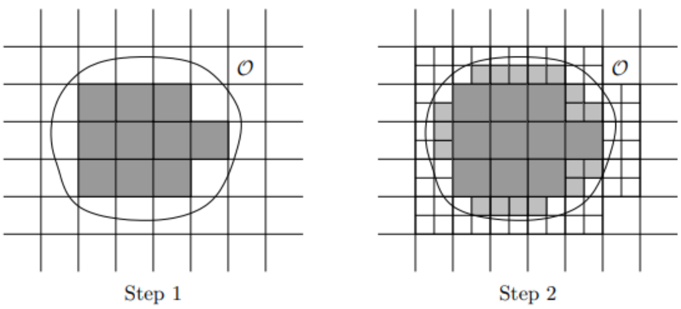

图 1: 将 $\mathcal{O}$ 分解为几乎不交的集合

[1]这里指的是最多只有边界相交，内部不交

这一过程不断重复，而（由构造）最后所有被保留的立方体组成的集族 $\mathcal{Q}$ 是可数的，并由几乎不交的立方体组成。为了确认为什么它们的并是 $\mathcal{O}$ 的全部，我们指出，给定 $x\in\mathcal{O}$，存在一个边长为 2^{-N} 立方体（从不断二分一开始的网格得到的）包含 x 并完全包含在 $\mathcal{O}$ 内。要么这个立方体被保留了，要么这个立方体被完全包含在某个已经保留的立方体内。这就指出 $\mathcal{Q}$ 的所有立方体的并覆盖了 $\mathcal{O}$。

3.2 聚点、极限点和闭包

定义 3.3. 设 $(X,\mathcal{T})$ 是拓扑空间，$A\subset X$，且 $x\in X$。如果 x 的在 X 中的任一邻域 U 都包含 $A-\{x\}$ 的一个点（即 $U\cap(A-\{x\})\neq\varnothing$）。则称 x 为 A 的在 X 中的一个聚点或极限点 *(Limit point)*。称 A 的聚点的全体为 A 的导集 *(Derived set)*，记为 A'（或 A^d）。而 $\bar{A}=A\cup A'$ 称为 A 的在 X 中的闭包 *(Closure)*。如果 $\bar{A}=X$，则称 A 为 X 的稠密子集 *(Dense subset)*。

评论. 集合 A 的闭包也可以定义为所有包含 A 的闭集的交。

例 3.5. 注意到 $\mathbb{Q}'=\mathbb{R}$, $\bar{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$, $(\mathbb{R}-\mathbb{Q})'=\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}-\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$。即 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ 都是 $\mathbb{R}$ 的稠密子集。

例 3.6. 设 (X,ρ) 是度量空间。

1. 如果 $A\subset X$ 是有限子集，则 $A'=\varnothing$。
2. 如果 X 的子集 A 中的任两点的距离都大于一固定的正数 σ，则 $A'=\varnothing$（留作习题）。

例 3.7. 设 X 是多于两点的集合，$(X,\mathcal{T}_{trivial})$ 为平凡拓扑空间。

$$A=\{a,b\mid a,b\in X,\ a\neq b\}$$

则 $A'=X=\bar{A}$，即 A 是 X 的稠密子集（与例 3.6 比较）。

例 3.8. 设 $(X,\mathcal{T})$ 为 Lec3 例 2.7 中的拓扑空间，且

$$A=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<\frac{1}{4}\}$$

则

$$A'=Q\cup\{(x,y)|0<x^2+y^2\leq\frac{1}{4}\}=\bar{A}$$

定理 3.3. 设 $(X,\mathcal{T})$ 是拓扑空间，$A\subset X$，则

1. $\bar{A}=A\cup A'=A\cup\partial A$。

2. $\bar{A}$ 是包含 A 的最小闭集。

3. A 是闭集 $\Leftrightarrow\bar{A}=A$（或 $A'\subset A$）。

证明. 1. 如果 $x\in A'-A$，则 $x\in\partial A$，于是 $A\cup A'=A\cup(A'-A)\subset A\cup\partial A$。如果 $x\in\partial A-A$，则 $x\in A'$，于是 $A\cup\partial A=A\cup(\partial A-A)\subset A\cup A'$。这就证明了

$$A\cup A'=A\cup\partial A$$

2. 如果 $x \in \bar{A}^c$，则 $x \notin \bar{A} = A \cup A'$，于是存在 x 的邻域 $U(x)$，使 $U(x) \cap A = \varnothing$，由此推出 $U(x) \cap (A \cup A') = U(x) \cap \bar{A} = \varnothing$, $U(x) \subset \bar{A}^c$。这就证明了

$$\bar{A}^c = \bigcup_{x \in \bar{A}^c} U(x)$$

是开集（或由 $\bar{A}^c = (A^c)^o$ 可知是开集），即 $\bar{A}$ 是闭集。

此外，如果闭集 $F \supset A$，则对任何 $x \in F^c$（开集），必有 $x \notin A \cup A' = \bar{A}$，即 $\bar{A} \subset F$。

综合上述可知 $\bar{A}$ 是包含 A 的最小闭集。

3. $(\Leftarrow)$ 由 2 知 $A = \bar{A}$ 是闭集。

$(\Rightarrow)$ 由 2 和 A 是闭集得到 $A \supset \bar{A} \supset A$，即 $\bar{A} = A$。

□

定理 3.4. *设 $(X, \mathcal{T})$ 为拓扑空间，则闭包具有以下四个性质：*

1. $\bar{\varnothing} = \varnothing$;
2. $A \subset \bar{A}$;
3. $\bar{\bar{A}} \subset \bar{A}$（由 *2,3* 推出 $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$）;
4. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$,

反之，设 X 是一个集合，而且给定了子集之间的对应 $h^* : A \mapsto A^*$，且具有四个性质：

1. $\varnothing^* = \varnothing$;
2. $A \subset A^*$;
3. $A^{**} = A^*$（由 *2,3* 推出 $A^{**} = A^*$）;
4. $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$,

则存在 X 的唯一的一个拓扑 $\mathcal{T}$，使得拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 的子集对应 $h : A \mapsto \bar{A}$ 就是给定的 $h^* : A \mapsto A^*$。

证明. 从定义 3.3 立即推出闭包的性质 1 和 2。

设 $x \in \bar{\bar{A}}$，则对任何 x 的邻域 $U(x)$ 必包含一点 $y \in \bar{A}$。于是，对于 y 的邻域 $U(x)$ 必包含一点 $a \in A$，这就证明了 $x \in \bar{A}$，$\bar{\bar{A}} \subset \bar{A}$，即闭包的性质 3。

由 $A \cup B \supset A$ 得到 $\overline{A \cup B} \supset \bar{A}$，同理 $\overline{A \cup B} \supset \bar{B}$。所以 $\overline{A \cup B} \supset \bar{A} \cup \bar{B}$。闭包性质 4 的另一部分用反证法证明。设 $x \in \overline{A \cup B}$，但 $x \notin \bar{A} \cup \bar{B}$，则存在 x 的邻域 $U(x)$ 和 $V(x)$，使得 $U(x)$ 不含 A 的点，$V(x)$ 不含 B 的点，因而 x 的邻域 $U(x) \cap V(x)$ 不含 $A \cup B$ 的点，这与 $x \in \overline{A \cup B}$ 矛盾。

反之，如果给定了满足四个性质的子集之间的对应 h^*，我们令

$$\sigma = \{F \subset X \mid F^* = F\}$$

则 σ 具有定理 3.2 的三个性质。

由 h^* 的性质 1，$\varnothing^* = \varnothing \Rightarrow \varnothing \in \sigma$。

由 h^* 的性质 2，$X \subset X^* \subset X \Rightarrow X = X^* \Rightarrow X \in \sigma$。

由 h^* 的性质 4，如果 $F_1, F_2 \in \sigma$，则 $(F_1 \cup F_2)^* = F_1^* \cup F_2^* = F_1 \cup F_2$。于是

$$F_1 \cup F_2 \in \sigma$$

由 h^* 的性质 4，如果 $A \subset B$，则有

$$A^* \subset A^* \cup (B - A)^* = (A \cup (B - A))^* = B^*$$

设 $F_\alpha \in \sigma$，即 $F_\alpha^* = F_\alpha$，则有

$$(\bigcap_\alpha F_\alpha)^* \subset F_\alpha^* = F_\alpha, \quad (\bigcap_\alpha F_\alpha)^* \subset \bigcap_\alpha F_\alpha$$

再由 h^* 的性质 2 得到

$$\bigcap_\alpha F_\alpha \subset (\bigcap_\alpha F_\alpha)^*$$

这就证明了

$$(\bigcap_\alpha F_\alpha)^* = \bigcap_\alpha F_\alpha,\ i.e.\ \bigcap_\alpha F_\alpha \in \sigma$$

根据定理 3.2，存在 X 的唯一的拓扑 $\mathcal{T}$，使得拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 的闭集族恰为 σ。令 $(X, \mathcal{T})$ 的子集与它的闭包之间的对应为 $h : A \mapsto \bar{A}$。因此，h 具有闭包的四个性质。最后，我们只需证明 $h = h^*$，即对任何 $A \subset X$，有 $\bar{A} = A^*$。

由 h^* 的性质 2，有 $A \subset A^*$。再根据 h 的性质 4 推出 $\bar{A} \subset \bar{A^*}$。因为 $A^{**} = A^*$，所以 $A^* \in \sigma$，即 A^* 为 $(X, \mathcal{T})$ 的闭集，$\bar{A^*} = A^*$。于是 $\bar{A} \subset A^*$。

类似地，由 h 的性质 2，有 $A \subset \bar{A}$。再根据 h^* 的性质 4 推出 $A^* \subset (\bar{A})^*$。因为 $\bar{A}$ 是 $(X, \mathcal{T})$ 的闭集，即 $(\bar{A})^* = \bar{A}$。于是 $A^* \subset \bar{A}$。因此，$\bar{A} = A^*$。 □

定义 3.4. 设 $(X, \mathcal{T})$ 为拓扑空间，$x_n, x \in X$，如果对于 x 的每个邻域 $U(x)$，存在 $N \in \mathbb{N}$，当 $n > N$ 时，有

$$x_n \in U(x)$$

则称点列 $\{x_n\} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ 收敛 *(Converge)* 于 x，记为

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x \quad (\text{或} x_n \to x (n \to +\infty))$$

而 x 称为 $\{x_n\}$ 的极限点 *(Limit point)*

定理 3.5. *设 $(X, \mathcal{T})$ 为拓扑空间，$A \subset X$ 是闭集，则对 A 中的任何点列 $\{x_n\}$，若*

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x$$

必有 $x \in A$，反之不成立（参看例 3.9）

证明. 设 $x_n \in A$，$\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$。如果有某个 $x_n = x$，则自然 $x \in A$。如果对一切 n，$x_n \neq x$，则对 x 的任何邻域 $U(x)$，存在 $N \in \mathbb{N}$，当 $n > N$ 时，$x_n \in U(x)$。因此，$x \in A' \subset A$（A 为闭集）。 □

例 3.9. 设 $X = [0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$，$\mathcal{T} = \{\varnothing, X - C \mid C\text{是}X\text{中的至多可数集}\}$，由 De Morgan 公式可以验证 $\mathcal{T}$ 是一个拓扑，于是 $(X, \mathcal{T})$ 是一个拓扑空间。

设 A 是 X 的可数子集，对任何 $x\in X$，$U(x)=\{x\}\cup(X-A)$ 是 x 的一个邻域，显然

$$U(x)\cap(A-\{x\})=\varnothing$$

因此 A 无聚点。如果 A 是 X 的不可数子集，对 $x\in X$ 和 x 的任何邻域 $U(x)=X-C$(C 是至多可数集)，则存在 $y\in A-C-\{x\}$，$y\in U(x)\cap(A-\{x\})$，所以 x 是 A 的聚点。于是存在

$$\bar{A}=A'=X$$

此外，如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$，则对 x 的邻域

$$(X-\bigcup_{i=1}^{+\infty}\{x_i\})\cup\{x\}$$

必有 $N\in\mathbb{N}$，当 $n>N$ 时，

$$x_n\in(X-\bigcup_{i=1}^{+\infty}\{x_i\})\cup\{x\}$$

因此 $x_n=x\ (n>N)$。

设 $A=X-\{0\}$。若 $x_n\in A$，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$，则存在 $N\in\mathbb{N}$，当 $n>N$ 时，$x=x_n\in A$，但 A 不是闭集（$A^c=\{0\}$ 不是开集）。

例 3.10. 在例 3.7 中，取 $x_n=a\in X$，显然 x_n 以 X 中任何点为极限点。

在例 3.8 中，取 $x_n=(\frac{1}{n},0)$，显然 $\{x_n\}$ 以 Q 中任一点为极限点。

定理 3.6. 设 (X,ρ) 为度量空间，则

1. 定义 *3.4* 与 *Lec1* 的定义 *1.4* 是等价的。
2. 收敛点列 $\{x_n\}$ 的极限点是唯一的。
3. 设 $A\subset X$，则 x 是 A 的聚点 $\Leftrightarrow$ x 的任何邻域中必含 A 的无限个点。
   $\Leftrightarrow$ $A-\{x\}$ 中存在点列 $\{x_n\}$，使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$。
   $\Leftrightarrow$ $A-\{x\}$ 中存在各项不同的点列 $\{y_n\}$，使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=x$。
4. 设 $\{x_n\}$ 是 X 中的点列，则
   $$A=\bigcup_{i=1}^{+\infty}\{x_n\}$$
   以 x 为聚点 $\Leftrightarrow$ $\{x_n\}$ 存在各项不同的子点列 $\{x_{n_k}\}$ 以 x 为极限点。
5. $A\subset X$ 为闭集 $\Leftrightarrow$ A 中任何点列 $\{x_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$，则 $x\in A$。

证明. 我们只证 2 和 5，其余留作习题。

2、如果

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=x,\quad \lim_{n\to+\infty}x_n=y$$

则对任何 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，当 $n>N$ 时，有

$$\rho(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2},\quad \rho(x_n,y)<\frac{\varepsilon}{2}$$

于是

$$0 \le \rho(x,y) \le \rho(x,x_n) + \rho(x_n,y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

令 $\varepsilon \to 0$ 得到 $\rho(x,y) = 0$，由 ρ 的条件 1 推出 $x = y$。

5、($\Rightarrow$) 由定理 3.5。

($\Leftarrow$) 设 $x \in A'$，由上述性质 3，有 $A - \{x\}$ 中的点列 $\{x_n\}$，使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$，于是从题设推出 $x \in A$，即 $A' \subset A$，A 为闭集。 $\square$