Lec3 Note of Mathematical Analysis B3

Xuxuayame

日期：2022 年 9 月 6 日

由于不是很能明白老师上课讲的内容，这里干脆直接复刻课本内容，再补充一点 Munkres 上的内容。

§2 拓扑空间

2.1 拓扑空间

定义 2.1. 设 X 是集合，$\mathcal{T} = \{G \mid G \subset X,\ G\text{具有性质}P\}$ 是 X 的子集族，且满足：

1. $X, \varnothing \in \mathcal{T}$;
2. 若 $G_\alpha \in \mathcal{T}$，则 $\bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha \in \mathcal{T}$;
3. 若 $G_1, G_2 \in \mathcal{T}$，则 $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}$,

则称 $(X, \mathcal{T})$ 为一个拓扑空间 *(Topological space)*，$\mathcal{T}$ 称为 X 上的一个拓扑 *(Topology)*。$\mathcal{T}$ 中的元素 G 称为 $(X, \mathcal{T})$ 或 X 的开集 *(Open set)*。

容易看出，由 3 和归纳法可推出：如果 $G_j \in \mathcal{T}\ (j = 1, \cdots, k)$，则 $\bigcap\limits_{j=1}^{k} G_j \in \mathcal{T}$。

恰当地说，一个拓扑空间是一个有序对 $(X, \mathcal{T})$，包括一个集合 X 和其上的一个拓扑 $\mathcal{T}$，但我们经常省略 $\mathcal{T}$，除非引起混淆。

于是沿用这一套术语，我们可以说一个拓扑空间是一个集合 X 与它的一个子集族，称为开集，使得 $\varnothing$ 和 X 是开集，开集的任意并和有限交都是开集。

例 2.1. 设 (X, ρ) 为度量空间，对任何 $a \in X$, $\varepsilon > 0$，我们称

$$U(a, \varepsilon) = \{x \mid x \in X,\ \rho(x, a) < \varepsilon\}$$

为以 a 为中心，ε 为半径的在 (X, ρ) 中（或 X 中）的一个球形邻域。在不致引起混淆时，只说是 a 的一个球形邻域。令

$$\mathcal{T} = \{G \mid G \subset X,\ \text{且对任何}a \in G,\ \text{存在}U(a, \varepsilon) \subset G\}$$

容易验证 $\mathcal{T}$ 满足定义 2.1 中的三个条件, 条件 1 是显然的。如果 $a \in \bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha$, $G_\alpha \in \mathcal{T}$, 则存在 $\varepsilon > 0$，使得 $U(a, \varepsilon) \subset G_{\alpha_0} \subset \bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha$，因此满足条件 2。如果 $a \in G_1 \cap G_2$, G_1, $G_2 \in \mathcal{T}$,

则存在 $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 > 0,\ U(a,\varepsilon_1) \subset G_1,\ U(a,\varepsilon_2) \subset G_2$，若令 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$，则有 $U(a,\varepsilon) \subset U(a,\varepsilon_1) \cap U(a,\varepsilon_2) \subset G_1 \cap G_2$，因此满足条件 3。这就证明了 $(X, \mathcal{T})$ 是一个拓扑空间。今后，我们说度量空间 (X,ρ) 是一个拓扑空间，指的就是又它导出的 $(X,\mathcal{T})$。

例 2.2. 设 X 是非空集合，定义两个最极端的拓扑：

$\mathcal{T}_{trivial} = \{X, \varnothing\}$，开集最少，称为平凡拓扑 *(Trivial topology)*[1]。
$\mathcal{T}_{discrete} = \{G \mid G \subset X\}$，开集最多，称为离散拓扑 *(Discrete topology)*。

例 2.3. 设有集合 X，令 $\mathcal{T}_f$ 为 X 的子集族 $\{U\}$，满足 $X \setminus U$ 要么有限，要么是 X 它自身。则 $\mathcal{T}_f$ 是 X 上的拓扑，称为余有限拓扑 *(Finite complement topology)*。X 和 $\varnothing$ 均在 $\mathcal{T}_f$ 中，因为 $X \setminus X$ 有限而 $X \setminus \varnothing$ 恰为 X。若 $\{U_\alpha\}$ 是 $\mathcal{T}_f$ 的非空元素的指标集族，为了说明 $\bigcup U_\alpha \in \mathcal{T}_f$，我们计算

$$X \setminus \bigcup U_\alpha = \bigcap (X \setminus U_\alpha)$$

后者有限，因为每个 $X \setminus U_\alpha$ 均是有限的。若 $U_1, \cdots, U_n$ 为 $\mathcal{T}_f$ 的非空元素，为了说明 $\bigcap U_i \in \mathcal{T}_f$，我们计算

$$X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} U_i = \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus U_i)$$

后者是有限集的有限并，故有限。

例 2.4. 设 $X = \{a, b, c\}$,

$$\mathcal{T} = \{X, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a\}, \varnothing\}$$

因为 X 中含 a 的子集的交或并仍含 a，由此可验证 $\mathcal{T}$ 满足定义 2.1 中的三个条件，这就推出了 $(X,\mathcal{T})$ 是一个拓扑空间。

例 2.5. 设 $(X,\mathcal{T})$ 是拓扑空间，$Y \subset X$，令

$$\mathcal{T}_Y = \{H \mid H = G \cap Y,\ G \in \mathcal{T}\}$$

因此

$$\varnothing = \varnothing \cap Y,$$

$$Y = X \cap Y,$$

$$\bigcup_\alpha H_\alpha = \bigcup_\alpha (G_\alpha \cap Y) = (\bigcup_\alpha G_\alpha) \cap Y,$$

$$H_1 \cap H_2 = (G_1 \cap Y) \cap (G_2 \cap Y) = (G_1 \cap G_2) \cap Y$$

所以，$(Y, \mathcal{T}_Y)$ 是拓扑空间，称为由 $(X,\mathcal{T})$ 诱导的子拓扑空间 *(Topology Subspace)* 或相对拓扑空间 *(Relative topology space)*。

[1]直译过来就是平凡拓扑，但鉴于该拓扑具有的性质，我们也倾向于称其为密着拓扑或不可分拓扑 *(Indiscrete topology)*

例 2.6. 设 $X=\mathbb{R}$，$\mathcal{T}=\{G \mid \forall\, x\in G,\ \exists\, \alpha>x\ s.t.\ [x,\alpha)\subset G\subset X\}$。

条件 1 显然。

条件 2：任何 $x\in\bigcup\limits_{\alpha}G_\alpha$，存在 $\alpha>x$，使 $[x,\alpha)\subset G_{\alpha_0}\subset\bigcup\limits_{\alpha}G_\alpha$。

条件 3：任何 $x\in G_1\cap G_2$，存在 $\alpha_1,\alpha_2>x$，使 $[x,\alpha_j)\subset G_j$ $(j=1,2)$，则 $[x,\min\{\alpha_1,\alpha_2\})\subset G_1\cap G_2$。因此，$(\mathbb{R},\mathcal{T})$ 是一个拓扑空间。

例 2.7. 设 $P=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1\}$ 和 $Q\subset\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的子集，

$$X=P\cup Q$$

$\mathcal{T}=\{P\text{中关于}\mathbb{R}^2\text{的通常开集或}P_1\cup Q_1,\text{ 其中}Q_1\subset Q,\ P_1\text{为含某个}\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<r^2<1\}\text{的通常开集}\}$，容易验证 $(X,\mathcal{T})$ 是拓扑空间。

定义 2.2. 设 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}'$ 为 X 上的两个拓扑。若 $\mathcal{T}'\supset\mathcal{T}$，我们称 $\mathcal{T}'$ 比 $\mathcal{T}$ 更细 *(Finer)*；若 $\mathcal{T}'$ 真包含 $\mathcal{T}$，我们称 $\mathcal{T}'$ 比 $\mathcal{T}$ 严格细 *(Strictly finer)*。这两种情况下，我们也说 $\mathcal{T}$ 比 $\mathcal{T}'$ 更粗 *(Coarse)*，以及严格粗 *(Strictly coarser)*。我们称 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}'$ 是可比较的 *(Comparable)*，要么 $\mathcal{T}'\subset\mathcal{T}$，要么 $\mathcal{T}\subset\mathcal{T}'$。

这一术语的动机源于将拓扑空间想象为类似于满载砾石的卡车的东西——鹅卵石和所有鹅卵石堆的并作为开集。如果我们现在将鹅卵石击碎，则开集族就被扩大了，而拓扑，就像碎石，称为被操作细化了。

当然，X 上的两个拓扑不必是可比较的。

有时这一概念也会采用其它的术语。若 $\mathcal{T}'\supset\mathcal{T}$，某些数学家可能说 $\mathcal{T}'$ 比 $\mathcal{T}$ 更大 *(Larger)*，$\mathcal{T}$ 比 $\mathcal{T}'$ 更小 *(Smaller)*。这也是当然可以接受的术语，不过没有“更细”和“更粗”那样生动。

很多数学家也采用“弱 *(Weaker)*”和“强 *(Stronger)*”。然而不幸的是，某些人（特别是分析学家）倾向于说 $\mathcal{T}'$ 强于 $\mathcal{T}$，若 $\mathcal{T}'\supset\mathcal{T}$，而某些人（特别是拓扑学家）在同样的情况下倾向于称 $\mathcal{T}'$ 弱于 $\mathcal{T}$。如果你在某些书看见“强拓扑”或“弱拓扑”这样的术语，你得好好从上下文看看到底指哪种包含关系。这里我们不会采用这些术语。

2.2 拓扑基

在前面的例子中，我们通过描述 X 的整个开子集族 $\mathcal{T}$ 来弄清楚其上的拓扑。这往往是困难的。在绝大多数情况下，我们用 X 的一个更小的子集族取而代之，并借此来定义拓扑。

定义 2.3. 设 X 是集合，如果子集族 $\mathcal{B}=\{B_\alpha\}$ 满足：

1. $\bigcup\limits_{\alpha}B_\alpha=X$；
2. 若 $x\in B_\alpha\cap B_\beta$，$B_\alpha,B_\beta\in\mathcal{B}$，则存在 $B_\gamma\in\mathcal{B}$，使得 $x\in B_\gamma\subset B_\alpha\cap B_\beta$，

则称 $\mathcal{B}$ 为 X 的一个拓扑基 *(Topology base)*。

评论. 值得一提的是，条件 1 也有如下等价表述：

对任意 $x \in X$，存在至少一个基元素 B 包含 x。

例 2.8. 1. 拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 的拓扑 $\mathcal{T}$ 满足定义 2.3 中的两个条件，因此，它是 X 的一个拓扑基。

2. 设 (X, ρ) 为度量空间，令

$$\mathcal{B} = \{U(a, r) \mid a \in X,\ r \in \mathbb{Q}_+\}$$

则 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个拓扑基。

事实上，定义 2.2 中的条件 1 是显然的。如果 $x \in U(a_1, r_1) \cap U(a_2, r_2)$，取正有理数 $r \le r_i - \rho(x, a_i)$ $(i = 1, 2)$，于是，对任何 $y \in U(x, r)$，必有

$$\rho(y, a_i) \le \rho(y, x) + \rho(x, a_i) < r + \rho(x, a_i) \le r_i - \rho(x, a_i) + \rho(x, a_i) = r_i\ (i = 1, 2)$$

即

$$x \in U(x, r) \subset U(a_1, r_1) \cap U(a_2, r_2)$$

3. 设 (X, ρ) 为度量空间，令

$$\mathcal{B} = \{U(a, r) \mid a \in X,\ r \in \mathbb{R}_+\}$$

类似于上面的证明可知 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个拓扑基。

4. 在例 2.6 中，$X = \mathbb{R}$，

$$\mathcal{B} = \{[x, \alpha) \mid \alpha > x\}$$

因为 $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}[-n, n) = \mathbb{R}$，并且当 $x \in [x_1, \alpha_1) \cap [x_2, \alpha_2)$ 时，必有 $x \in [\max\{x_1, x_2\}, \min\{\alpha_1, \alpha_2\}) \subset [x_1, \alpha_1) \cap [x_2, \alpha_2)$，所以 $\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个拓扑基。

定理 2.1. 设 $\mathcal{B}$ 是集合 X 的一个拓扑基，令

$$\mathcal{T} = \{G \mid \forall\, x \in G,\ \exists\, B \in \mathcal{B}\ s.t.\ x \in B \subset G\} = \{G \mid G\text{为}\mathcal{B}\text{的若干元素的并集}\}$$

则 $\mathcal{T}$ 是 X 的一个拓扑，且 $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$。特别地，如果 $\mathcal{B}$ 是一个拓扑，则 $\mathcal{B} = \mathcal{T}$。

($\mathcal{T}$ 中的每个 G 称为**关于 $\mathcal{B}$ 而言的开集**，$\mathcal{T}$ 称为**由拓扑基 $\mathcal{B}$ 诱导的拓扑**或**由 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑 (*Topology generated by* $\mathcal{B}$)**，而 $\mathcal{B}$ 也称为这**拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 的一个拓扑基**。)

证明. $\varnothing \in \mathcal{T}$ 是显然的。对任何 $x \in X$，因为 $X = \bigcup\limits_{B_\alpha \in \mathcal{B}} B_\alpha$，所以存在 $B_{\alpha_0} \in \mathcal{B}$，使 $x \in B_{\alpha_0} \subset X$，即 $X \in \mathcal{T}$，这就证明了 $\mathcal{T}$ 满足拓扑的条件 1。

如果 $G_\beta \in \mathcal{T}$，对任何 $x \in \bigcup\limits_\beta G_\beta$，存在 $G_{\beta_0} \ni x$，所以必有 $B \in \mathcal{B}$，使 $x \in B \subset G_{\beta_0} \subset \bigcup\limits_\beta G_\beta$，即 $\bigcup\limits_\beta G_\beta \in \mathcal{T}$，这就证明了 $\mathcal{T}$ 满足拓扑的条件 2。

此外，如果 $G_1, G_2 \in \mathcal{T}$，$x \in G_1 \cap G_2$，则存在 $B_i \in \mathcal{B}$，使得 $x \in B_i \subset G_i$ $(i = 1, 2)$。再由 $\mathcal{B}$ 的条件 2，存在 $B \in \mathcal{B}$，使

$$x \in B \subset B_1 \cap B_2 \subset G_1 \cap G_2$$

即 $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}$，这就证明了 $\mathcal{T}$ 具有拓扑的条件 3。于是 $\mathcal{T}$ 是 X 的一个拓扑。

显然 $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$。特别地，当 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个拓扑时，由拓扑的条件 2 得到 $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}$。因此，$\mathcal{B} = \mathcal{T}$。 □

当然，我们也要解释 $\mathcal{T}$ 为什么是由 $\mathcal{B}$ 若干元素的并集组成的集合。

引理 2.2. *设有集合 X，$\mathcal{B}$ 为 X 上的拓扑 $\mathcal{T}$ 的基。那么 $\mathcal{T}$ 等于 $\mathcal{B}$ 的所有元素的并集组成的集族。*

证明. 给定 $\mathcal{B}$ 的一个元素族，它们也是 $\mathcal{T}$ 的元素。因为 $\mathcal{T}$ 是拓扑，它们的并也在 $\mathcal{T}$ 中。反过来，给定 $U \in \mathcal{T}$，对每个 $x \in U$，取 $\mathcal{B}$ 中的一个元素 B_x 使得 $x \in B_x \subset U$。则 $U = \bigcup\limits_{x \in U} B_x$，故 U 等于 $\mathcal{B}$ 中元素的并。 □

这个引理指出 X 中每个开集 U 可以表示为基元素的并。然而这一表示并不唯一。因此在拓扑学中对术语“基”的用法与线性代数差异巨大，后者中表示一个给定向量可以表示为基向量的线性组合的方程是唯一的。

我们采取了两种不同的方式去描述如何从拓扑基到其生成的拓扑。有时候我们需要反着来，从一个拓扑到能够生成它的基。下面是一个从给定的拓扑得到它的基的方式；我们应当经常使用它。

引理 2.3. *设 X 为拓扑空间。假设 $\mathcal{C}$ 为 X 的开子集族使得对 X 的每个开集 U 和每个 $x \in U$，存在元素 $C \in \mathcal{C}$ 使得 $x \in C \subset U$。那么 $\mathcal{C}$ 是 X 上的拓扑基。*

证明. 我们必须说明 $\mathcal{C}$ 是一个基。基的条件 1 是容易的：给定 $x \in X$，因为 X 自己是个开集，由假设存在 $\mathcal{C}$ 的某个元素 C 使得 $x \in C \subset X$。要验证条件 2，设 $x \in C_1 \cap C_2$，这里 $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$。由于 C_1, C_2 是开的，故 $C_1 \cap C_2$ 亦然。因此，由假设存在 $C_3 \in \mathcal{C}$ 使得 $x \in C_3 \subset C_1 \cap C_2$。

接着我们要说明 $\mathcal{C}$ 生成的拓扑 $\mathcal{T}'$ 恰为 X 上的拓扑 $\mathcal{T}$。首先，注意到若 $U \in \mathcal{T}$ 且 $x \in U$，则由假设存在 $C \in \mathcal{C}$ 使得 $x \in C \subset U$。进而由定义，$U \in \mathcal{T}'$。反过来，若 $W \in \mathcal{T}'$，则由引理 2.2，W 等于 $\mathcal{C}$ 中元素的并。因为 $\mathcal{C}$ 中每个元素都属于 $\mathcal{T}$ 而 $\mathcal{T}$ 为拓扑，$W \in \mathcal{T}$。 □

定义 2.4. 设 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}'$ 是集合 X 的两个拓扑基，如果它们所诱导的拓扑相同，即 $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$，则称两个拓扑基是等价的，记为 $\mathcal{B} \sim \mathcal{T}'$。

定理 2.4. *设 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}'$ 是 X 的两个拓扑基，它们所诱导的拓扑分别为 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}'$，则*

$$\mathcal{B} \sim \mathcal{B}' \; i.e. \; \mathcal{T} = \mathcal{T}' \Leftrightarrow \mathcal{B} \subset \mathcal{T}',\ \mathcal{B}' \subset \mathcal{T}$$

证明. $(\Rightarrow)$ 由定理 2.1，$\mathcal{B} \subset \mathcal{T} = \mathcal{T}'$, $\mathcal{B}' \subset \mathcal{T}' = \mathcal{T}$。

$(\Leftarrow)$ 设 $G \in \mathcal{T}$，则 G 是 $\mathcal{B}$ 中若干元素的并集，由 $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}'$，$\mathcal{B}$ 中的每个元素是 $\mathcal{B}'$ 中若干元素的并集，因此，G 是 $\mathcal{B}'$ 中若干元素的并集，即 $G \in \mathcal{T}'$。这就推出了 $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$。同理 $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$。于是 $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$。 □