Lec2 Note of Mathematical Analysis B3

Xuxuayame

日期：2022 年 9 月 1 日

我们用我们最熟悉的例子来理解完备度量空间。

我们对数的认识大抵按如下顺序：

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \diagdown$$

当然，一开始先有自然数。自然数集 $\mathbb{N}$ 的构造基于 Peano 公理，在其上定义有加法、乘法运算和序关系。然后基于自然数，我们可以定义整数。在 $\mathbb{N}^2$ 上定义等价关系：

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) :\Leftrightarrow m_1 + n_2 = n_1 + m_2$$

于是定义 $\mathbb{Z} := \mathbb{N}^2/\sim$，其上可以定义加法、乘法与减法和序。自然数的加法与序和整数相容。接着可以定义有理数。在 $\mathbb{Z}^2$ 上定义等价关系：

$$(p_1, q_1) \sim (p_2, q_2) :\Leftrightarrow p_1q_2 = p_2q_1$$

于是定义 $\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\})/\sim$，容易验证 $\mathbb{Q}$ 是有序域。

当然这些只是大致的脉络和操作，有意地省略了细节。对这方面感兴趣的话可以阅读我在个人主页放的那本高中数学知识讲义第六章第二节，也可以直接读陶哲轩实分析。

当然，我们的重点在于 $\mathbb{Q}$ 是如何到 $\mathbb{R}$ 的。这是一个很好的完备化的例子。

很显然，$\mathbb{Q}$ 是度量空间，但不完备。关于一般度量空间完备化的操作我们在 Lec1 已经介绍过，这里展现完整的细节。

首先我们需要给出 $\mathbb{R}$ 的定义。

我们用 $\mathbb{R}^*$ 代表 $\mathbb{Q}$ 中所有 Cauchy 列组成的集合，并在 $\mathbb{R}^*$ 上定义等价关系：

$$\{p_n\} \sim \{q_n\} :\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |p_n - q_n| = 0$$

然后我们定义 $\mathbb{R} := \mathbb{R}^*/\sim$。这样就给出了 $\mathbb{R}$ 的定义。在我们验证 $\mathbb{R}$ 是完备度量空间之前，假定我们已经定义好了 $\mathbb{R}$ 上的运算与序，从而可以定义实数的绝对值。于是我们可以定义实数的度量：

定义 0.1. 设 $r, s \in \mathbb{R}$，$r = \{r_n\}$，$s = \{s_n\}$，我们定义 $\mathbb{R}$ 上的度量为：

$$\rho(r, s) := |r - s| = \{|r_n - s_n|\}$$

很容易验证绝对值满足你印象中所有的性质，因此我们这里默认你对实数上的结构的认知是正确的，可以不加证明地使用。于是我们先验证这个定义的合理性，也就是，这个“度量”确实成为一个度量。

- 它的确是一个从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射，因为 $\{|r_n - s_n|\}$ 的确是 Cauchy 列，证明略。
- 正定性显然。
- 对称性显然。
- 对于 $a, b, c \in \mathbb{R}$，要证 $\rho(a,c) \leq \rho(a,b) + \rho(b,c)$，即
$$|a-c| \leq |a-b| + |b-c|$$
只需要随意假设 a, c 的大小关系，然后把左边绝对值拆开即可。

于是我们定义的度量是合理的，$(\mathbb{R}, \rho)$ 构成度量空间。

自然，我们也可以定义 $\mathbb{R}$ 的收敛和极限的定义，这里不再赘述。

下面是我们的重点，我们要说明这个度量空间是完备的。也就是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列均收敛。

为此，我们假设 $\mathbb{R}$ 中有一 Cauchy 列 $\{r_n\}$，根据有理数的稠密性，对任意 n 都有 q_n 使得 $|r_n - q_n| < \dfrac{1}{n}$，现在我们证明 $\{q_n\}$ 是个 Cauchy 列。

对于 $\forall\, \varepsilon > 0$，存在 $N_1 \in \mathbb{N}_+$ 使得只要 $n, m > N_1$，就有：
$$|r_n - r_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$
于是令 $N = \max\{N_1, [\dfrac{\varepsilon}{4}] + 1\}$，则对任意 $n, m > N$，有
$$|q_n - q_m| \leq |q_n - r_n| + |r_n - r_m| + |r_m - q_m| < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{m} < \frac{2}{N} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$
于是 $\{q_n\}$ 为 Cauchy 列。从而 $\{q_n\} \in \mathbb{R}^*$，进一步我们设其所在的等价类为 r，即所代表的实数为 r。注意，根据 $\mathbb{R}$ 上收敛的定义，我们可以验证一个有理数的 Cauchy 列也在 $\mathbb{R}$ 中收敛到它所代表的实数，即 $\{q_n\}$ 也收敛到 r。现在我们证明 $\{r_n\}$ 收敛到 r。

由定义，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N_1 \in \mathbb{N}_+$，只要 $n > N_1$ 就有：
$$|q_n - r| < \frac{\varepsilon}{2}$$
于是取 $N = \max\{N_1, [\dfrac{2}{\varepsilon}] + 1\}$，对 $n > N$ 就有
$$|r_n - r| \leq |r_n - q_n| + |q_n - r| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
即 $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = r$。

这样我们就证明了 $\mathbb{R}$ 是完备度量空间。

最后我们要说明 $\mathbb{Q}$ 是如何嵌入 $\mathbb{R}$ 的，这十分容易，只需要把有理数 q 对应到 $\{q, q, \cdots, q, \cdots\}$ 所代表的实数即可。

我们再来对一般度量空间完备化。

设有一度量空间 (X, ρ)，X^* 为 X 中所有 Cauchy 列构成的集合，定义等价关系 $\sim$ 为：
$$\{x\} \sim \{y\} :\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$$
这里略去等价关系的验证。记 $\hat{X} = X^*/\sim$，并定义其上度量为:
$$\hat{\rho}(x, y) := \lim_{n\to+\infty} \rho(x_n, y_n)$$

这里 $x, y \in \hat{X}$，$\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 为 x 与 y 所代表的 Cauchy 列。如此定义的度量的合理性是显然的，你可以自行验证。

现在我们要证明其完备。

类似于有理数的稠密性，我们也可以将任何一个度量空间等距嵌入到相应的“完备”度量空间中，且和它的某个稠密子空间是等距同构的。这里我们不给出证明，因为并不困难。

于是基于这一点，对于 $\hat{X}$ 中任意一个 Cauchy 列 $\{x_n\}$，我们可以取 $y_n \in X$ 使得：

$$\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$$

成立。那么，对 $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N_1 \in \mathbb{N}_+$，只要 $n, m > N_1$ 就有

$$\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

那么取 $N = \max\{N_1, [\frac{2}{\varepsilon}] + 1\}$，对 $n, m > N$ 就有

$$\rho(y_n, y_m) \le \rho(y_n, x_n) + \rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, y_m) < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{m} < \frac{2}{N} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

即 $\{y_n\}$ 为 Cauchy 列，因而 $\{y_n\} \in X^*$，我们设其所代表的元素为 y，现在证明它正是 $\{x_n\}$ 的极限。

对 $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N_1 \in \mathbb{N}_+$，只要 $n > N_1$ 就有

$$\rho(y_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}$$

于是取 $N = \max\{N_1, [\frac{2}{\varepsilon}] + 1\}$，则有

$$\rho(x_n, y) \le \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, y) < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{N} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

即 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = y$，从而其收敛。

故 $(\hat{X}, \hat{\rho})$ 为完备度量空间。

当然，完备化是唯一的，但唯一性的证明我们在此不再叙述。

最后补充一些实数的知识。

实数有三种定义方式：利用 Cauchy 列定义，Dedekind 分割，十进制小数。刚才我们介绍了第一种，现在我们补充一下后两种。

定义 0.2. [1] **（Dedekind 分割）** $X \subset \mathbb{Q}$ 是有理数的子集，令 $X' = \mathbb{Q} \setminus X$。如果下面三条性质都成立：

1. $X \neq \varnothing,\ X' \neq \varnothing$；
2. 对任意 $x \in X,\ x' \in X'$，都有 $x < x'$；
3. X 中没有最大元，

我们就称 X 或 $X \cup X'$ 是 $\mathbb{Q}$ 的一个*戴德金分割 (Dedekind cut)*。我们用 $\mathfrak{R}$ 表示所有 *Dedekind* 分割组成的集合。

[1] 以下关于 Dedekind 分割的内容引用自于品的数学分析

评论. 我们可以重新解读后两条性质：

第二条等价于说，如果 $x_1 \in X$，那么对任意的 $x_2 < x_1$，我们就有 $x_2 \in X$。这也表明，如果 $x'_1 \in X'$，那么对任意的 $x'_2 > x'_1$，我们就有 $x'_2 \in X'$。

第三条指的是对任意 $x \in X$，总存在 $x' \in X$，使得 $x' > x$。

例 0.1. 我们给出两个 Dedekind 分割的例子：

1. 假设 $\frac{p}{q}$ 是有理数，其中 $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}_+$ 并且 p 和 q 互素，我们定义
$$X_{\frac{p}{q}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \frac{p}{q}\}$$
这个例子将给出所有的有理数。
2. 我们定义 $X_{\sqrt{2}}$ 如下：
$$X_{\sqrt{2}} = \{x \in \mathbb{Q}_+ \mid x^2 < 2\} \cup \mathbb{Q}_{\leq 0}$$
这个例子将给出我们所熟悉的 $\sqrt{2}$。

更进一步的讨论这里则不再介绍，感兴趣可以自行阅读相关书籍。

十进制小数定义的细节不作展示，这里仅描述脉络。

定义 0.3. [2] 一个*数码 (Digit)* 是 $0, 1, 2, \cdots, 9$ 这十个符号之一。我们把这些数码与自然数依下述公式等同起来：

$$0 \equiv 0,\ 1 \equiv 0{+}{+},\ 2 \equiv 1{+}{+}, \cdots, 9 \equiv 8{+}{+}$$

[3] 我们还定义数字十为：十 $:= 9{+}{+}$。(我们还不能使用十进制符号 10 来表示十，因为那要预先知道十进制，从而导致逻辑循环。)

定义 0.4. 一个*十进制正整数*是一个数码串 $a_n a_{n-1} \cdots a_0$，其中 $n \geq 0$ 是自然数，并且第一个数码 a_n 不是零。

于是，作为例子，3049 是十进制正整数，而 0493 不是，0 也不是。我们用公式
$$a_n a_{n-1} \cdots a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i \times \text{十}^i$$
使每个十进制正整数与正整数相等。这个公式也自然蕴含了 $10 = 0 \times \text{十}^0 + 1 \times \text{十}^1 = \text{十}$，因此我们可以把十写为 10。

当然，我们要指出，这个十进制系统确实表示了正整数，但我们不加证明。

定理 0.1. *（十进制表示的存在性与唯一性）每个正整数 m 都恰等于一个十进制正整数。*

我们把由上述定理给出的十进制数叫作 m 的*十进制表示*。一旦有了正整数的十进制表示，我们自然就可以有负整数，从而所有整数的十进制表示，进而有理数的十进制表示。但对于实数，我们需要一个新符号：小数点“.”。

---

[2]以下关于十进制的内容引用自陶哲轩实分析

[3]++ 是自然数上的增长运算。

定义 0.5. 一个十进制实数是一个数码的序列连同一个小数点，书写成

$$\pm a_n \cdots a_0.a_{-1}a_{-2}\cdots$$

其中，小数点左边是有限的（即 n 是自然数），但小数点右边是无限的，其中 $\pm$ 或取 $+$，或取 $-$，而 $a_n \cdots a_0$ 是一个十进制自然数（即或为十进制正整数，或为 0）。这个十进制数等于实数

$$\pm a_n \cdots a_0.a_{-1}a_{-2}\cdots \equiv (\pm 1) \times \sum_{i=-\infty}^{n} a_i \times 10^i$$

当然，等式右边的级数总是收敛的，虽然我们也不证明。自然，我们也要指出：

定理 0.2. （十进制表示的存在性）*每个实数 x 都至少有一个十进制表示*

$$x = \pm a_n \cdots a_0.a_{-1}a_{-2}\cdots$$

当然，我们也不证明。颇为有趣的一件事情是，我们并没有说明这是唯一的，因为这确实不唯一。比如下面一个经典例子：

$$1.000\cdots = 0.999\cdots$$

事实上，所有的实数，当它是有限小数（即从小数点后某位开始往后全是零的数）时，它有两个十进制表示，当它不能表示成有限小数时，它只有一种十进制表示。