Lec1 Note of Mathematical analysis B3

Xuxuayame

日期：2022 年 8 月 31 日

Part I

拓扑空间

§1 度量空间

0.1 内积空间与赋范空间

首先我们先定义内积空间和赋范空间的概念。

定义 1.1. 设 X 为向量空间，若映射

$$g = \langle , \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto g(x, y) = \langle x, y \rangle$$

满足：
正定性 (Positivity) $\langle x, x \rangle \geq 0$，且 $\langle x, x \rangle = 0$ 当且仅当 $x = 0$；
对称性 (Symmetry) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$；
线性性 (Linearity) $\begin{cases} \langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle \\ \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \end{cases}$
对 $\forall\, x, x_1, x_2, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$ 成立。则称 $(X, \langle , \rangle)$ 为内积空间 *(Inner product space)*，$g = \langle , \rangle$ 称为 X 上的一个内积 *(Inner product)*。

评论. 上面的线性性是表述为第一个分量的形式的，而基于对称性，对第二个分量显然也成立: $\begin{cases} \langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle \\ \langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \end{cases}$ 对 $\forall\, x, y, y_1, y_2 \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$ 成立。因此 $\langle , \rangle$ 是双线性 *(Bilinear)* 的。

定义 1.2. 设 X 是一个向量空间，如果映射

$$\begin{aligned}\|\cdot\| :& X \to \mathbb{R}\\ & x \mapsto \|x\|\end{aligned}$$

满足：

- $\|x\| \geq 0,\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$；
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|,\ x \in X,\ \lambda \in \mathbb{R}$；
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|,\ x, y \in X$，

则称 $(X, \|\cdot\|)$ 为模空间 *(Moduli space)* 或赋范空间 *(Normed space)*，$\|\cdot\|$ 为 X 上的一个模 *(Moduli)* 或范数 *(Norm)*。

最熟悉的例子自然是欧氏空间上的内积与范数，尤其是 $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$ 上的，我们中学时期天天与其打交道。我们来回顾一下：

例 1.1.
1. 在 $\mathbb{R}$ 上定义范数 $\|x\| := |x|,\ x \in \mathbb{R}$。显然如此定义的 $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ 构成赋范空间。这个范数就是实数的绝对值。
2. 在 $\mathbb{R}^2$ 上定义范数 $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2},\ x \in \mathbb{R}^2$，这里 x_i 为 x 的第 i 个分量。则 $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ 构成赋范空间。
3. 在 $\mathbb{R}^n$ 上定义范数 $\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2},\ x \in \mathbb{R}^n$。则 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ 构成赋范空间。
4. 以及，在 $\mathbb{R}^n$ 上定义内积 $\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,\ x, y \in \mathbb{R}^n$，则 $(\mathbb{R}, \langle,\rangle)$ 构成内积空间。

当然，验证定义即可，这并不困难。

不过还有一些比较新，但实用的例子：

例 1.2. 记 $C[0,1] = \{f \mid f : [0,1] \to \mathbb{R}\text{为连续函数}\}$，则 $C[0,1]$ 为线性空间，在其上定义 $p-$ 范数为：

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_0^1 |f|^p(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^{\frac{1}{p}}$$

并定义一致范数为：

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

当然，可以发现：

$$\|f\|_{L^\infty} = \lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p}$$

以及我们可以定义内积为：

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x$$

不过很巧合的一点是，我们接触到的一些范数，可以由内积诱导出来，例如刚才 $\mathbb{R}^n$ 和 $C[0,1]$ 上的范数与内积，注意到它们其实都满足 $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$。[1]而这样关系蕴含了一个重要的定理。

定理 1.1. ***(Cauchy-Schwarz 不等式)*** 设 $(X, \langle , \rangle)$ 为内积空间，且满足 $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$，$x \in X$，则有

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

等号成立当且仅当存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 满足 $y = \lambda x$ 或 $x = \lambda y$。

证明. 证明分为两部分，首先我们先证明不等式成立，再分析取等条件。

首先如果 x, y 中有任意一者为零。不妨设 $x = 0$，则

$$LHS = |\langle 0, y\rangle| = 0$$

$$RHS = \|0\| \cdot \|y\| = 0$$

故 $LHS \leq RHS$，成立。这里 $LHS = 0$ 利用了 $\langle 0, y\rangle = \langle 0 + 0, y\rangle = 2\langle 0, y\rangle$。

若 $x, y \neq 0$，考虑

$$\langle x, x\rangle - 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle = \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle \geq 0$$

取 $\lambda = \dfrac{\langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}}{\langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}}}$，于是

$$\langle x, x\rangle - 2\frac{\langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}}{\langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}}}\langle x, y\rangle + \langle x, x\rangle \geq 0$$

$$\langle x, y\rangle \leq \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}\langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}}$$

再利用 $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$ 可得

$$\langle x, y\rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

再将 y 替换为 $-y$，则

$$-\langle x, y\rangle = \langle x, -y\rangle \leq \|x\| \cdot \|-y\| = \|x\| \cdot \|y\|$$

于是就有

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

接着考虑取等条件。若 $y = \lambda x$ 或 $x = \lambda y$，则不等式显然成立。

反过来，若不等式取等，x, y 有一者为零的情况显然满足题意。于是考虑 $x, y \neq 0$

注意到关于 λ 的方程

$$\langle y, y\rangle\lambda^2 - 2\langle x, y\rangle\lambda + \langle x, x\rangle = 0$$

其判别式 $\Delta = 4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle = 0$，于是方程有唯一解 λ，也即存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得

$$\langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle = 0$$

[1]对 $C[0,1]$ 而言指的是 $2-$ 范数与内积。

成立，而此等式等价于 $x=\lambda y$。 □

这样我们就证明了一般意义的 Cauchy-Schwarz 不等式。

另外，我们自然要问，对于任意的内积空间，是否均可诱导类似的范数?

定理 1.2. 设 $(X,\langle,\rangle)$ 为内积空间，令

$$\begin{aligned}\|\cdot\|:&X\to\mathbb{R}\\ &x\mapsto\|x\|:=\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

则 $(X,\|\cdot\|)$ 构成赋范空间，称为由 $(X,\langle,\rangle)$ 诱导的赋范空间。

证明. 读者自证不难，验证定义即可。 □

于是给出内积可以定义范数，反过来，对任意的范数，是否始终有相应的内积满足此关系呢? 结论是否定的，范数需要满足某些条件才能存在相应的内积。

定理 1.3. 设 $(X,\|\cdot\|)$ 为赋范空间，则存在 X 上的内积空间使得此赋范空间可以由其诱导的充要条件是赋范空间满足平行四边形法则:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

证明. $(\Rightarrow)$

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2+\|x-y\|^2&=\langle x+y,x+y\rangle+\langle x-y,x-y\rangle\\&=(\langle x,x\rangle+2\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle)+(\langle x,x\rangle-2\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle)\\&=2\langle x,x\rangle+2\langle y,y\rangle\\&=2(\|x\|^2+\|y\|^2)\end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$

定义内积 $\langle x,y\rangle=\dfrac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$，验证其满足定义即可。 □

基于这些概念，我们可以自然给出度量空间的定义。

1.2 度量空间

定义 1.3. 设 X 是一个集合，如果映射

$$\begin{aligned}\rho:&X\times X\to\mathbb{R}\\ &(x,y)\to\rho(x,y)\end{aligned}$$

满足

正定性 $\rho(x,y)\geq 0,\ \rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$;

对称性 $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

三角不等式 $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$，
则称 (X,ρ) 为度量空间 *(Metric space)*，ρ 称为 X 上的度量函数 *(Metric function)*。$\rho(x,y)$ 称为 x 和 y 之间的距离 *(Distance)*。

而度量空间显然是可以通过范数来诱导的：

定理 1.4. 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是赋范空间，令

$$\begin{aligned}\rho :& X \times X \to \mathbb{R}\\ &(x,y) \mapsto \rho(x,y) = \|x-y\|\end{aligned}$$

则 (X,ρ) 是一个度量空间，称为由 $(X,\|\cdot\|)$ 诱导的度量空间。

证明. Trivial. □

评论. 我们前面提到，内积空间可以诱导赋范空间，因此结合起来，给出内积空间就可诱导赋范空间与度量空间。

接着我们要介绍度量空间的相关定义。

定义 1.4. 设 (X,ρ) 为度量空间，$x_n, x \in X$，如果

$$\lim_{n\to+\infty} \rho(x_n,x) = 0$$

就称点列 $\{x_n\}$ 收敛 *(Converge)* 于 x，记为

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x$$

而 x 称为 $\{x_n\}$ 的极限点 *(Limit point)*。

这无非把 $\mathbb{R}$ 的极限推广到一般度量空间的极限。同理，我们也可以定义一般度量空间的连续性。

定义 1.5. 设 (X,ρ_X), (Y,ρ_Y) 为度量空间，$f: X \to Y$ 为映射。

1. 若对于在 X 中收敛到 x_0 的任何点列 $\{x_n\}$，像点列 $\{f(x_n)\}$ 都收敛到 Y 中的点 $f(x_0)$，则我们说映射 f 在 $x_0 \in X$ 处是连续的 *(Continuous)*。
2. 若映射 f 在每个 $x_0 \in X$ 均连续，则我们称 f 为连续映射 *(Continuous mapping)*。

定义 1.6. 设 (X,ρ) 为度量空间，$x_n \in X$，如果对任何 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得对 $\forall\, m > N$，有

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

则称点列 $\{x_n\}$ 为柯西列 *(Cauchy sequence)* 或基本列 *(Fundamental sequence)*。

若 X 中所有 Cauchy 列都收敛，则称 (X,ρ) 为完备度量空间 *(Complete metric space)*。

显然不是什么度量空间都是完备的。但我们可以将其完备化。这是我们接下来要介绍的定义。

定义 1.7. 设 (X, ρ_X) 和 (Y, ρ_Y) 为度量空间。如果存在双射 $f : (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$，使得对于任意 $x_1, x_2 \in X$，都有

$$\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) = \rho_X(x_1, x_2)$$

则我们称 f 为一个等距同构 *(Isometry)*，并称度量空间 (X, ρ_X) 和 (Y, ρ_Y) 是等距同构的 *(Isometric)*。

因为等距同构的度量空间具有完全相同的度量性质，我们将等距同构的度量空间视为相同的度量空间。当然，绝大部分度量空间不是等距同构的。以下两个概念稍微放宽了限制。

定义 1.8. 如果单射 $f : (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ 满足：对于任意 $x_1, x_2 \in X$，均有

$$\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) = \rho_X(x_1, x_2)$$

则我们称 f 为一个 (度量) 等距嵌入 *(Isometric embedding)*。

定义 1.9. 我们称映射 $f : (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ 为一个 Lipschitz 常数为 L 的 *Lipschitz* 映射 *(Lipschitz mapping)*，如果对于任意 $x_1, x_2 \in X$，均有

$$\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) \le L\rho_X(x_1, x_2)$$

若 $0 < L < 1$，也称为压缩映射 *(Contraction mapping)*。

而所谓完备化，指的是

定义 1.10. 设 (X, ρ) 是度量空间，$(\hat{X}, \hat{\rho})$ 是完备度量空间。如果存在等距嵌入 $f : X \to \hat{X}$ 使得 $\overline{f(X)} = \hat{X}$，则我们称 $(\hat{X}, \hat{\rho})$ 是 (X, ρ) 的一个完备化 *(Completion)*。

而我们要指出的是，在等距同构意义下，任意度量空间都有唯一的完备化。

定理 1.5. *任意度量空间 (X, ρ) 都有完备化 $(\hat{X}, \hat{\rho})$，且在等距同构的意义下完备化是唯一的。*

这里只提一下证明脉络。首先证明完备化存在，再证明其唯一。对于前者，考虑 X 中所有 Cauchy 列组成的集合 U，在其上定义等价关系 $\sim$ 为两个 Cauchy 列之差极限为零，于是取 $W = U/\sim$，并定义度量为原度量的极限。再验证这构成完备度量空间，最后将 (X, ρ) 嵌入此空间，将元素 x 映到 $\{x, x, \cdots, x, \cdots\}$ 即可。

对于后者，假设有另外一个完备化，证明这两个完备化是等距同构的即可。

完整证明比较麻烦，现在也没必要，我就略了。

以及还有一些其它结论。

定理 1.6. *收敛列必为 Cauchy 列，反之不然。*

证明. Trivial.

反之容易发现由 $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ 诱导的度量空间不满足。 $\square$

定理 1.7. ***(压缩映像原理)*** 设 (X,ρ) 为完备度量空间，$f:X\to X$ 为压缩映射，则必存在 f 的唯一的**不动点 *(Fixed point)***$x\in X$，即 $f(x)=x$。

证明. 显然，不动点当然是唯一的，我们只需要证明不动点的存在性。

我们任意取 $x_0\in X$，然后递归定义

$$x_n=f(x_{n-1}),\ n\in\mathbb{N}$$

则存在 $0<L<1$，使得:

$$\rho(x_{n+1},x_n)\leq L\rho(x_n,x_{n-1}),\ \forall\, n\in\mathbb{N}_+$$

进而

$$\rho(x_{n+1},x_n)\leq L^n\rho(x_1,x_0),\ \forall\, n\in\mathbb{N}$$

于是对任意 $n<m$，有

$$\rho(x_n,x_m)\leq\sum_{i=n}^{m-1}\rho(x_{i+1}x_i)\leq\sum_{i=n}^{m-1}L^i\rho(x_1,x_0)\leq\frac{L^n}{1-L}\rho(x_1,x_0)$$

从而 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列，故收敛，设极限为 x。显然 f 是连续的，因此

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=x$$

所以 x 为 f 的不动点。 $\square$

我们举一些常见的例子。

例 1.3.

1. 设 (X,ρ) 为度量空间，$A\subset X$，如果令 $\rho_A=\rho|_{A\times A}$，即:

$$\begin{aligned}\rho_A:&A\times A\to\mathbb{R}\\&(x,y)\mapsto\rho_A(x,y)=\rho(x,y)\end{aligned}$$

显然，(A,ρ_A) 也是度量空间，称为 (X,ρ) 的子度量空间 *(Submetric space)*，有时仍将 ρ_A 记为 ρ。

2. 设 (X_1,ρ_1) 和 (X_2,ρ_2) 均为度量空间，$X=X_1\times X_2$。令

$$\begin{aligned}\rho:&X\times X\to\mathbb{R}\\&((x_1,y_1),(x_2,y_2))\mapsto\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)):=(\rho_1^2(x_1,y_1)+\rho_2^2(x_2,y_2))^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

容易验证 (X,ρ) 亦为度量空间，称为 (X_1,ρ_1) 和 (X_2,ρ_2) 的积度量空间 *(Product metric space)*，记作 $(X_1\times X_2,\rho_1\times\rho_2)$，类似可以定义 $(X_1\times\cdots\times X_n,\rho_1\times\cdots\times\rho_n)$

当然，还有 n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$，你可以自行验证相关性质。