Lec1 Note of Linear Algebra

Xuxuayame

日期：2022 年 9 月 1 日

设 R 为含幺交换环，可以定义 R 上的矩阵：

$$R^{m\times n}=\left\{\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix} \mid a_{ij}\in R\right\}$$

其上可以定义加法，数乘，乘法，与域上矩阵定义基本一致，这里不再赘述。

可以证明，$(R^{n\times n},+,\times)$ 形成一个含幺环。

在 $R^{n\times n}$ 上也可以定义行列式：

$$\begin{aligned}\det : & R^{n\times n}\to R\\ & (a_{ij})_{n\times n}\mapsto \det(a_{ij})_{n\times n}:=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{1\sigma_1}\cdots a_{n\sigma_n}\end{aligned}$$

同样地，det 为唯一一个 $R^{1\times n}$（或 $R^{n\times 1}$）上的反对称、规范、n 重线性映射：

- $\det(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_n)=-\det(\alpha_1,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_n)$；
- $\det(e_1,e_2,\cdots,e_n)=1$；
- $\det(\cdots,\alpha_i+\alpha_i',\cdots)=\det(\cdots,\alpha_i,\cdots)+\det(\cdots,\alpha_i',\cdots)$，

以及有 Laplace 展开

$$\det A=\sum_{1\le j_1<\cdots<j_r\le n}A\begin{pmatrix}i_1 & \cdots & i_r\\ j_1 & \cdots & j_r\end{pmatrix}(-1)^{i_1+\cdots+j_r}A\begin{pmatrix}\hat{i}_1 & \cdots & \hat{i}_r\\ \hat{j}_1 & \cdots & \hat{j}_r\end{pmatrix},\quad 1\le i_1<\cdots<i_r\le n$$

$$(A_{m\times n}B_{n\times p})\begin{pmatrix}i_1 & \cdots & i_r\\ k_1 & \cdots & k_r\end{pmatrix}=\sum_{1\le j_1<\cdots<j_r\le n}A\begin{pmatrix}i_1 & \cdots & i_r\\ j_1 & \cdots & j_r\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}k_1 & \cdots & k_r\\ j_1 & \cdots & j_r\end{pmatrix}$$

特别地，有 $(AB)_{ik}=\sum\limits_{1\le j\le n}A_{ij}B_{jk}$，$\det AB=\det A\cdot\det B$。

还有逆矩阵：$A_{m\times n}B_{n\times m}=I_m$，$BA=I_n$，定义也差不多，不解释了。

由 Cauchy-Binet 公式，如果逆存在，$m=n$。

以及伴随阵 $A^*=(c_{ij})$，$c_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ji}$，有 $A\cdot A^*=\det A\cdot I_n=A^*\cdot A$。

引理 0.1. A 可逆 $\Leftrightarrow \det A\in R^\times$（$R$ 中可逆元）

证明. “$\Rightarrow$” $AB=I_n\Rightarrow\det(AB)=\det A\cdot\det B=1$。

“$\Leftarrow$” $(\det A)^{-1}\cdot A^*=A^{-1}$。 □

例 0.1. $A\in\mathbb{Z}^{n\times n}$ 可逆 $\Leftrightarrow\det A=\pm1$。

如果定义 $\mathrm{rank}A$ 为 A 的非零子式阶的最大值，则 A 可逆 $\Rightarrow \mathrm{rank}A = n$，反之不成立。

以及我们可以定义初等方阵：

- P_{ij}：变换 I_n 的 i, j 两行（列）；
- $T_{ij}(a)$, $a \in R$：将 I_n 的第 j 行（i 列）乘以 a 倍加至第 i 行（j 列）；
- $D_i(a)$, $a \in R^\times$：将 I_n 的第 i 行乘以 a 倍。

它们的效果是：

- $P_{ij}A$：交换 A 的 i, j 两行。
- AP_{ij}：交换 A 的 i, j 两列。
- $T_{ij}(a)A$：将 A 的第 j 行乘以 a 倍加至第 i 行。
- $AT_{ij}(a)$：将 A 的第 i 列乘以 a 倍加至第 j 列。
- $D_i(a)A$：将 A 的第 i 行乘以 a 倍。
- $AD_i(a)$：将 A 的第 i 列乘以 a 倍。

以及

$$\det P_{ij} = -1, \quad \det T_{ij}(a) = 1, \quad \det D_i(a) = a$$

现在来考虑 $V/\mathbb{F}$, $\dim V = n < \infty$，则 $(\mathscr{L}(V), +, \circ)$ 构成环。

取 $\mathscr{A} \in \mathscr{L}(V)$，则 $\mathbb{F}[\mathscr{A}] := \{f(\mathscr{A}) \mid f(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]\}$ 为 $\mathscr{A}$ 生成的子环，为交换环。

于是取 V 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，我们知道：

$$\mathscr{A}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

这里当然 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$，但我们也可以把 $\mathbb{F}^{n\times n} \subseteq \mathbb{F}[\mathscr{A}]^{n\times n}$ 视作 $\mathbb{F}[\mathscr{A}]^{n\times n}$ 的子环，从而 $A \in \mathbb{F}[\mathscr{A}]^{n\times n}$。

当然，我们要定义 $V^{1\times p} \times \mathbb{F}[\mathscr{A}]^{p\times q} \to V^{1\times q}$ 这样的映射：

$$(\beta_1, \cdots, \beta_p)\begin{pmatrix} \mathscr{A}_{11} & \cdots & \mathscr{A}_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathscr{A}_{p1} & \cdots & \mathscr{A}_{pq} \end{pmatrix} := (\cdots, \mathscr{A}_{1i}(\beta_1) + \cdots + \mathscr{A}_{pi}(\beta_p), \cdots), \quad \beta_i \in V$$

当然，这是定义合理的。于是我们令

$$\mathbb{A} = \mathscr{A} I_n - A = \begin{pmatrix} \mathscr{A} - a_{11}\mathbb{1} & -a_{12}\mathbb{1} & \cdots & -a_{1n}\mathbb{1} \\ -a_{21}\mathbb{1} & \mathscr{A} - a_{22}\mathbb{1} & \cdots & -a_{2n}\mathbb{1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1}\mathbb{1} & -a_{n2}\mathbb{1} & \cdots & \mathscr{A} - a_{nn}\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

显然 $\mathbb{A}$ 为环 $\mathbb{F}[\mathscr{A}]^{n\times n}$ 上的矩阵，于是

$$\mathbb{A}\cdot\mathbb{A}^* = \begin{pmatrix} \det\mathbb{A}\cdot\mathbb{1} & & \\ & \ddots & \\ & & \det\mathbb{A}\cdot\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

而 $\mathbb{A} = \lambda I_n - A\mid_{\lambda=\mathscr{A}}$，那么 $\det\mathbb{A} = \varphi_A(\lambda)\mid_{\lambda=\mathscr{A}} = \varphi_A(\mathscr{A})$。也就是说

$$\mathbb{A}\cdot\mathbb{A}^* = \begin{pmatrix} \varphi_A(\mathscr{A}) & & \\ & \ddots & \\ & & \varphi_A(\mathscr{A}) \end{pmatrix} \in \mathbb{F}[\mathscr{A}]^{n\times n}$$

而我们注意到

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\mathbb{A} = (\alpha_1,\cdot,\alpha_n)\begin{pmatrix} \mathscr{A}-a_{11}\mathbb{1} & -a_{12}\mathbb{1} & \cdots & -a_{1n}\mathbb{1} \\ -a_{21}\mathbb{1} & \mathscr{A}-a_{22}\mathbb{1} & \cdots & -a_{2n}\mathbb{1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1}\mathbb{1} & -a_{n2}\mathbb{1} & \cdots & \mathscr{A}-a_{nn}\mathbb{1} \end{pmatrix} = (0,\cdots,0)$$

那么应有

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)(\mathbb{A}\mathbb{A}^*) = (0,\cdots,0)\mathbb{A}^* = (0,\cdots,0)$$

即

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} \varphi_A(\mathscr{A}) & & \\ & \ddots & \\ & & \varphi_A(\mathscr{A}) \end{pmatrix} = (0,\cdots,0)$$

但是

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} \varphi_A(\mathscr{A}) & & \\ & \ddots & \\ & & \varphi_A(\mathscr{A}) \end{pmatrix} = (\varphi_A(\mathscr{A})(\alpha_1),\cdots,\varphi_A(\mathscr{A})(\alpha_n))$$

因此 $\varphi_A(\mathscr{A})(\alpha_i) = 0$，$\forall\ i$，进而 $\varphi_A(\mathscr{A}) = 0$，即 φ_A 是 $\mathscr{A}$ 的零化多项式。也就是 Caylay-Hamilton 定理。

最后开个小头。

定义 0.1. $A\in\mathbb{F}[\lambda]^{n\times n}$ 称为一个 $m\times n$ 阶的 $\lambda-$ 阵（或多项式矩阵）。

评论. $A(\lambda)$ 可逆 $\Leftrightarrow \det A(\lambda)\in\mathbb{F}\setminus\{0\}$。