Lec4 Note of Introduction to Differential Equation

Xuxuayame

日期：2022 年 9 月 8 日

现在我们介绍第二种方法。

2、参数法

(1) 方程不显含自变量 x，即 $F(y,p)=0$。

设 $y=g(t)$, $p=h(t)$，则 $\mathrm{d}x=\frac{1}{p}\mathrm{d}y$

$$\Rightarrow x=\int\frac{g'(t)}{h(t)}\,\mathrm{d}\,t+c$$

故微分方程的解为

$$\begin{cases} x=\int\frac{g'(t)}{h(t)}\,\mathrm{d}\,t+C \\ y=g(t) \end{cases}$$

例 2.1. 求解微分方程：$(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2+y^2=1$。

解. 令 $y=\cos t$, $p=\sin t$，则若 $p\neq 0$，则

$$x=\int\frac{1}{\sin t}\,\mathrm{d}\cos t+C=-\int\mathrm{d}\,t+C=-t+C$$

故通解为 $y=\cos(x-C)$。

若 $p\equiv 0$，则 $y=\pm 1$ 是特解。 □

(2) 对一般的一阶隐式方程 $F(x,y,p)=0$, $(x,y,p)\in\mathbb{R}^3$。

令 $x=f(u,v)$, $y=g(u,v)$, $p=h(u,v)$，则由 $\mathrm{d}y=p\mathrm{d}x$ 可知：

$$\frac{\partial g}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial g}{\partial v}\mathrm{d}v=h(\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v) \tag{1}$$

$$\Rightarrow(\frac{\partial g}{\partial u}-h\frac{\partial f}{\partial u})\mathrm{d}u+(\frac{\partial g}{\partial v}-h\frac{\partial f}{\partial v})\mathrm{d}v=0 \tag{2}$$

若 (2) 式有通解 $v=Q(u,C)$，则原方程的通解为 $\begin{cases} x=f(u,Q(u,C)) \\ y=g(u,Q(u,C)) \end{cases}$ 。

若 (2) 式有特解 $v=S(u)$，则原方程的特解为 $\begin{cases} x=f(u,S(u)) \\ y=g(u,S(u)) \end{cases}$ 。

例 2.2. 求解微分方程：$(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2+y-x=0$。

解. 令 $x=u,\ p=v,\ y=u-v^2$。

于是

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}u-2v\mathrm{d}v=v\mathrm{d}u\\
\Rightarrow&(1-v)\mathrm{d}u-2v\mathrm{d}v=0
\end{aligned}
$$

- $v\equiv 1$ 是特解，故原方程特解为 $\begin{cases} x=u \\ y=u-1 \end{cases}$。
- $\mathrm{d}u+\dfrac{2v}{v-1}\mathrm{d}v=0 \Rightarrow \displaystyle\int \mathrm{d}\,u+\int \frac{2v}{v-1}\,\mathrm{d}\,v=C$。
  通解为 $u+2v+2\ln|v-1|=C$
  即 $u=-2v-\ln(v-1)^2+C$。
  原方程通解为 $\begin{cases} x=-2v-\ln(v-1)^2+C \\ y=-v^2-2v-\ln(v-1)^2+C \end{cases}$

□

Part III

存在唯一性定理

§3.1 Picard 存在唯一性定理

考虑方程 $(E):\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)m\ y(x_0)=y_0$。

定义 3.1. （Lipschitz-条件）设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内满足不等式

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|,\ L>0$$

则称 f 在区域 D 内对 y 满足 *Lipschitz*-条件。

显然，若 D 是有界闭凸区域，$\frac{\partial f}{\partial y}$ 连续，则 f 关于 y 满足 Lipschitz-条件。

定理 3.1. （*Picard* 存在唯一性定理）设初值问题 $(E):\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y),\ y(x_0)=y_0$，其中 $f(x,y)$ 在矩形区域 $R:|x-x_0|\le a,\ |y-y_0|\le b$ 内连续，且对 y 满足 *Lipschitz*-条件，则 (E) 在区间 $[x_0-h,x_0+h]$ 上有且仅有一个解，其中 $h=\min\{a,\frac{b}{M}\},\ M>\max_R|f(x,y)|$。

评论. 这里 h 取为 $\min\{a,\frac{b}{M}\}$ 是为保证 (E) 在 $[x_0-h,x_0+h]$ 上有意义。而 M 为 $|f(x,y)|$ 在 R 上的上界。

证明. 为了突出思路，我们将证明分成以下四步。

Step 1：初值问题 (E) 等价于积分方程

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y) \, \mathrm{d}\, x \tag{3}$$

事实上，设 $y = y(x)$ $(x \in I)$ 是 (E) 的解，则有

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad (x \in I) \tag{4}$$

和

$$y(x_0) = y_0 \tag{5}$$

由此，对恒等式 (4) 积分并利用初值条件 (5)，得到

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x)) \, \mathrm{d}\, x \quad (x \in I),$$

即 $y = y(x)$ 是积分方程 (3) 的解。

反之，设 $y = y(x)$ $(x \in I)$ 是 (3) 的解，则只要逆转上面的推导就可知道 $y = y(x)$ 是 (E) 的解。

因此，上述定理的证明等价于证明积分方程 (3) 在区间 I 上有且只有一个解。

Step 2：用逐次迭代法构造 Picard 序列

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_n(x)) \, \mathrm{d}\, x \quad (x \in I) \tag{6}$$

$(n = 0, 1, 2, \cdots)$，其中 $y_0(x) = y_0$。

当 $n = 0$ 时，注意到 $f(x, y_0(x))$ 是 I 上的连续函数，所以由 (6) 可见

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0(x)) \, \mathrm{d}\, x \quad (x \in I)$$

在 I 上是连续可微的，而且满足不等式

$$|y_1(x) - y_0| \le \left| \int_{x_0}^{x} |f(x, y_0(x))| \, \mathrm{d}\, x \right| \le M|x - x_0| \tag{7}$$

这就是说，在区间 I 上 $|y_1(x) - y_0| \le Mh \le b$。

因此，$f(x, y_1(x))$ 在 I 上是连续的。所以由 (6) 可见

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x)) \, \mathrm{d}\, x \quad (x \in I)$$

在 I 上是连续可微的，而且满足不等式

$$|y_2(x) - y_0| \le \left| \int_{x_0}^{x} |f(x, y_1(x))| \, \mathrm{d}\, x \right| \le M|x - x_0|,$$

从而我们有：$|y_2(x) - y_0| \le Mh \le b$ $(x \in I)$。

如此类推，用归纳法不难证明：由 (6) 给出的 Picard 序列 $y = y_n(x)$ 在 I 上是连续的，而且满足不等式

$$|y_n(x) - y_0| \le M|x - x_0| \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

Step 3：现证：Picard 序列 $y = y_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛到积分方程 (3) 的解。

注意，序列 $y_n(x)$ 的收敛性等价于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} [y_{n+1}(x) - y_n(x)] \tag{8}$$

的收敛性。下面证明级数 (8) 在 I 上是一致收敛的。为此，我们用归纳法证明不等式

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq \frac{M}{L}\frac{(L|x-x_0|)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{9}$$

在 I 上成立 ($n = 0, 1, 2, \cdots$)。

事实上，当 $n = 0$ 时由 (7) 可知 (9) 成立。

假设当 $n = k$ 时 (9) 式成立。先由 (6) 推出

$$|y_{k+2}(x) - y_{k+1}(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} [f(x, y_{k+1}(x)) - f(x, y_k(x))] \,\mathrm{d}\, x\right|$$

再利用 Lipschitz-条件和归纳法假设，我们得到

$$\begin{aligned} |y_{k+2}(x) - y_{k+1}(x)| &\leq \left|\int_{x_0}^{x} L|y_{k+1}(x) - y_k(x)| \,\mathrm{d}\, x\right| \\ &\leq M\left|\int_{x_0}^{x} \frac{(L|x-x_0|)^{k+1}}{(k+1)!} \,\mathrm{d}\, x\right| \\ &= \frac{M}{L}\frac{(L|x-x_0|)^{k+2}}{(k+2)!} \end{aligned}$$

由此可见，当 $n = k+1$ 时 (9) 也成立。因此，(9) 得证。

显然, 不等式 (9) 蕴含级数 (8) 在区间 I 上是一致收敛的。因此, Picard 序列 $y = y_n(x)$ 是一致收敛的。则极限函数

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) \quad (x \in I)$$

在区间 I 上是连续的。然后，利用 $f(x, y)$ 的连续性以及 Picard 序列 $y_n(x)$ 的一致收敛性，我们在 (6) 中令 $n \to \infty$ 就得到

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x)) \,\mathrm{d}\, x \quad (x \in I)$$

因此，$y = \varphi(x)$ 在 I 上是积分方程 (3) 的一个解。

Step 4：最后证明唯一性。

设积分方程 (3) 有两个解分别为 $y = u(x)$ 和 $y = v(x)$。令 $J = [x_0 - d, x_0 + d]$ 为它们的共同存在区间，其中 d 为某一整数 ($d \leq h$)。则由 (3) 推出

$$u(x) - v(x) = \int_{x_0}^{x} [f(x, u(x)) - f(x, v(x))] \,\mathrm{d}\, x \quad (x \in J)$$

再利用 Lipschitz-条件，我们得到

$$|u(x) - v(x)| \leq L\left|\int_{x_0}^{x} |u(x) - v(x)| \,\mathrm{d}\, x\right| \tag{10}$$

注意，在区间 J 上，$|u(x) - v(x)|$ 是连续有界的。因此可取它的一个上界 K。则由 (10) 可见

$$|u(x) - v(x)| \leq LK|x - x_0|$$

然后，把它代入 (10) 的右端，我们推出

$$|u(x) - v(x)| \leq K\frac{(L|x-x_0|)^2}{2}$$

如此递推，我们可用归纳法得到

$$|u(x) - v(x)| \leq K\frac{(L|x - x_0|)^n}{n!} \quad (x \in J)$$

然后，令 $n \to \infty$，则上面不等式的右端趋于零。因此，我们推出

$$u(x) = v(x) \quad (x \in J)$$

这就是说，积分方程 (3) 的解是唯一的。

于是定理 3.1 成立。 $\square$