Lec3 Note of Introduction to Differential Equation

Xuxuayame

日期：2022 年 9 月 5 日

例 2.1. 讨论形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{ax+by+c}{mx+ny+l})$$

的方程的求解方法，这里 a, b, c, m, n, l 为常数。

解.
- 若 $c = l = 0$，则为齐次方程。
- 若 c, l 不同时为零，令 $x = \xi + \alpha,\ y = \eta + \beta$，$\alpha, \beta$ 为常数。
  则原方程变为
  $$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = f(\frac{a\xi + b\eta + a\alpha + b\beta + c}{m\xi + n\eta + m\alpha + n\beta + l}) \qquad (*)$$
  若 $an - bm \neq 0$，$\exists\, \alpha, \beta\ s.t. \begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0 \\ m\alpha + n\beta + l = 0 \end{cases}$
  则 $(*)$ 为齐次方程。
  若 $\dfrac{a}{m} = \dfrac{b}{n}$，设比值为 λ，则原方程变为
  $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{\lambda(mx+ny)+c}{mx+ny+l})$$
  令 $u = mx + ny$，则方程变为
  $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = m + n\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = m + nf(\frac{\lambda u + c}{u + l})$$
  为可分离变量的方程。

□

2、Bernoulli 方程

考虑以下方程：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x)y^n, \quad n \neq 1$$

- $y \equiv 0$ 是方程的解。
-
$$\begin{aligned} &\frac{1}{y^n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)\frac{1}{y^{n-1}} = q(x) \\ \Rightarrow &\frac{1}{1-n}\frac{\mathrm{d}y^{1-n}}{\mathrm{d}x} + p(x)y^{1-n} = q(x) \end{aligned}$$

令 $z=y^{1-n}$，则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x)$$

为一阶线性方程。

3、Riccati 方程

考虑以下方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y^2+q(x)y+r(x) \tag{1}$$

这里 p,q,r 在 I 上连续，$p(x)$ 在 I 上不恒为零。

但事实上这个方程我们无法直接求解的，我们必须借助它的某个特解来求通解。

设它的一个特解为 $\varphi(x)$，那么设 $y(x)=\varphi(x)+u(x)$，则

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\\&=[p(\varphi+u)^2+q(\varphi+u)+r]-[p\varphi^2+q\varphi+r]\\&=pu^2+2p\varphi u+qu\end{aligned}$$

即 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=pu^2+(2p\varphi+q)u$，为 Bernoulli 方程。

例 2.2. 求解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ay^2=bx^{-2}$$

这里 a,b 为常数。

解.
- $y\equiv 0$ 不是解。
- 两边同时乘 $\frac{1}{y^2}$，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a&=b\frac{1}{x^2y^2}\\ \Rightarrow -\frac{\mathrm{d}\frac{1}{y}}{\mathrm{d}x}+a&=b\frac{1}{x^2}(\frac{1}{y})^2\end{aligned}$$

令 $z=\frac{1}{y}$，则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-a=-\frac{b}{x^2}z^2$，为齐次方程。

令 $z=ux$，则 $u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a-bu^2$，为可分离变量的方程。

□

4、Gronwall 不等式

定理 2.1. 令 K 是非负常数，$f(x),g(x)$ 是区间 $\alpha\le x\le\beta$ 上的连续非负函数，且满足不等式

$$f(x)\le K+\int_\alpha^x f(s)g(s)\,\mathrm{d}\,s,\quad \forall\,\alpha\le x\le\beta$$

则 $f(x)\le Ke^{\int_\alpha^x g(s)\,\mathrm{d}\,s}$, $\forall\,\alpha\le x\le\beta$。

证明. 令 $A(x)=K+\int_\alpha^x f(s)g(s)\,\mathrm{d}\,s$，则

$$A'(x)=f(x)g(x)\le g(x)A(x)$$

于是

$$\begin{aligned}&(A(x)e^{-\int_\alpha^x g(s)\,\mathrm{d}\,s})'=(A'(x)-g(x)A(x))e^{-\int_\alpha^x g(s)\,\mathrm{d}\,s}\le 0\\ \Rightarrow&A(x)e^{-\int_\alpha^x g(s)\,\mathrm{d}\,s}\le A(\alpha)=K\\ \Rightarrow&f(x)\le A(x)\le Ke^{\int_\alpha^x g(s)\,\mathrm{d}\,s},\ \forall\,\alpha\le x\le\beta\end{aligned}$$

□

定理 2.2. *(Gronwall，微分形式)*令 $f\in C^1([\alpha,\beta])$ 非负，且满足 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\le g(x)f(x),\ \forall\,x\in[\alpha,\beta]$，其中 $g(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续非负，则有

$$f(x)\le f(\alpha)e^{\int_\alpha^x g(s)\,\mathrm{d}\,s},\ \forall\,x\in[\alpha,\beta]$$

证明. 由于

$$(f(x)e^{-\int_\alpha^x g(s)\,\mathrm{d}\,s})'=(f'-gf)e^{-\int_\alpha^x g(s)\,\mathrm{d}\,s}\le 0$$

故

$$f(x)e^{-\int_\alpha^x g(s)\,\mathrm{d}\,s}\le f(\alpha),\ \forall\,x\in[\alpha,\beta]$$

□

§2.5 一阶隐式方程

考虑一般的一阶方程

$$F(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})=0 \tag{2}$$

1、微分法

设从 (2) 可以解出 $y=f(x,p),\ p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

则两边关于 x 求导，可得

$$p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

即

$$(\frac{\partial f}{\partial x}-p)\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial p}\mathrm{d}p=0 \tag{3}$$

- 若 (3) 有通解 $p=u(x,C)$，则 $y=f(x,u(x,C))$ 是原方程的通解。
- 若 (3) 有特解 $p=v(x)$，则原方程的特解为 $y=f(x,v(x))$。
- 若 (3) 有通解 $x=\omega(p,C)$，则原方程的通解为 $\begin{cases}x=\omega(p,C)\\ y=f(\omega(p,C),p)\end{cases}$

例 2.3. 求解克莱罗方程

$$y = xp + f(p), \quad p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

其中 $f''(p) \neq 0$

解. 对 x 求导，可得

$$\begin{aligned} p &= p + x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + f'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \\ \Rightarrow &(x + f'(p))\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0 \end{aligned}$$

- $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0 \Rightarrow p = C \Rightarrow$ 通解为 $y = Cx + f(C)$。
- $x + f'(p) = 0$，特解为 $\begin{cases} x = -f'(p) \\ y = -pf'(p) + f(p) \end{cases}$。

□

若 $f(p) = -\dfrac{1}{4}p^2$，通解为 $y = Cx - \dfrac{C^2}{4}$，特解为 $\begin{cases} x = \frac{1}{2}p \\ y = \frac{1}{2}p^2 + (-\frac{1}{4}p^2) = \frac{1}{4}p^2 \end{cases} \Rightarrow y = x^2$。注意到这里特解并不是通解中的一条线。而事实上对于一般情形也是如此，特解并非通解中的一条线。

对特解 $x = -f'(p)$，由于 $f''(p) \neq 0$，由隐函数定理，可以解出 $p = \omega(x)$，且 $x = -f'(\omega(x))$，于是 $1 = -f''(\omega(x)) \cdot \omega'(x)$，因此 $\omega'(x) \neq 0$，即 $p = \omega(x)$ 不是常数。

评论. 这个特解又称为微分方程的奇解，或一族通解的包络。不是我们这里要讨论的。