Lec2 Note of Introduction to Differential Equation

Xuxuayame

日期：2022 年 9 月 1 日

我们再来看个可分离变量的方程的例子。

例 2.1. 求解微分方程：$(x^2+1)(y^2-1)\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y = 0$。

解. 首先，$y=\pm 1$ 和 $x=0$ 是特解。对 $x \neq 0$, $y \neq \pm 1$，有

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2+1}{x}\mathrm{d}x + \frac{y}{y^2-1}\mathrm{d}y = 0 \\
\Rightarrow &\int \frac{x^2+1}{x}\,\mathrm{d}\,x + \int \frac{y}{y^2-1}\,\mathrm{d}\,y = C \\
\Rightarrow &\frac{1}{2}x^2 + \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(y^2-1) = C \\
\Rightarrow &e^{x^2}x^2|y^2-1| = e^C \\
\Rightarrow &y^2 - 1 = \pm e^C x^{-2} e^{-x^2}
\end{aligned}$$

因此，通解为 $y^2-1 = Cx^{-2}e^{-x^2}$，C 为任意常数，特解为 $x=0$。 □

§2.3 一阶线性方程

考虑一阶线性方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x)$，$p(x), q(x)$ 是 $I=(a,b)$ 上的连续函数。

先考虑齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = 0 \tag{1}$$

显然，$y \equiv 0$ 是一个解。

若 $y \neq 0$，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{y}\mathrm{d}y + p(x)\mathrm{d}x = 0 \\
\Rightarrow &\ln\frac{|y|}{|y_0|} + \int_{x_0}^{x} p(s)\,\mathrm{d}\,s = C \\
\Rightarrow &|y| = e^C e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\,\mathrm{d}\,s} \\
\Rightarrow &y = \pm e^C e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\,\mathrm{d}\,s}
\end{aligned}$$

再结合前面的 $y \equiv 0$，可知 $y = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\,\mathrm{d}\,s}$，$C$ 是任意常数。

现在考虑非齐次方程。

令它的解是 $y=C(x)e^{-\int_{x_0}^{x}p(s)\,\mathrm{d}\,s}$，则

$$C'(x)e^{-\int_{x_0}^{x}p(s)\,\mathrm{d}\,s}+C(x)e^{-\int_{x_0}^{x}p(s)\,\mathrm{d}\,s}(-p(x))+p(x)C(x)e^{-\int_{x_0}^{x}p(s)\,\mathrm{d}\,s}=q(x)$$

故 $C'(x)=q(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(s)\,\mathrm{d}\,s}$，因此，$C(x)=C+\displaystyle\int_{x_0}^{x}q(s)e^{\int_{x_0}^{s}p(t)\,\mathrm{d}\,t}\,\mathrm{d}\,s$。

从而原方程的解为

$$y=Ce^{-\int_{x_0}^{x}p(s)\,\mathrm{d}\,s}+\int_{x_0}^{x}q(s)e^{-\int_{s}^{x}p(t)\,\mathrm{d}\,t}\,\mathrm{d}\,s$$

若 $y(x_0)=y_0$。则

$$y(x)=y_0e^{-\int_{x_0}^{x}p(s)\,\mathrm{d}\,s}+\int_{x_0}^{x}q(s)e^{-\int_{s}^{x}p(t)\,\mathrm{d}\,t}\,\mathrm{d}\,s$$

这个方法叫作常数变易法 *(Variation of parameters)*，它的动机在于，对于齐次方程我们已经求得了它的解，而且意识到相应的通解之间无非是差了个倍数。只要你把一个特解的每一处都同比例放缩，就可以得到另一个特解。

现在我们再考虑非齐次方程，假如 $q(x)$ 特别小，那么可以预见的是，非齐次方程的解应当十分接近齐次方程的解，而 $q(x)$ 无非影响了每一处的放缩比例，使得这不成为一个常数，因此这个放缩比例依赖于 x，记作 $C(x)$，也就是把常数变成了函数。举个例子，假如齐次方程有个特解，$C=2$，那么非齐次方程的一个相应的解可能在某处 $C=1.99$，在另外一处 $C=2.01$，这和 x 是相关的。

当然，$C(x)$ 的变化程度取决于 $q(x)$ 的大小，但不管怎么说，用 $C(x)$ 来替代 C 这件事情当然是合理的。

评论. 对于方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$，如果要考虑其含义的话，可以理解为，方程在 $\mathbb{R}^2$ 的每一点处都指定了一个斜率值，由 $f(x,y)$ 给出，而方程求解无非就是找一个函数 $y=\varphi(x)$ 使得函数在每一点处的切线斜率均与给定的斜率一致，$\varphi(x)$ 的图象又叫积分曲线。

例 2.2. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{1}{x}y=x^3\ (x\neq 0)$ 的解。

解. 当 $x>0$ 时，齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{y}{x}=0$ 的解为

$$y=e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{1}{s}\,\mathrm{d}\,s}=\frac{1}{x}\ (\text{取}x_0=1)$$

令非齐次方程的解为 $y=C(x)\dfrac{1}{x}$，则

$$\begin{aligned}C'(x)\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}C(x)+\frac{C(x)}{x^2}&=x^3\\ \Rightarrow C'(x)&=x^4\\ \Rightarrow C(x)&=\frac{1}{5}x^5+C\end{aligned}$$

故通解为 $y=\dfrac{1}{5}x^4+\dfrac{C}{x}$。

当 $x<0$ 时，同样计算可得 $y=\frac{1}{5}x^4+C$，C 为任意常数。 □

命题 2.1. 齐次方程 *(1)* 的解或者恒为零，或者恒不为零。

证明. 若 $y(x_0)=0$，且 y 不恒为零，由 (1)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(s)\,\mathrm{d}\,s})=(y'+p(x)y)e^{\int_{x_0}^{x}p(s)\,\mathrm{d}\,s}=0$$

故 $y(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(s)\,\mathrm{d}\,s}=y(x_0)=0,\ \forall\, x\in(a,b)$。

由 $x_0\in(a,b)$，p 在 (a,b) 上连续，$\left|\int_{x_0}^{x}p(s)\,\mathrm{d}\,s\right|<+\infty,\ \forall\, x\in(a,b)$。

故 $y(x)\equiv 0,\ \forall\, x\in(a,b)$。 □

命题 2.2. 线性方程的初值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}\tag{2}$$

的解存在且唯一。

证明. 存在性：如前文所述。

唯一性：设 (2) 有两个解 $y=\varphi_1(x),\ y=\varphi_2(x)$。

考虑 $\psi(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$。

$$\psi'(x)=\varphi_1'(x)-\varphi_2'(x)=(-p\varphi_1+q)-(-p\varphi_2+q)=-p\psi$$

即

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}+p\psi=0\\ \psi(x_0)=0\end{cases}$$

由性质 1，$\psi(x)\equiv 0$。 □

例 2.3. 设微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ay=f(x)$，其中 $a>0$ 为常数，$f(x)$ 是周期为 2π 的连续函数，试求方程的 2π 周期解。

解. 通解为 $y(x)=Ce^{-ax}+\int_0^x f(s)e^{-a(x-s)}\,\mathrm{d}\,s$。

要找 $y(x)$ 使得 $y(x)=y(x+2\pi),\ \forall\, x$。

令 $u(x)=y(x)-y(x+2\pi)$，则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}&=y'(x)-y'(x+2\pi)\\&=(-ay(x)+f(x))-(-ay(x+2\pi)+f(x))\end{aligned}$$

即 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+au=0$，要使 $u(x)\equiv 0$，由性质 1，只要 $u(0)=0$ 即可，即 $y(0)=y(2\pi)$。

于是

$$\begin{aligned}C&=Ce^{-2\pi a}+\int_0^{2\pi}f(x)e^{-as}\,\mathrm{d}\,s\cdot e^{-2\pi a}\\ \Rightarrow C&=\frac{e^{-2\pi a}}{1-e^{-2\pi a}}\int_0^{2\pi}f(s)e^{as}\,\mathrm{d}\,s\end{aligned}$$

故

$$y(x)=\frac{e^{-2\pi a}}{1-e^{-2\pi a}}\int_0^{2\pi}f(s)e^{-a(x-s)}\,\mathrm{d}\,s+\int_0^{x}f(s)e^{-a(x-s)}\,\mathrm{d}\,s$$

□

顺带一提，这里你设任意的 $y(x_0)=y(x_0+2\pi)$ 都会解出一致的 C 值。

§2.4 几类重要的常微分方程（一阶）

1、齐次方程

$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$，$P(x,y)$，$Q(x,y)$ 是同次齐次函数，即 $P(tx,ty)=t^mP(x,y)$，$Q(tx,ty)=t^mQ(x,y)$。

解法如下。

令 $y=ux$，则 $\mathrm{d}y=x\mathrm{d}u+u\mathrm{d}x$，原方程为

$$\begin{aligned}&P(x,ux)\mathrm{d}x+Q(x,ux)(x\mathrm{d}u+u\mathrm{d}x)=0\\ \Rightarrow &x^m(P(1,u)+uQ(1,u))\mathrm{d}x+x^{m+1}Q(1,u)\mathrm{d}u=0\end{aligned}$$

这是一个可分离变量的方程。

例 2.4. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x+y}{x-y}$

解. 令 $y=ux$，则原方程变为

$$\begin{aligned}&u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{x+ux}{x-ux}=\frac{1+u}{1-u}\\ \Rightarrow &x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1+u^2}{1-u}\end{aligned}$$

显然 $x=0$ 不是解，因此 $x\neq0$，于是

$$\begin{aligned}&\frac{1-u}{1+u^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\ \Rightarrow &\arctan u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln|x|+C\\ \Rightarrow &e^{\arctan u}\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}=|x|e^C\\ \Rightarrow &Ce^{\arctan\frac{y}{x}}=\sqrt{x^2+y^2}\end{aligned}$$

用极坐标则更为简便。令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则通解为

$$r=Ce^{\theta}$$

□