Lec1 Note of Introduction to Differential Equation

Xuxuayame

日期：2022 年 8 月 30 日

先看两个例子。

例 1.1. 传染病模型 (SIR)：这个模型中有三个关于时间 t 的函数，分别为易感人数 $S(t)$，感染人数 $I(t)$，康复人数 $R(t)$。

如果加上一些理想化条件，例如病不致死，人群中不存在人的流入和流出，康复后不会再次感染，那么可以得到以下关系：

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t) \\ R'(t) = \nu I(t) \\ (S(t)+I(t)+R(t))' = 0 \end{cases} \quad \text{进而} \begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t) \\ I'(t) = -\nu I(t) + \beta S(t)I(t) \end{cases}$$

例 1.2. 捕食与被捕食模型：考虑狐狸与兔子间的捕食关系，设狐狸数量为 $x(t)$，兔子数量为 $y(t)$。并加上一些理想化条件，例如环境资源充足，不考虑其它捕食者，不考虑病死因素。也可以得到下列关系：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t)(a - by(t)) \\ \dot{y}(t) = y(t)(c - dx(t)) \end{cases}$$

研究这些例子，我们需要进行微分方程的求解。然而我们的目标并不是解微分方程，因为实际上，几乎所有的微分方程是无法求解的，就比如刚才的两个例子。我们能解决的微分方程其实是很小的一部分，而我们要学习的也正是这一部分。那么我们的目标是什么呢？我们真正的目标是对方程的解进行描述。若方程可解，给出解的解析表达式；若无法得到解析解，则对解的行为作出描述。

但要强调的是，**研究不同类型的方程，需要使用不同的方法**，就像不同方向的物理很难用一种统一的理论去研究。

接下来介绍一些基本概念。

定义 1.1. 含有未知函数 $y(x)$ 及其直到 n 阶导数 $y'(x)$, $y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)$ 的等式

$$F(x, y, \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

称为常微分方程 *(Ordinary differential equation)*。若出现的导数的最高阶数为 n，则称 (1) 为n 阶常微分方程 *(Ordinary differential equation of order n)*。

定义 1.2. 设函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 J 上连续，并且有直到 n 阶导数，如果 $y=\varphi(x)$ 代入 (1) 后得到关于 x 的恒等式，即：

$$F(x,\varphi,\cdots,\varphi^{(n)})=0,\ \forall\, x\in J$$

则称 $y=\varphi(x)$ 是 (1) 在区间 J 上的一个解 *(Solution)*。

评论. 补充一下，方程的某一个具体解称为方程的特解，而带有任意常数 C 的解称为方程的通解。而很遗憾的事情是，大部分情况下，即使将特解与通解组合起来，也不能得到方程的所有解。

定义 1.3. 若 (1) 中的 F 对 y 及它的导数 $y',\cdots,y^{(n)}$ 的全体而言是线性的，则称 (1) 为线性常微分方程 *(Linear ordinary differential equation)*，否则称为非线性常微分方程 *(Non-linear ordinary differential equation)*。

至于什么叫线性，这里可以理解为，将 $y,y',\cdots,y^{(n)}$ 全部替换为同一个变量后，方程关于这个变量是线性的。和 x 没有关系。

Part II

一阶线性方程

考虑 $y'+p(x)y=q(x)$，$p(x),q(x)$ 在区间 $I=(a,b)$ 上连续。若 $q(x)\equiv 0$，则称为齐次方程 *(Homogeneous equation)*，反之则称为非齐次方程 *(Nonhomogeneous equation)*。

评论. 要研究非齐次方程，先要考察它对应的齐次方程。

§2.1 恰当方程

定义 1.4. 考虑一阶常微分方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{2}$$

若存在可微函数 $\Phi(x,y)$ 满足 $\mathrm{d}\Phi(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$，即 $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=P$，$\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}=Q$，则称方程 (2) 为恰当方程 *(Exact equation)*

若 (2) 为恰当方程，则存在 $\Phi(x,y)$ 可微且

$$\mathrm{d}\Phi(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$$

则 $\Phi(x,y)=C$，从而解出 $y=u(x)$ 或 $x=v(y)$。

定理 1.1. 设 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在区域 $R:\alpha<x<\beta,\ \gamma<y<\delta$ 上连续，且有连续的一阶偏导数 $\dfrac{\partial P}{\partial y}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，则 (2) 是恰当方程的充要条件为 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在 R 上恒成立。此时方程

(2) 的通解为

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)\,\mathrm{d}\,x + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,\mathrm{d}\,y = C$$

或

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,\mathrm{d}\,x + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,\mathrm{d}\,y = C$$

证明. 必要性：若 (2) 是恰当方程，则存在 $\varPhi(x,y)$ 可微，使得 $\dfrac{\partial \varPhi}{\partial x} = P$，$\dfrac{\partial \varPhi}{\partial y} = Q$。

于是 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 \varPhi}{\partial y \partial x}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 \varPhi}{\partial x \partial y}$。

由于 $\dfrac{\partial P}{\partial y}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 连续，故 $\dfrac{\partial^2 \varPhi}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 \varPhi}{\partial x \partial y}$。

于是 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$。

充分性：令 $\varPhi(x,y) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} P(x,y)\,\mathrm{d}\,x + \psi(y)$，则

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varPhi}{\partial y} &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}\,x + \psi'(y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}\,x + \psi'(y) \\ &= Q(x,y) - Q(x_0,y) + \psi'(y) = Q(x,y)\end{aligned}$$

故 $\psi'(y) = Q(x_0,y) \Rightarrow \psi(y) = \displaystyle\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,\mathrm{d}\,y + C$

因此，$\varPhi(x,y) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} P(x,y)\,\mathrm{d}\,x + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,\mathrm{d}\,y + C$，故 (2) 是恰当方程，通解为：

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)\,\mathrm{d}\,x + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,\mathrm{d}\,y = C$$

□

例 1.3. 考虑 $p(x)\mathrm{d}x + q(y)\mathrm{d}y = 0$，$p(x), q(y)$ 连续可微。显然这是一个恰当方程，其通解为 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} p(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_{y_0}^{y} q(y)\,\mathrm{d}\,y = C$。

§2.2 可分离变量的方程

考虑形如 $X(x)Y_1(y)\mathrm{d}x + X_1(x)Y(y)\mathrm{d}y = 0$ 的方程，若 $X_1(x) \neq 0$, $Y_1(y) \neq 0$，则

$$\frac{X(x)}{X_1(x)}\mathrm{d}x + \frac{Y(y)}{Y_1(y)}\mathrm{d}y = 0$$

其通解为 $\displaystyle\int \frac{X(x)}{X_1(x)}\,\mathrm{d}\,x + \int \frac{Y(y)}{Y_1(y)}\,\mathrm{d}\,y = C$，$C$ 为任意常数。

若 $X_1(a) = 0$，则 $x = a$ 是一个特解。

若 $Y_1(b) = 0$，则 $y = b$ 是一个特解。

例 1.4. 求解微分方程：$y' = \dfrac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$。

解. 显然 $y=0$ 是特解。

若 $y\neq 0$，则 $y^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}y=\dfrac{3}{2}\mathrm{d}x$，从而得到通解为 $y^{\frac{2}{3}}=x+C$。 □

但事实上通解只是所有解微不足道的一部分。