随手译的 Folland

屑作

作者：Xuxuayame

组织：Xuxuayame Advanced Institute

时间：August 8, 2022

版本：0.1

Illustrator：しぐれうい

Muaaaaaaaaaaaaaa

目录

第 1 章 序章

这一章的目的是引入建立起贯穿全书的记号与术语，并展示一些之后要用到的集合论和分析中的结论。这章会故意写的比较简练，因为比起系统的讲述，它倾向于充当一个引用的存在。

1.1 集合论的语言

这里假设读者已熟悉集合论的基本概念，接下来的讨论主要是为了确保我们的术语。

数系：我们对基本数系的记号如下：

- $\mathbb{N}$ = 所有的正整数
- $\mathbb{Z}$ = 所有的整数
- $\mathbb{Q}$ = 所有的有理数
- $\mathbb{R}$ = 所有的实数
- $\mathbb{C}$ = 所有的复数

逻辑：我们应当避免使用数学逻辑中的特别记号，而偏向于尽可能地使用日常语言。不过我们仍然使用"iff"来表示"if and only if"。

学生经常不能充分理解的一个基础逻辑的要点是：若 A 和 B 为命题而 $-A, -B$ 为其否定，则命题"A 蕴含 B"逻辑等价于其逆否命题"$-B$ 蕴含 $-A$"。因此我们要证明 A 蕴含 B，可以通过假设 $-B$ 为真，导出 $-A$ 为真，这也是我们经常干的事。这和*归谬法 (Reductio ad absurdum)* 并不一样，后者同时假设 A 与 $-B$ 为真并以此导出矛盾。

集合：出于避免使用诸如"集合的集合"的表述的缘故，"*族 (Family)*"和"*收集 (Collection)*"这两个词用起来和"*集合 (Set)*"一个意思。空集记作 $\varnothing$，集合 X 的全体子集构成的集族记为 $\mathcal{P}(X)$：

$$\mathcal{P}(X) = \{E \mid E \subset X\}$$

这里和其他某些地方所采用的包含记号 $\subset$ 解释为较弱的含义，也就是说，命题"$E \subset X$"包含 $E = X$ 的可能性。

若 $\mathcal{E}$ 为集族，我们可以得到其元素的并与交：

$$\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E = \{x \mid \exists\, E,\ x \in E\},$$

$$\bigcap_{E \in \mathcal{E}} E = \{x \mid \forall\, E,\ x \in E\}$$

往往考虑带指标的集族更为方便：

$$\mathcal{E} = \{E_\alpha \mid \alpha \in A\} = \{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

这样，交和并记为：

$$\bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha, \quad \bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha$$

若只要 $\alpha \neq \beta$ 就有 $E_\alpha \cap E_\beta = \varnothing$，则称这些集合是不交的 *(Disjoint)*。就像“集合的不交并”和“不交集合的并”可以相互替换，“集合的不交收集”和“不交集合的收集”也可以相互替换。

当考虑以 $\mathbb{N}$ 为指标集的集族时，我们常用的记号为

$$\{E_n\}_{n=1}^\infty \quad 或 \quad \{E_n\}_1^\infty$$

以及类似对于交和并。这种情况下，上极限与下极限 *(Limit superior and limit inferior)* 的记号往往是有用的：

$$\limsup E_n = \bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{n=k}^\infty E_n, \quad \liminf E_n = \bigcup_{k=1}^\infty \bigcap_{n=k}^\infty E_n$$

读者可以自行验证

$$\limsup E_n = \{x \mid x \in E_n 对无限多\ n\ 成立\}$$

$$\liminf E_n = \{x \mid x \in E_n 对有限多\ n\ 不成立\}$$

若 E 和 F 为集合，我们记它们的差集 *(Difference)* 为 $E \setminus F$：

$$E \setminus F = \{x \mid x \in E 且 x \notin F\}$$

以及它们的对称差集 *(Symmetric difference)* 为：

$$E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$$

如果我们很清楚在问题中所有的集合均为一个给定集合 X 的子集，那么我们定义 E(在 X 中) 的补集 *(Complement)*E^c：

$$E^c = X \setminus E$$

这种情况下我们有德摩根律 *(deMorgan's laws)*：

$$(\bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha^c, \quad (\bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha^c$$

若 X 和 Y 为集合，它们的笛卡尔积 *(Cartesian product)*$X \times Y$ 为所有有序对 (x, y) 组成的集合，这里 $x \in X$，$y \in Y$。从 X 到 Y 的一个关系 *(Relation)* 是 $X \times Y$ 的子集 (如果 $Y = X$，我们称其为 X 上的关系)。若 R 是一个从 X 到 Y 的关系，我们应当用 xRy 来表示 $(x, y) \in R$。最重要的关系的种类如下：

- 等价关系。我们称 X 上的关系 R 为等价关系 *(Equivalence relation)* 如果其满足：

$$xRx,\ x \in X$$

$$xRy \Leftrightarrow yRx$$

$$(xRy) \wedge (yRz) \Rightarrow (xRz)$$

我们称 $\{y\in X\mid yRx\}$ 为元素 x 所在的等价类 *(Equivalence class)*。X 是所有等价类的不交并。

- 序关系。见 §1.2。
- 映射。一个映射 $f:X\to Y$ 是一个从 X 到 Y 的关系 R，且满足对任意 $x\in X$ 有唯一的 $y\in Y$ 使得 xRy，这种情况下记 $y=f(x)$。映射有时也称为函数。当 Y 为 $\mathbb{C}$ 或其子集时我们应当采用后者称谓。

若 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to Z$ 为映射，我们记其复合 *(Composition)*$g\circ f$ 为:

$$g\circ f:X\to Z,\quad g\circ f(x)=g(f(x))$$

若 $D\subset X$ 且 $E\subset Y$，我们定义在映射 $f:X\to Y$ 下，D 的像 *(Image)* 与 E 的逆像 *(Inverse image)* 为:

$$f(D)=\{f(x)\mid x\in D\},\quad f^{-1}(E)=\{x\mid f(x)\in E\}$$

容易验证由第二个式子定义的映射 $f^{-1}:\mathcal{P}(Y)\to\mathcal{P}(X)$ 与交并补交换:

$$f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in A}E_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in A}f^{-1}(E_\alpha),\quad f^{-1}(\bigcap_{\alpha\in A}E_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in A}f^{-1}(E_\alpha),$$
$$f^{-1}(E^c)=(f^{-1}(E))^c$$

(直接的像映射 $f:\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(Y)$ 与并交换，但一般来说与交和补不交换。)

若 $f:X\to Y$ 为映射，X 称为 f 的定义域 *(Domain)*，$f(X)$ 称为 f 的值域 *(Range)*。我们称 f 为单射 *(Injective)* 如果 $f(x_1)=f(x_2)$ 当且仅当 $x_1=x_2$，称 f 为满射 *(Surjective)* 如果 $f(X)=Y$，称 f 为双射 *(Bijective)* 若 f 既为单射又为满射。若 f 为双射，则其有逆 $f^{-1}:Y\to X$ 满足 $f^{-1}\circ f$ 和 $f\circ f^{-1}$ 分别为 X 和 Y 上的恒等映射。若 $A\subset X$，我们记 f 对 A 的限制 *(Restriction)* 为 $f|A$:

$$(f|A):A\to Y,\quad (f|A)(x)=f(x),\ x\in A$$

集合 X 中的序列 *(Sequence)* 是一个从 $\mathbb{N}$ 到 X 的映射。(我们也用词语有穷序列 *(Finite sequence)* 来表示从 $\{1,\cdots,n\}$ 到 X 的映射，这里 $n\in\mathbb{N}$)。如果 $f:\mathbb{N}\to X$ 为序列，$g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 满足 $g(n)<g(m)$ 对一切 $n<m$ 成立。则复合映射 $f\circ g$ 称为 f 的子列 *(Subsequence)*。通常来说，也是方便来讲，无需区分序列与其值域，即配有指标集 $\mathbb{N}$ 的 X 的子集。因此，若 $f(n)=x_n$，我们记为 $\{x_n\}_1^\infty$，从上下文可以看出我们到底指的是一个从 $\mathbb{N}$ 到 X 的映射还是一个 X 的子集。

之前我们定义了两个集合的笛卡尔积。类似地我们可以通过n 元有序对 *(Ordered n-tuples)* 来定义 n 个集合的笛卡尔积。然而，这种定义面对无限集族时就显得很别扭，因此我们转而采取了下面的做法。若 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 为指标集族，则它们的笛卡尔积 $\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$ 为所有映射 $f:A\to\bigcup_{\alpha\in A}X_\alpha$ 组成的集合，且 f 满足 $f(\alpha)\in X_\alpha$ 对每一个 $\alpha\in A$ 均成立。(值得一提但应迅速忘记的是，当 $A=\{1,2\}$ 时，前面的定义 $X_1\times X_2$ 在集合论上是不同于现在的定义 $\prod_1^2X_j$ 的。事实上，后者的定义建立在映射的基础上，而映射又是用前者来定义的。) 若 $X=\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$ 且 $\alpha\in A$，我们定义第 α 个投影 *(Projection)* 或坐标映射 *(Coordinate map)*$\pi_\alpha:X\to X_\alpha$ 为

$\pi_\alpha(f)=f(\alpha)$。我们也常常用 x 和 x_α 来替代 f 和 $f(\alpha)$，并称 x_α 为 x 的第 α 个坐标。

若集合 X_α 均相等于给定集合 Y，我们记 $\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$ 为 Y^A：

$$Y^A=\text{从 } A \text{ 到 } Y \text{ 的所有映射组成的集合}$$

若 $A=\{1,\cdots,n\}$，则记 Y^A 为 Y^n，并等同于 Y 的元素的 n 元有序对构成的集合。