Nonlinear equation

HYX

USTC

May 5, 2019

Outline

The nonlinear equations

$$
\begin{aligned}
i\dot{c}_n &= \frac{n^2 k_c^2}{2m} c_n + \frac{U_0|\alpha|^2}{4}\left(2c_n + c_{n-2} + c_{n+2}\right) + \frac{\eta(\alpha+\alpha^*)}{2}\left(c_{n-1} + c_{n+1}\right) \\
i\dot{\alpha}(t) &= -(\delta_c + i\kappa)\alpha(t) + \frac{U_0}{4}\sum_n \left(2c_n^* c_n + c_{n-2}^* c_n\right)\alpha(t) + \frac{\eta}{2}\sum_n c_{n-1}^* c_n
\end{aligned}
$$

- n 取截断 $[-n_c, n_c]$，共有 $2n_c + 1$ 个模式 + 一个腔场
- 考虑实部和虚部，共有 $2(2n_c + 2)$ 个方程
- 但是，实部和虚部是没有具体物理意义的

$$c_j = \sqrt{n_j} e^{i\theta_j}$$

- 方程有一个守恒量 $\sum_j n_j = 1$
- 整体相位也可以去掉一个自由度
- 独立的方程个数:$4n_c + 2$

The problem

$$
\begin{aligned}
\frac{\dot{n}_j}{2\sqrt{n_j}} &= \frac{U_0}{4} n_a \left[\sqrt{n_{j-2}}\sin(\theta_{j-2}-\theta_j) + \sqrt{n_{j+2}}\sin(\theta_{j+2}-\theta_j)\right] \\
&\quad +\eta\cos\theta_a\sqrt{n_a}\left[\sqrt{n_{j-1}}\sin(\theta_{j-1}-\theta_j) + \sqrt{n_{j+1}}\sin(\theta_{j+1}-\theta_j)\right] \\
-\sqrt{n_j}\dot{\theta}_j &= \frac{U_0}{4} n_a \left[2\sqrt{n_j} + \sqrt{n_{j-2}}\cos(\theta_{j-2}-\theta_j) + \sqrt{n_{j+2}}\cos(\theta_{j+2}-\theta_j)\right] \\
&\quad +\eta\cos\theta_a\sqrt{n_a}\left[\sqrt{n_{j-1}}\cos(\theta_{j-1}-\theta_j) + \sqrt{n_{j+1}}\cos(\theta_{j+1}-\theta_j)\right]
\end{aligned}
$$

我们的问题是：求这个系统的不动点

- **可以验证** $\partial_t(\sum_j n_j) = 0$

$$\sum_j n_j - 1 = 0$$

- θ_j **和** n_j **都是实数**
- **如果求上面系统的不动点，用一般的方法** (**比如** Broyden)，**给定一个初值，它极有可能在某一步演化到** $n_j < 0$

$$c_j = x_j + iy_j$$

Nonlinear equations

$$c_j = x_j + iy_j$$

$$n_j = x_j^2 + y_j^2, \quad \theta_j = \arctan \frac{y_j}{x_j}$$

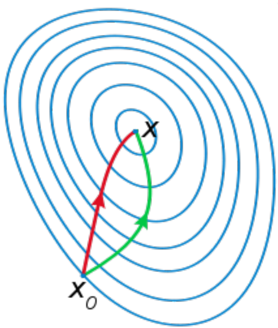
$$\dot{n}_j = 2x_j\dot{x}_j + 2y_j\dot{y}_j, \quad \dot{\theta}_j = \frac{x_j\dot{y}_j - \dot{x}_j y_j}{x_j^2 + y_j^2}$$

高斯牛顿法

求 $f(x)$ 的最小值问题，牛顿法化为

$$f'(x) = 0 \rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$$

一般认为牛顿法可以利用到曲线本身的信息，比梯度下降法更容易收敛（迭代更少次数）



红色是牛顿法，绿色是梯度下降法

对于高维问题

$$X_{n+1} = X_n - H_f(X_n)^{-1}\nabla f(x_n)$$

海赛矩阵 $$H_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

高斯牛顿法

$$\text{目标函数} \quad s(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i^2(x)$$

- 梯度

$$g_j = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 2\sum_{i=1}^{n} f_i J_{ij} \rightarrow g = 2J_f^{\mathrm{T}} f$$

- 海赛矩阵

$$H_{jk} = 2\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + f_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k} \right) \approx 2\sum_{i} J_{ij} J_{ik} \rightarrow H \approx 2J_f^{\mathrm{T}} J_f$$

得到高斯牛顿法的迭代公式

$$x_{s+1} = x_s + \Delta, \quad \Delta = -\left(J_f^{\mathrm{T}} J_f\right)^{-1} J_f^{\mathrm{T}} f$$

莱文贝格 - 马夸特方法（Levenberg–Marquardt algorithm）

$$x_{s+1} = x_s + \Delta, \quad \Delta = -\left(J_f^{\mathrm{T}} J_f + \lambda I\right)^{-1} J_f^{\mathrm{T}} f$$

相对于高斯牛顿法

- 通过 λ 控制步长
- 海赛矩阵没有逆时，高斯牛顿法无法进行
- 初值离极小值较远时

总结

- 高维非线性方程的求解
- 要满足一定的限制条件
- 求根和极小值
- 高斯牛顿法，莱文贝格-马夸特方法