机械能守恒定律及其应用

【目标要求】 1.会判断研究对象在某一过程机械能是否守恒.2.能应用机械能守恒定律解决具体问题.

考点一　机械能守恒的判断

■ 基础梳理　夯实必备知识

1．重力做功与重力势能的关系

(1)重力做功的特点

①重力做功与路径无关，只与始末位置的高度差有关.

②重力做功不引起物体机械能的变化.

(2)重力势能

①表达式：$E_p=mgh$.

②重力势能的特点

重力势能是物体和地球所共有的，重力势能的大小与参考平面的选取有关，但重力势能的变化与参考平面的选取无关.

(3)重力做功与重力势能变化的关系

重力对物体做正功，重力势能减小；重力对物体做负功，重力势能增大．即 $W_G=E_{p1}-E_{p2}=-\Delta E_p$.

2．弹性势能

(1)定义：发生弹性形变的物体之间，由于有弹力的相互作用而具有的势能.

(2)弹力做功与弹性势能变化的关系：

弹力做正功，弹性势能减小；弹力做负功，弹性势能增加．即 $W=-\Delta E_p$.

3．机械能守恒定律

(1)内容：在只有重力或弹力做功的物体系统内，动能与势能可以互相转化，而总的机械能保持不变.

(2)表达式：$mgh_1+\frac{1}{2}mv_1^2=mgh_2+\frac{1}{2}mv_2^2$.

■ 判断正误 ■

1．物体所受的合外力为零，物体的机械能一定守恒．(　×　)

2．物体做匀速直线运动，其机械能一定守恒．(　×　)

3．物体的速度增大时，其机械能可能减小．(　√　)

■ 方法技巧　提升关键能力

机械能是否守恒的三种判断方法

(1)利用机械能的定义判断：若物体动能、势能之和不变，则机械能守恒．

(2)利用做功判断：若物体或系统只有重力(或弹簧的弹力)做功，虽受其他力，但其他力不做功(或做功代数和为 0)，则机械能守恒．

(3)利用能量转化判断：若物体或系统与外界没有能量交换，物体或系统也没有机械能与其他形式能的转化，则机械能守恒．

【例 1】　忽略空气阻力，下列物体运动过程中满足机械能守恒的是(　　)

A．电梯匀速下降

B．物体由光滑斜面顶端滑到斜面底端

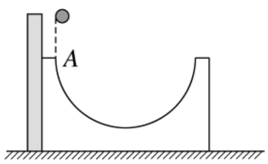
C．物体沿着斜面匀速下滑

D．拉着物体沿光滑斜面匀速上升

答案　B

解析　电梯匀速下降，说明电梯处于受力平衡状态，并不是只有重力做功，机械能不守恒，所以 A 错误；物体在光滑斜面上，受重力和支持力的作用，但是支持力的方向和物体位移的方向垂直，支持力不做功，只有重力做功，机械能守恒，所以 B 正确；物体沿着斜面匀速下滑，物体处于受力平衡状态，摩擦力和重力都要做功，机械能不守恒，所以 C 错误；拉着物体沿光滑斜面匀速上升，物体处于受力平衡状态，拉力和重力都要做功，机械能不守恒，所以 D 错误．

【例 2】　(多选)如图所示，将一个内外侧均光滑的半圆形槽置于光滑的水平面上，槽的左侧有一固定的竖直墙壁(不与槽粘连)．现让一小球自左端槽口 A 点的正上方由静止开始下落，从 A 点与半圆形槽相切进入槽内，则下列说法正确的是(　　)



A．小球在半圆形槽内运动的全过程中，只有重力对它做功

B．小球从 A 点向半圆形槽的最低点运动的过程中，小球的机械能守恒

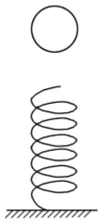
C．小球从 A 点经最低点向右侧最高点运动的过程中，小球与半圆形槽组成的系统机械能守恒

D．小球从下落到从右侧离开半圆形槽的过程中，机械能守恒

答案　BC

解析　当小球从半圆形槽的最低点运动到半圆形槽右侧的过程中小球对半圆形槽的力使半圆形槽向右运动，半圆形槽对小球的支持力对小球做负功，小球的机械能不守恒，A、D 错误；小球从 A 点向半圆形槽的最低点运动的过程中，半圆形槽静止，则只有重力做功，小球的机械能守恒，B 正确；小球从 A 点经最低点向右侧最高点运动的过程中，小球与半圆形槽组成的系统只有重力做功，机械能守恒，C 正确．

【例 3】 如图所示，小球从高处下落到竖直放置的轻弹簧上，弹簧一直保持竖直，空气阻力不计，那么小球从接触弹簧开始到将弹簧压缩到最短的过程中，下列说法中正确的是(　　)



A．小球的动能一直减小

B．小球的机械能守恒

C．克服弹力做功大于重力做功

D．最大弹性势能等于小球减少的动能

答案　C

解析　小球开始下落时，只受重力作用做加速运动，当与弹簧接触时，受到弹簧弹力作用，开始时弹簧压缩量小，因此重力大于弹力，速度增大，随着弹簧压缩量的增加，弹力增大，当重力等于弹力时，速度最大，然后弹簧继续被压缩，弹力大于重力，小球开始做减速运动，所以整个过程中小球加速后减速，根据 $E_k=\frac{1}{2}mv^2$，动能先增大然后减小，故 A 错误；在向下运动的过程中，小球受到的弹力对它做负功，小球的机械能不守恒，故 B 错误；在向下运动过程中，重力势能减小，最终小球的速度为零，动能减小，弹簧的压缩量增大，弹性势能增大，根据能量守恒定律，最大弹性势能等于小球减少的动能和减小的重力势能之和，即克服弹力做功大于重力做功，故 D 错误，C 正确．

考点二　机械能守恒定律的应用

1．表达式

三种形式：
- 守恒观点 → $E_1=E_2$ → 要选零势能参考平面
- 转化观点 → $\Delta E_k=-\Delta E_p$ → 不用选零势能参考平面
- 转移观点 → $\Delta E_A=-\Delta E_B$ → 不用选零势能参考平面

2．应用机械能守恒定律解题的一般步骤

选取研究对象 —— 研究对象可以是单个物体，也可以是多个物体组成的系统

⇩

对其受力分析 —— 分析研究对象在运动过程中的受力情况、明确各力的做功情况，判断机械能是否守恒

⇩

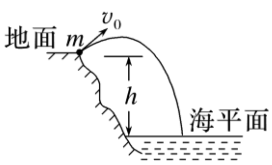
列方程 —— $E_1=E_2$；$\Delta E_k=-\Delta E_p$；$\Delta E_A=-\Delta E_B$ ⇨ 三选一，根据题目特点，灵活选用公式

⇩

解方程 —— 必要时应对结果进行分析，杜绝出现与实际不符的情形

考向 1　单物体机械能守恒

【例 4】 (多选)如图所示，在地面上以速度 v_0 抛出质量为 m 的物体，抛出后物体落到比地面低 h 的海平面上，若以地面为参考平面且不计空气阻力，重力加速度为 g，则下列说法中正确的是(　　)



A．物体落到海平面时的重力势能为 mgh

B．物体从抛出到落到海平面的过程重力对物体做功为 mgh

C．物体在海平面上的动能为$\frac{1}{2}mv_0^2+mgh$

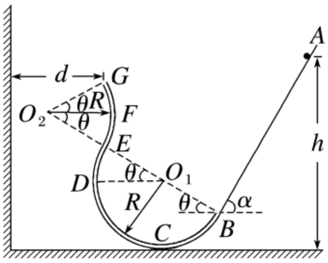
D．物体在海平面上的机械能为$\frac{1}{2}mv_0^2$

答案　BCD

解析　物体运动过程中，机械能守恒，所以在任意一点的机械能均相等，都等于抛出时的机械能，物体在地面上的重力势能为零，动能为$\frac{1}{2}mv_0^2$，故整个过程中的机械能均为$\frac{1}{2}mv_0^2$，所

以物体在海平面上的机械能为$\frac{1}{2}mv_0^2$，在海平面上的重力势能为$-mgh$，根据机械能守恒定律可得$-mgh+\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv_0^2$，所以物体在海平面上的动能为$\frac{1}{2}mv_0^2+mgh$，从抛出到落到海平面，重力做功为$mgh$，所以B、C、D正确．

【例5】 (2021·浙江1月选考·20改编)如图所示，竖直平面内由倾角$\alpha=60°$的斜面轨道AB、半径均为R的半圆形细圆管轨道$BCDE$和$\frac{1}{6}$圆周细圆管轨道EFG构成一游戏装置固定于地面，B、E两处轨道平滑连接，轨道所在平面与竖直墙面垂直．轨道出口处G和圆心O_2的连线，以及O_2、E、O_1和B等四点连成的直线与水平线间的夹角均为$\theta=30°$，G点与竖直墙面的距离$d=\sqrt{3}R$.现将质量为m的小球从斜面的某高度h处静止释放．小球只有与竖直墙面间的碰撞可视为弹性碰撞，不计小球大小和所受阻力．



(1)若释放处高度$h=h_0$，当小球第一次运动到圆管最低点C时，求速度大小v_C；

(2)求小球在圆管内与圆心O_1点等高的D点所受弹力F_N与h的关系式；

(3)若小球释放后能从原路返回到出发点，高度h应该满足什么条件？

答案 见解析

解析 (1)从A到C，小球的机械能守恒，有

$$mgh_0=\frac{1}{2}mv_C^2$$

可得$v_C=\sqrt{2gh_0}$

(2)小球从A到D，由机械能守恒定律有

$$mg(h-R)=\frac{1}{2}mv_D^2$$

根据牛顿第二定律有$F_N=\frac{mv_D^2}{R}$

联立可得$F_N=2mg(\frac{h}{R}-1)$

满足的条件$h\geqslant R$

(3)第 1 种情况：不滑离轨道原路返回，由机械能守恒定律可知，此时 h 需满足的条件是

$h\leqslant R+3R\sin\theta=\frac{5}{2}R$

第 2 种情况：小球与墙面垂直碰撞后原路返回，

小球与墙面碰撞后，进入 G 前做平抛运动，则

$v_xt=v_x\frac{v_y}{g}=d$，其中 $v_x=v_G\sin\theta$，$v_y=v_G\cos\theta$

故有 $v_G\sin\theta\cdot\frac{v_G\cos\theta}{g}=d$

可得 $v_G=2\sqrt{gR}$

由机械能守恒定律有 $mg(h-\frac{5}{2}R)=\frac{1}{2}mv_G^2$

可得 $h=\frac{9}{2}R$.

考向 2　不含弹簧的系统机械能守恒问题

1．解决多物体系统机械能守恒的注意点

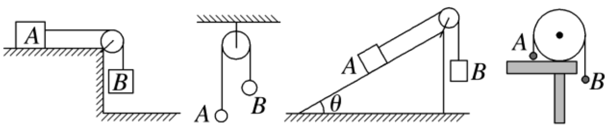
(1)对多个物体组成的系统，要注意判断物体运动过程中系统的机械能是否守恒．一般情况为：不计空气阻力和一切摩擦，系统的机械能守恒．

(2)注意寻找用绳或杆相连接的物体间的速度关系和位移关系．

(3)列机械能守恒方程时，一般选用 $\Delta E_k=-\Delta E_p$ 或 $\Delta E_A=-\Delta E_B$ 的形式．

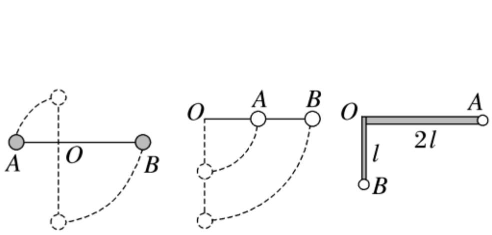
2．几种实际情景的分析

(1)速率相等情景



注意分析各个物体在竖直方向的高度变化．

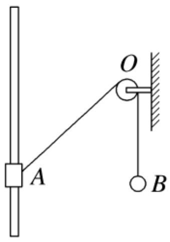
(2)角速度相等情景

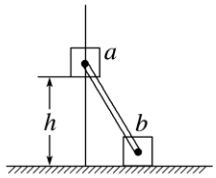


①杆对物体的作用力并不总是沿杆的方向，杆能对物体做功，单个物体机械能不守恒．

②由 $v=\omega r$ 知，v 与 r 成正比．

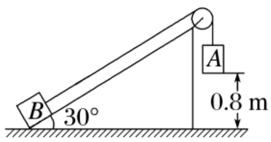
(3)某一方向分速度相等情景(关联速度情景)





两物体速度的关联实质：沿绳(或沿杆)方向的分速度大小相等.

【例 6】　质量均为 m 的物体 A 和 B 分别系在一根不计质量的细绳两端，绳子跨过固定在倾角为 30°的斜面顶端的定滑轮上，斜面固定在水平地面上，开始时把物体 B 拉到斜面底端，这时物体 A 离地面的高度为 0.8 m，如图所示. 若摩擦力均不计，从静止开始放手让它们运动. (斜面足够长，物体 A 着地后不反弹，g 取 10 m/s^2)求：



(1)物体 A 着地时的速度大小；

(2)物体 A 着地后物体 B 继续沿斜面上滑的最大距离.

答案　(1)2 m/s　(2)0.4 m

解析　(1)以地面为参考平面，

A、B 系统机械能守恒，

根据机械能守恒定律有 $mgh=mgh\sin 30°+\frac{1}{2}mv_A^2+\frac{1}{2}mv_B^2$

因为 $v_A=v_B$，

所以 $v_A=v_B=2$ m/s.

(2)A 着地后，B 机械能守恒，

则 B 上升到最大高度过程中，

有$\frac{1}{2}mv_B^2=mg\Delta s\sin 30°$

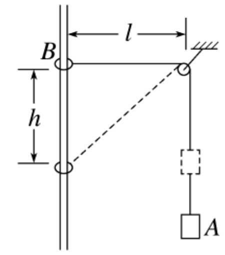
解得 $\Delta s=0.4$ m.

方法点拨

多个物体组成的系统，应用机械能守恒时，先确定系统中哪些能量增加、哪些能量减少，再用 $\Delta E_{增}=\Delta E_{减}$(系统内一部分增加的机械能和另一部分减少的机械能相等)解决问题.

【例 7】　如图所示，物体 A 的质量为 M，圆环 B 的质量为 m，由绳子通过定滑轮连接在一起，圆环套在光滑的竖直杆上．开始时连接圆环的绳子水平，长度 $l=4$ m．现从静止释放圆环，

不计定滑轮和空气的阻力，g 取 10 m/s².若圆环下降 h=3 m 时的速度 v=5 m/s，则 A 和 B 的质量关系为(　　)

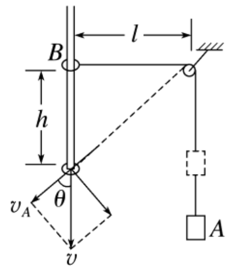


A.$\frac{M}{m}=\frac{35}{29}$　　　　B.$\frac{M}{m}=\frac{7}{9}$

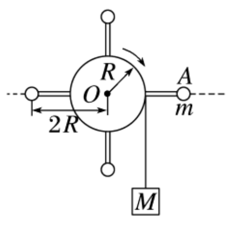
C.$\frac{M}{m}=\frac{39}{25}$　　　　D.$\frac{M}{m}=\frac{15}{19}$

答案　A

解析　圆环下降 3 m 后的速度可以按如图所示分解，故可得 $v_A=v\cos\theta=\frac{vh}{\sqrt{h^2+l^2}}$，$A$、$B$ 和绳子看成一个整体，整体只有重力做功，机械能守恒，当圆环下降 $h=3$ m 时，根据机械能守恒定律可得 $mgh=Mgh_A+\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}Mv_A^2$，其中 $h_A=\sqrt{h^2+l^2}-l$，联立可得$\frac{M}{m}=\frac{35}{29}$，故 A 正确.



【例 8】　(2020·江苏卷·15)如图所示，鼓形轮的半径为 R，可绕固定的光滑水平轴 O 转动．在轮上沿相互垂直的直径方向固定四根直杆，杆上分别固定有质量为 m 的小球，球与 O 的距离均为 $2R$.在轮上绕有长绳，绳上悬挂着质量为 M 的重物．重物由静止下落，带动鼓形轮转动．重物落地后鼓形轮匀速转动，转动的角速度为 ω.绳与轮之间无相对滑动，忽略鼓形轮、直杆和长绳的质量，不计空气阻力，重力加速度为 g.求：



(1)重物落地后，小球线速度的大小 v；

(2)重物落地后一小球转到水平位置 A，此时该球受到杆的作用力的大小 F；

(3)重物下落的高度 h.

答案　(1)$2\omega R$　(2)$\sqrt{(2m\omega^2R)^2+(mg)^2}$　(3)$\dfrac{M+16m}{2Mg}(\omega R)^2$

解析　(1)重物落地后，小球线速度大小 $v=\omega r=2\omega R$

(2)向心力 $F_n=2m\omega^2R$

设 F 与水平方向的夹角为 α，则

$F\cos\alpha=F_n$

$F\sin\alpha=mg$

解得 $F=\sqrt{(2m\omega^2R)^2+(mg)^2}$

(3)落地时，重物的速度 $v'=\omega R$

由机械能守恒定律得$\dfrac{1}{2}Mv'^2+4\times\dfrac{1}{2}mv^2=Mgh$

解得 $h=\dfrac{M+16m}{2Mg}(\omega R)^2$.

考向3　含弹簧的系统机械能守恒问题

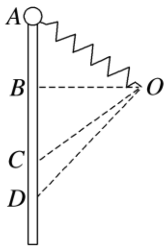
1．通过其他能量求弹性势能

根据机械能守恒，列出方程，代入其他能量的数值求解．

2．对同一弹簧，弹性势能的大小由弹簧的形变量决定，弹簧伸长量和压缩量相等时，弹簧弹性势能相等．

3．物体运动的位移与弹簧的形变量或形变量的变化量有关．

【例9】 (多选)如图所示，一根轻弹簧一端固定在 O 点，另一端固定一个带有孔的小球，小球套在固定的竖直光滑杆上，小球位于图中的 A 点时，弹簧处于原长，现将小球从 A 点由静止释放，小球向下运动，经过与 A 点关于 B 点对称的 C 点后，小球能运动到最低点 D 点，OB 垂直于杆，则下列结论正确的是(　　)



A．小球从 A 点运动到 D 点的过程中，其最大加速度一定大于重力加速度 g

B．小球从 B 点运动到 C 点的过程，小球的重力势能和弹簧的弹性势能之和可能增大

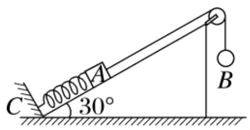
C．小球运动到 C 点时，重力对其做功的功率最大

D．小球在 D 点时弹簧的弹性势能一定最大

答案　AD

解析　在 B 点时，小球的加速度为 g，在 BC 间弹簧处于压缩状态，小球在竖直方向除受重力外还有弹簧弹力沿竖直方向向下的分力，所以小球从 A 点运动到 D 点的过程中，其最大加速度一定大于重力加速度 g，故 A 正确；由机械能守恒定律可知，小球从 B 点运动到 C 点的过程，小球做加速运动，即动能增大，所以小球的重力势能和弹簧的弹性势能之和一定减小，故 B 错误；小球运动到 C 点时，由于弹簧的弹力为零，合力为重力 G，所以小球从 C 点往下还会加速一段，所以小球在 C 点的速度不是最大，即重力的功率不是最大，故 C 错误；D 点为小球运动的最低点，即速度为零，弹簧形变量最大，所以小球在 D 点时弹簧的弹性势能最大，故 D 正确．

【例 10】　如图所示，在倾角为 $\theta=30°$的光滑斜面上，一劲度系数为 $k=200$ N/m 的轻质弹簧一端固定在挡板 C 上，另一端连接一质量为 $m=4$ kg 的物体 A，一轻细绳通过定滑轮，一端系在物体 A 上，另一端与质量也为 m 的物体 B 相连，细绳与斜面平行，斜面足够长，B 距地面足够高．用手托住物体 B 使绳子刚好伸直且没有拉力，然后由静止释放．取重力加速度 $g=10\ \text{m/s}^2$.求：



(1)弹簧恢复原长时细绳上的拉力大小；

(2)物体 A 沿斜面向上运动多远时获得最大速度；

(3)物体 A 的最大速度的大小．

答案　(1)30 N　(2)20 cm　(3)1 m/s

解析　(1)弹簧恢复原长时，

对 B：$mg-F_T=ma$

对 A：$F_T-mg\sin 30°=ma$

代入数据可求得：$F_T=30$ N.

(2)初态弹簧压缩量 $x_1=\dfrac{mg\sin 30°}{k}=10$ cm

当 A 速度最大时有 $F_T'=mg=kx_2+mg\sin 30°$

弹簧伸长量 $x_2=\dfrac{mg-mg\sin 30°}{k}=10\ \text{cm}$

所以 A 沿斜面向上运动 $x_1+x_2=20\ \text{cm}$ 时获得最大速度.

(3)因 $x_1=x_2$，

故弹簧弹性势能的改变量 $\Delta E_p=0$

由机械能守恒定律有

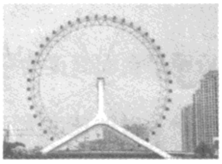
$mg(x_1+x_2)-mg(x_1+x_2)\sin 30°=\dfrac{1}{2}\times 2mv^2$

解得 $v=1\ \text{m/s}$.

课时精练

必备基础练

1.在大型游乐场里，小明乘坐如图所示匀速转动的摩天轮，正在向最高点运动．对此过程，下列说法正确的是(　　)



A．小明的重力势能保持不变

B．小明的动能保持不变

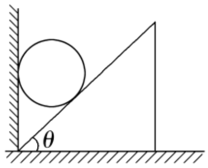
C．小明的机械能守恒

D．小明的机械能减少

答案　B

解析　摩天轮在转动的过程中，小明的高度不断发生变化，小明的重力势能也在发生变化，故 A 错误；由于摩天轮匀速转动，所以小明的动能保持不变，故 B 正确；小明所具有的机械能等于他的动能与重力势能之和，当其上升时，机械能增加，故 C、D 错误．

2.如图所示，斜劈劈尖顶着竖直墙壁静止在水平面上．现将一小球从图示位置静止释放，不计一切摩擦，则在小球从释放到落至地面的过程中，下列说法中正确的是(　　)



A．斜劈对小球的弹力不做功

B．斜劈与小球组成的系统机械能守恒

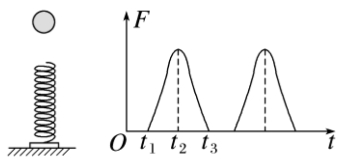
C．斜劈的机械能守恒

D．小球重力势能的减少量等于斜劈动能的增加量

答案　B

解析　不计一切摩擦，小球下滑时，小球和斜劈组成的系统只有小球的重力做功，系统机械能守恒，B 正确；斜劈动能增加，重力势能不变，故斜劈的机械能增加，C 错误；由系统机械能守恒可知，小球重力势能的减少量等于斜劈动能的增加量和小球动能的增加量之和，D 错误；斜劈对小球的弹力与小球位移的夹角大于 90°，故弹力做负功，A 错误．

3．(多选)如图甲所示，轻弹簧竖直固定在水平地面上，$t=0$ 时刻，将一金属小球从弹簧正上方某一高度处由静止释放，小球落到弹簧上压缩弹簧到最低点，然后又被弹起离开弹簧，上升到一定高度后再下落，　如此反复过程中弹簧的弹力大小 F 随时间 t 的变化关系如图乙所示．不计空气阻力，则(　　)



甲　　乙

A．t_1时刻小球的速度最大

B．t_2时刻小球所受合力为零

C．以地面为零重力势能面，t_1和 t_3时刻小球的机械能相等

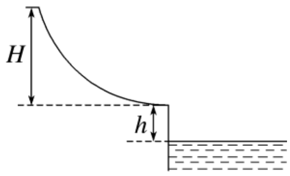
D．以地面为零重力势能面，t_1至 t_3时间内小球的机械能先减小后增加

答案　CD

解析　t_1 时刻小球刚与弹簧接触，与弹簧接触后，先做加速度不断减小的加速运动，当弹力增大到与重力相等时，加速度减为零，此时速度达到最大，故 A 错误；t_2时刻，弹力最大，故弹簧的压缩量最大，小球运动到最低点，速度等于零，加速度竖直向上，故 t_2时刻小球所受合力不为零，故 B 错误；以地面为零重力势能面，t_1和 t_3时刻弹力为零，则弹簧处于原长，弹性势能为零，则在这两个时刻小球的机械能相等，故 C 正确；以地面为零重力势能面，t_1至 t_3时间内，弹簧的长度从原长到压缩至最短又回到原长，则弹性势能先增大后减小，根据小球和弹簧组成的系统机械能守恒，可知小球的机械能先减小后增大，故 D 正确．

4．(2021·海南卷·2)水上乐园有一末段水平的滑梯，人从滑梯顶端由静止开始滑下后落入水

中．如图所示，滑梯顶端到末端的高度 H＝4.0 m，末端到水面的高度 h＝1.0 m．取重力加速度 g＝10 m/s^2，将人视为质点，不计摩擦和空气阻力．则人的落水点到滑梯末端的水平距离为(　　)

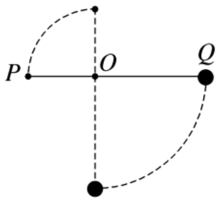


A．4.0 m　B．4.5 m　C．5.0 m　D．5.5 m

答案　A

解析　人从滑梯由静止滑到滑梯末端速度为 v，根据机械能守恒定律可知 $mgH=\frac{1}{2}mv^2$，解得 $v=4\sqrt{5}$ m/s，从滑梯末端水平飞出后做平抛运动，竖直方向做自由落体运动，根据 $h=\frac{1}{2}gt^2$ 可知 $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{\frac{2\times1.0}{10}}$ s $=\sqrt{\frac{1}{5}}$ s，水平方向做匀速直线运动，则人的落水点距离滑梯末端的水平距离为 $x=vt=4\sqrt{5}\times\sqrt{\frac{1}{5}}$ m $=4.0$ m，故选 A.

5．质量分别为 m 和 $2m$ 的两个小球 P 和 Q，中间用轻质杆固定连接，杆长为 L，在离 P 球$\frac{1}{3}$处有一个光滑固定转轴 O，如图所示．现在把杆置于水平位置后自由释放，Q 球顺时针摆动到最低位置，则(重力加速度为 g)(　　)



A．小球 P 在最高位置的速度大小为$\frac{\sqrt{gl}}{3}$

B．小球 Q 在最低位置的速度大小为$\sqrt{\frac{2gl}{3}}$

C．小球 P 在此过程中机械能增加量为$\frac{4}{9}mgL$

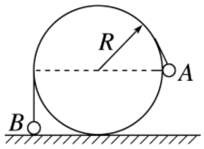
D．小球 Q 在此过程中机械能减少$\frac{2}{3}mgl$

答案　C

解析　Q 球顺时针摆动到最低位置时的速度为 v_1，此时 P 运动到最高点的速度为 v_2，整个系统机械能守恒，有 $2mg\times\frac{2}{3}L-mg\times\frac{L}{3}=\frac{1}{2}\times2mv_1^2+\frac{1}{2}mv_2^2$，又由于两球都绕 O 点转动，角速度

相同，因此 $v_1=2v_2$，解得 $v_1=\frac{2\sqrt{2gL}}{3}$，$v_2=\frac{\sqrt{2gL}}{3}$，A、B 错误；在此过程中，小球 P 机械能增加量 $\Delta E=mg\times\frac{L}{3}+\frac{1}{2}mv_2{}^2=\frac{4}{9}mgL$，由于整个系统机械能守恒，因此小球 Q 机械能减少量也为$\frac{4}{9}mgL$，C 正确，D 错误．

6．如图所示，可视为质点的小球 A、B 用不可伸长的细软轻线连接，跨过固定在地面上、半径为 R 的光滑圆柱，A 的质量为 B 的两倍．当 B 位于地面上时，A 恰与圆柱轴心等高．将 A 由静止释放，B 上升的最大高度是(　　)



A．$2R$　　　　B.$\frac{5R}{3}$

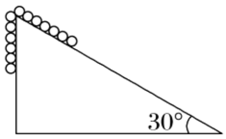
C.$\frac{4R}{3}$　　　　D.$\frac{2R}{3}$

答案　C

解析　设 B 球的质量为 m，则 A 球的质量为 $2m$，A 球刚落地时，两球速度大小都为 v，根据机械能守恒定律得 $2mgR=\frac{1}{2}\times(2m+m)v^2+mgR$，$B$ 球继续上升的过程由动能定理可得 $-mgh=0-\frac{1}{2}mv^2$，联立解得 $h=\frac{R}{3}$，B 球上升的最大高度为 $h+R=\frac{4}{3}R$，故选 C.

能力综合练

7.(2022·武汉东湖区联考)如图所示，有一条长为 $L=1$ m 的均匀金属链条，有一半在光滑的足够高的斜面上，斜面顶端是一个很小的圆弧，斜面倾角为 30°，另一半竖直下垂在空中，当链条从静止开始释放后链条滑动，则链条刚好全部滑出斜面时的速度为(g 取 10 m/s²)(　　)



A．2.5 m/s　　　　B.$\frac{5\sqrt{2}}{2}$ m/s

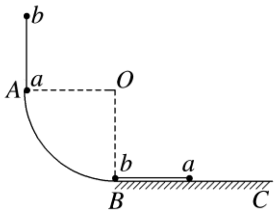
C.$\sqrt{5}$ m/s　　　　D.$\frac{\sqrt{35}}{2}$ m/s

答案　A

解析　设链条的质量为 $2m$，以开始时链条的最高点为零势能面，链条的机械能为 $E=-\frac{1}{2}$

$\times 2mg\cdot\frac{L}{4}\sin\ 30° - \frac{1}{2}\times 2mg\cdot\frac{L}{4} = -\frac{3}{8}mgL$，链条全部滑出后，动能为 $E_k' = \frac{1}{2}\times 2mv^2$，重力势能为 $E_p' = -2mg\cdot\frac{L}{2}$，由机械能守恒定律可得 $E = E_k' + E_p'$，即 $-\frac{3}{8}mgL = mv^2 - mgL$，解得 $v = 2.5$ m/s，故 A 正确，B、C、D 错误．

8.如图所示，有一光滑轨道 ABC，AB 部分为半径为 R 的$\frac{1}{4}$圆弧，BC 部分水平，质量均为 m 的小球 a、b 固定在竖直轻杆的两端，轻杆长为 R，小球可视为质点，开始时 a 球处于圆弧上端 A 点，由静止开始释放小球和轻杆，使其沿光滑弧面下滑，重力加速度为 g，下列说法正确的是(　　)



A．a 球下滑过程中机械能保持不变

B．b 球下滑过程中机械能保持不变

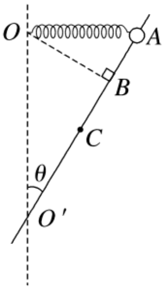
C．a、b 球都滑到水平轨道上时速度大小均为$\sqrt{2gR}$

D．从释放 a、b 球到 a、b 球都滑到水平轨道上，整个过程中轻杆对 a 球做的功为$\frac{1}{2}mgR$

答案　D

解析　对于单个小球来说，杆的弹力做功，小球机械能不守恒，A、B 错误；两个小球组成的系统只有重力做功，所以系统的机械能守恒，故有 $mgR + mg(2R) = \frac{1}{2}\cdot 2mv^2$，解得 $v = \sqrt{3gR}$，选项 C 错误；a 球在滑落过程中，杆对小球做功，重力对小球做功，故根据动能定理可得 $W + mgR = \frac{1}{2}mv^2$，联立 $v = \sqrt{3gR}$，解得 $W = \frac{1}{2}mgR$，故 D 正确．

9.(多选)如图所示，质量为 M 的小球套在固定倾斜的光滑杆上，原长为 l_0 的轻质弹簧一端固定于 O 点，另一端与小球相连，弹簧与杆在同一竖直平面内．图中 AO 水平，BO 间连线长度恰好与弹簧原长相等，且与杆垂直，O' 在 O 的正下方，C 是 AO' 段的中点，$\theta=30°$.现让小球从 A 处由静止释放，重力加速度为 g，下列说法正确的有(　　)



A．下滑过程中小球的机械能守恒

B．小球滑到 B 点时的加速度大小为$\frac{\sqrt{3}}{2}g$

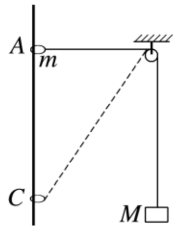
C．小球下滑到 B 点时速度最大

D．小球下滑到 C 点时的速度大小为$\sqrt{2gl_0}$

答案　BD

解析　下滑过程中小球的机械能会与弹簧的弹性势能相互转化，因此小球的机械能不守恒，故 A 错误；因为在 B 点，弹簧恢复原长，因此重力沿杆的分力提供加速度，根据牛顿第二定律可得 $mg\cos 30°=ma$，解得 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}g$，故 B 正确；到达 B 点时加速度与速度方向相同，因此小球还会加速，故 C 错误；因为 C 是 AO' 段的中点，$\theta=30°$，所以当小球到 C 点时，弹簧的长度与在 A 点时相同，故在 A、C 两位置弹簧弹性势能相等，小球重力做的功全部转化为小球的动能，所以得 $mgl_0=\frac{1}{2}mv_C^2$，解得 $v_C=\sqrt{2gl_0}$，故 D 正确．

10.(多选)如图所示，质量为 m 的小环(可视为质点)套在固定的光滑竖直杆上，一足够长且不可伸长的轻绳一端与小环相连，另一端跨过光滑的定滑轮与质量为 M 的物块相连，已知 $M=2m$.与定滑轮等高的 A 点和定滑轮之间的距离为 $d=3$ m，定滑轮大小及质量可忽略．现将小环从 A 点由静止释放，小环运动到 C 点速度为 0，重力加速度取 $g=10$ m/s^2，则下列说法正确的是($\sin 53°=0.8$，$\cos 53°=0.6$)(　　)



A．A、C 间距离为 4 m

B．小环最终静止在 C 点

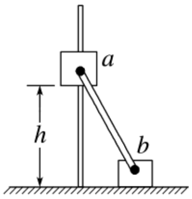
C．小环下落过程中减少的重力势能始终等于物块增加的机械能

D．当小环下滑至绳与杆的夹角为 60°时，小环与物块的动能之比为 2∶1

答案　AD

解析　小环运动到 C 点时，对系统，由机械能守恒得：$mgL_{AC}=Mg(\sqrt{d^2+L_{AC}^2}-d)$，解得：$L_{AC}=4\ \text{m}$，故 A 正确；假设小环最终静止在 C 点，则绳中的拉力大小等于 $2mg$，在 C 点对小环有：$F_T=\dfrac{mg}{\sin 53°}=\dfrac{5}{4}mg\neq 2mg$，所以假设不成立，小环不能静止，故 B 错误；由机械能守恒定律可知，小环下落过程中减少的重力势能转化为物块增加的机械能和小环增加的动能，故 C 错误；将小环的速度沿绳和垂直绳方向分解，沿绳方向的速度即为物块的速度 $v_M=v_m\cos 60°$，又有 $M=2m$，可知小环与物块的动能之比为 2∶1，故 D 正确．

11.如图，滑块 a、b 的质量均为 m，a 套在固定竖直杆上，与光滑水平地面相距 h，b 放在地面上．a、b 通过铰链用刚性轻杆连接，由静止开始运动．不计摩擦，a、b 可视为质点，重力加速度大小为 g，则(　　)



A．a 落地前，轻杆对 b 一直做正功

B．a 落地时速度大小为 $\sqrt{gh}$

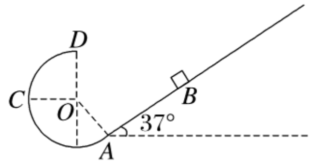
C．a 下落过程中，其加速度大小始终不大于 g

D．a 落地前，当 a 的机械能最小时，b 对地面的压力大小为 mg

答案　D

解析　当 a 到达底端时，b 的速度为零，b 的速度在整个过程中先增大后减小，动能先增大后减小，所以轻杆对 b 先做正功，后做负功，A 错误；a 落地时，b 的速度为零，根据系统机械能守恒得：$mgh=\dfrac{1}{2}mv_a^2$，解得 $v_a=\sqrt{2gh}$，B 错误；b 的速度在整个过程中先增大后减小，杆对 b 的作用力先是动力后是阻力，所以杆对 a 的作用力就先是阻力后是动力，所以在 b 减速的过程中，杆对 a 是斜向下的拉力，此时 a 的加速度大于重力加速度，C 错误；a、b 及杆系统的机械能守恒，当 a 的机械能最小时，b 的速度最大，此时 b 受到杆的推力为零，b 只受到重力和支持力的作用，结合牛顿第三定律可知，b 对地面的压力大小为 mg，D 正确．

12.如图所示，倾角为 37°的斜面与一竖直光滑圆轨道相切于 A 点，轨道半径 $R=1\ \text{m}$，将滑块由 B 点无初速度释放，滑块恰能运动到圆周的 C 点，OC 水平，OD 竖直，$x_{AB}=2\ \text{m}$，滑块可视为质点，取 $g=10\ \text{m/s}^2$，$\sin 37°=0.6$，$\cos 37°=0.8$，求：



(1)滑块在斜面上第一次下滑到 A 点的时间；

(2)若滑块能从 D 点抛出，滑块仍从斜面上无初速度释放，释放点至少应距 A 点多远.

答案　(1)1 s　(2)5.75 m

解析　(1)设滑块第一次到达 A 点的速度为 v_A，以 A 点所在水平面为参考平面，从 A 到 C 过程，根据机械能守恒定律有

$$\frac{1}{2}mv_A^2=mgR\cos 37°$$

从 B 到 A 过程，滑块做匀加速直线运动，由匀变速直线运动规律可知 $v_A^2=2ax_{AB}$

$$v_A=at$$

联立各式解得 $a=4\ \text{m/s}^2$，$t=1\ \text{s}$

(2)设滑块能从 D 点抛出的最小速度为 v_D，在 D 点，由重力提供向心力，有 $mg=m\frac{v_D^2}{R}$

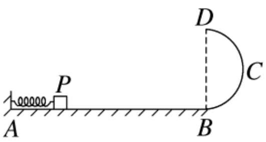
从 A 到 D 由机械能守恒定律有

$$\frac{1}{2}mv_A'^2=mgR(1+\cos 37°)+\frac{1}{2}mv_D^2$$

又 $v_A'^2=2ax'$

联立各式解得 $x'=5.75$ m.

13.轻质弹簧原长为 $2l$，将弹簧竖直放置在水平地面上，在其顶端将一质量为 $5m$ 的物体由静止释放，当弹簧被压缩到最短时，弹簧长度为 l.现将该弹簧水平放置，一端固定在 A 点，另一端与物块 P 接触但不连接．AB 是长度为 $5l$ 的水平轨道，B 端与半径为 l 的光滑半圆轨道 BCD 相切，半圆的直径 BD 竖直，如图所示．物块 P 与 AB 间的动摩擦因数 μ＝0.5.用外力推动物块 P，将弹簧压缩至长度 l，然后释放，P 开始沿轨道运动，重力加速度大小为 g.



(1)若 P 的质量为 m，求 P 到达 B 点时速度的大小，以及它离开圆轨道后落回到 AB 上的位置与 B 点间的距离；

(2)若 P 能滑上圆轨道，且仍能沿圆轨道滑下，求 P 的质量的取值范围.

答案　(1)$\sqrt{6gl}$　$2\sqrt{2}l$　(2)$\frac{5}{3}m\leqslant m_P<\frac{5}{2}m$

解析　(1)竖直的弹簧放上物体压缩至长度 l 时，由机械能守恒得 $5mgl=E_p$

弹簧水平放置压缩至长度 l 时，物块 P 从开始到 B 点，由能量守恒得

$$E_p=\mu mg\cdot 4l+\frac{1}{2}mv_B^2$$

解得 $v_B=\sqrt{6gl}$

物块由 B 点到 D 点

$$-mg\cdot 2l=\frac{1}{2}mv_D^2-\frac{1}{2}mv_B^2$$

解得 $v_D=\sqrt{2gl}$

物块由 D 点平抛

$2l=\frac{1}{2}gt^2$，$x=v_Dt$

解得 $x=2\sqrt{2}l$

(2)物块至少过 B 点时 $E_p>\mu m_Pg\cdot 4l$

P 最多到 C 点且不脱轨

$$E_p\leqslant\mu m_Pg\cdot 4l+m_Pgl$$

则$\frac{5}{3}m\leqslant m_P<\frac{5}{2}m$.