平面向量的概念及线性运算

【考试要求】 1.理解平面向量的意义、几何表示及向量相等的含义.2.掌握向量的加法、减法运算，并理解其几何意义及向量共线的含义.3.了解向量线性运算的性质及其几何意义.

▪ 落实 主干知识

【知识梳理】

1．向量的有关概念

(1)向量：既有大小又有方向的量叫做向量，向量的大小叫做向量的长度(或模).

(2)零向量：长度为 0 的向量，记作 **0**.

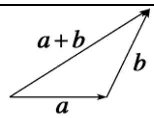
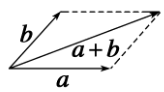
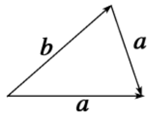
(3)单位向量：长度等于 1 个单位长度的向量.

(4)平行向量：方向相同或相反的非零向量，也叫做共线向量，规定：零向量与任意向量平行.

(5)相等向量：长度相等且方向相同的向量.

(6)相反向量：长度相等且方向相反的向量.

2．向量的线性运算

向量 运算	法则(或几何意义)	运算律
加法	 三角形法则  平行四边形法则	交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\underline{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}}$； 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\underline{\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})}$
减法	 几何意义	$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$
数乘	$\|\lambda\boldsymbol{a}\|=\|\lambda\|\|\boldsymbol{a}\|$，当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同； 当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反； 当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\underline{\boldsymbol{0}}$	$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\underline{(\lambda\mu)}\boldsymbol{a}$； $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$； $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$

3.向量共线定理

向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是：存在唯一一个实数 λ，使得 $\underline{\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}}$.

【常用结论】

1．一般地，首尾顺次相接的多个向量的和等于从第一个向量起点指向最后一个向量终点的向量，即$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\cdots+A_{n-1}A_n=\overrightarrow{A_1A_n}$，特别地，一个封闭图形，首尾连接而成的向量和为零向量．

2．若 F 为线段 AB 的中点，O 为平面内任意一点，则$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.

3．若 A，B，C 是平面内不共线的三点，则$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=0\Leftrightarrow P$ 为$\triangle ABC$ 的重心，$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

4．若$\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OC}(\lambda$，$\mu$ 为常数)，则 A，B，C 三点共线的充要条件是 $\lambda+\mu=1$.

5．对于任意两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，都有$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

【思考辨析】

判断下列结论是否正确(请在括号中打“√”或“×”)

(1)$|\boldsymbol{a}|$与$|\boldsymbol{b}|$是否相等，与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的方向无关．(　√　)

(2)若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，且$|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$.(　×　)

(3)若向量$\overrightarrow{AB}$与向量$\overrightarrow{CD}$是共线向量，则 A，B，C，D 四点在一条直线上．(　×　)

(4)起点不同，但方向相同且模相等的向量是相等向量．(　√　)

【教材改编题】

1．给出下列命题：

①若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 都是单位向量，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$；

②直角坐标平面上的 x 轴、y 轴都是向量；

③若用有向线段表示的向量$\overrightarrow{AM}$与$\overrightarrow{AN}$不相等，则点 M 与 N 不重合；

④海拔、温度、角度都不是向量．

则所有正确命题的序号是(　　)

A．①②　　　　B．①③

C．②③　　　　D．③④

答案　D

解析　①错误，由于单位向量长度相等，但是方向不确定；②错误，由于只有方向，没有大小，故 x 轴、y 轴不是向量；③正确，由于向量起点相同，但长度不相等，所以终点不同；④正确，海拔、温度、角度只有大小，没有方向，故不是向量．

2．下列各式化简结果正确的是(　　)

A.$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$

B.$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AM}$

C.$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}=0$

D.$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BC}$

答案　B

3．已知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是两个不共线的向量，且向量 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 与 $-(\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a})$ 共线，则 $\lambda=$________.

答案　$-\frac{1}{3}$

解析　由题意知存在 $k\in\mathbf{R}$,

使得 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=k[-(\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a})]$,

所以$\begin{cases}\lambda=-k,\\1=3k,\end{cases}$　解得$\begin{cases}k=\frac{1}{3},\\\lambda=-\frac{1}{3}.\end{cases}$

■ 探究　核心题型

题型一　平面向量的概念

例 1　(1)给出下列命题，正确的有(　　)

A．若两个向量相等，则它们的起点相同，终点相同

B．若 A，B，C，D 是不共线的四点，且$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，则四边形 $ABCD$ 为平行四边形

C．$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 的充要条件是$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$

D．已知 λ，μ 为实数，若 $\lambda\boldsymbol{a}=\mu\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线

答案　B

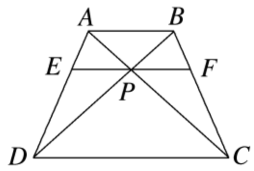
解析　A 错误，两个向量起点相同，终点相同，则两个向量相等，但两个向量相等，不一定有相同的起点和终点;

B 正确，因为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，所以$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$且$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{DC}$，又 A，B，C，D 是不共线的四点，所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形;

C 错误，当 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 且方向相反时，即使$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，也不能得到 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，所以$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 不是 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 的充要条件，而是必要不充分条件;

D 错误，当 $\lambda=\mu=0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 可以为任意向量，满足 $\lambda\boldsymbol{a}=\mu\boldsymbol{b}$，但 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不一定共线.

(2)如图，在等腰梯形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 交于点 P，点 E，F 分别在腰 AD，BC 上，EF 过点 P，且 $EF\parallel AB$，则下列等式中成立的是(　　)



A. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$　　B. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$

C. $\overrightarrow{PE}=\overrightarrow{PF}$　　D. $\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{PF}$

答案　D

【教师备选】

下列命题为假命题的是(　　)

A．若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为非零向量，且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 必与 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 平行

B．若 $\boldsymbol{e}$ 为单位向量，且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{e}$，则 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}$

C．两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，若 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线且反向

D．“两个向量平行”是“这两个向量相等”的必要不充分条件

答案　B

思维升华　平行向量有关概念的四个关注点

(1)非零向量的平行具有传递性．

(2)共线向量即为平行向量，它们均与起点无关．

(3)向量可以平移，平移后的向量与原向量是相等向量．

(4)$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量．

跟踪训练 1　(1)下列命题不正确的是(　　)

A．零向量是唯一没有方向的向量

B．零向量的长度等于 0

C．若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都为非零向量，则使$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}+\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=0$ 成立的条件是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向共线

D．若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$

答案　A

解析　A 项，零向量是有方向的，其方向是任意的，故 A 错误；

B 项，由零向量的定义知，零向量的长度为 0，故 B 正确；

C 项，因为$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$与$\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$都是单位向量，所以只有当$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$与$\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$是相反向量，即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是反向共线时才成立，故 C 正确；

D 项，由向量相等的定义知 D 正确．

(2)对于非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，“$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=0$”是“$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$”的(　　)

A．充分不必要条件

B．必要不充分条件

C．充要条件

D．既不充分也不必要条件

答案　A

解析　若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=0$，

则 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，即充分性成立；若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$ 不一定成立，即必要性不成立，

即“$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=0$”是“$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$”的充分不必要条件．

题型二　平面向量的线性运算

命题点 1　向量加、减法的几何意义

例 2　(2022·济南模拟)已知单位向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_{2\,023}$,则$|\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\cdots+\boldsymbol{e}_{2\,023}|$的最大值是______，最小值是________．

答案　2 023　0

解析　当单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_{2\,023}$ 方向相同时，

$|\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\cdots+\boldsymbol{e}_{2\,023}|$取得最大值，

$|\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\cdots+\boldsymbol{e}_{2\,023}|=|\boldsymbol{e}_1|+|\boldsymbol{e}_2|+\cdots+|\boldsymbol{e}_{2\,023}|$

$=2\,023$；

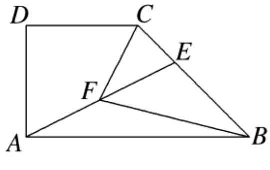
当单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_{2\,023}$ 首尾相连时，

$\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\cdots+\boldsymbol{e}_{2\,023}=\boldsymbol{0}$，

所以$|\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\cdots+\boldsymbol{e}_{2\,023}|$的最小值为 0.

命题点 2　向量的线性运算

例 3　如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$AB\perp AD$，$AB=2AD=2CD$，E 是 BC 边上一点，且$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{EC}$，$F$ 是 AE 的中点，则下列关系式不正确的是(　　)



A.$\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

B.$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

C.$\overrightarrow{BF}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

D.$\overrightarrow{CF}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

答案　C

解析　因为$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$,

所以选项 A 正确;

因为$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right)$,

而$\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$,

代入可得$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$,

所以选项 B 正确;

因为$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}$,

而$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$,

代入得$\overrightarrow{BF}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$,

所以选项 C 不正确;

因为$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AF}$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AF}$,

而$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$,

代入得$\overrightarrow{CF}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$,

所以选项 D 正确.

命题点 3　根据向量线性运算求参数

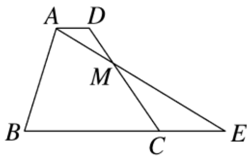
例 4　(2022·青岛模拟)已知平面四边形 $ABCD$ 满足$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$，平面内点 E 满足$\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{CE}$，$CD$ 与 AE 交于点 M，若$\overrightarrow{BM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，则 $x+y$ 等于(　　)

A. $\frac{5}{2}$　　B. $-\frac{5}{2}$

C. $\frac{4}{3}$　　D. $-\frac{4}{3}$

答案　C

解析　如图所示，



易知 $BC=4AD$，

$CE=2AD$，

$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}$

$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})-\overrightarrow{AB}$

$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{AD})-\overrightarrow{AB}$

$=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$，

$\therefore x+y=\frac{4}{3}$.

【教师备选】

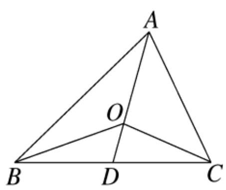
1.(2022·资阳模拟)在△ABC 中，AD 为 BC 边上的中线，若点 O 满足 $\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{OD}$，则 $\overrightarrow{OC}$ 等于(　　)

A. $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$　　B. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

C. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$　　D. $-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

答案　A

解析　如图所示，



$\because D$ 为 BC 的中点，

$\therefore \overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

$\because \overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{OD}$，

$\therefore \overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

$\therefore \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AC}-\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$

$=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$

2．(2022·长春调研)在△ABC 中，延长 BC 至点 M 使得 $BC=2CM$，连接 AM，点 N 为 AM 上一点且$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$，若$\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则 $\lambda+\mu$ 等于(　　)

A.$\frac{1}{3}$　　　　B.$\frac{1}{2}$

C．$-\frac{1}{2}$　　　　D．$-\frac{1}{3}$

答案　A

解析　由题意，知$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM})$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

$=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，

又$\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，

所以$\lambda=-\frac{1}{6}$，$\mu=\frac{1}{2}$，则$\lambda+\mu=\frac{1}{3}$.

思维升华　平面向量线性运算的常见类型及解题策略

(1)向量求和用平行四边形法则或三角形法则；求差用向量减法的几何意义．

(2)求参数问题可以通过向量的运算将向量表示出来，进行比较，求参数的值．

跟踪训练 2　(1)点 G 为△ABC 的重心，设$\overrightarrow{BG}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{GC}=\boldsymbol{b}$，则$\overrightarrow{AB}$等于(　　)

A．$\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}$　　　　B.$\frac{3}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$

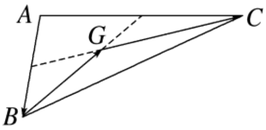
C.$\frac{3}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　　　D．$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$

答案　A

解析　如图所示，由题意可知

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$，

故$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GC}-2\overrightarrow{BG}=\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}$.



(2)(2022·大连模拟)在△ABC 中，$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EC}$，$P$ 为线段 DE 上的动点，若$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，$\lambda$，$\mu\in\mathbf{R}$，则 $\lambda+\mu$ 等于(　　)

A．1　B.$\frac{2}{3}$　C.$\frac{3}{2}$　D．2

答案　B

解析　如图所示，由题意知，

$\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，

设$\overrightarrow{DP}=x\overrightarrow{DE}$，

所以$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{AD}+x\overrightarrow{DE}$

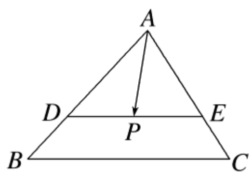
$=\overrightarrow{AD}+x(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD})$

$=x\overrightarrow{AE}+(1-x)\overrightarrow{AD}$

$=\frac{2}{3}x\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}(1-x)\overrightarrow{AB}$，

所以 $\mu=\frac{2}{3}x$，$\lambda=\frac{2}{3}(1-x)$，

所以 $\lambda+\mu=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}(1-x)=\frac{2}{3}$.



题型三　共线定理及其应用

例 5 设两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线.

(1)若$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$．求证：$A$，$B$，$D$ 三点共线；

(2)试确定实数 k，使 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 共线.

(1)证明　∵$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{CD}=3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

∴$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}+3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=5(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=5\overrightarrow{AB}$.∴$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BD}$共线，

又它们有公共点 B，

∴A，B，D 三点共线.

(2)解　∵$k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 共线，∴存在实数 λ，

使 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})$，即 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda k\boldsymbol{b}$，

∴$(k-\lambda)\boldsymbol{a}=(\lambda k-1)\boldsymbol{b}$.

∵$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是不共线的两个向量，

∴$k-\lambda=\lambda k-1=0$，∴$k^2-1=0$，∴$k=\pm1$.

【教师备选】

1．已知 P 是△ABC 所在平面内一点，且满足$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{AB}$，若 $S_{\triangle ABC}=6$，则△PAB 的面积为(　　)

A．2　　　　B．3

C．4　　　　D．8

答案　A

解析　∵$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{AB}=2(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA})$，

∴$3\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{CB}$，

∴$\overrightarrow{PA}\parallel\overrightarrow{CB}$，且两向量方向相同，

∴$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle PAB}}=\dfrac{BC}{AP}=\dfrac{|\overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{PA}|}=3$，

又 $S_{\triangle ABC}=6$，∴$S_{\triangle PAB}=\dfrac{6}{3}=2$.

2．设两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点相同，且 $\boldsymbol{a}$，$t\boldsymbol{b}$，$\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$的终点在同一条直线上，则实数 t 的值为________.

答案　$\dfrac{1}{2}$

解析　∵$\boldsymbol{a}$，$t\boldsymbol{b}$，$\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$的终点在同一条直线上，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点相同，

$\therefore \boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$共线，

即 $\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b}$ 与$\frac{2}{3}\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$ 共线，

∴存在实数 λ，使 $\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b}=\lambda\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}\right)$，

又 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为两个不共线的非零向量，

$\therefore \begin{cases} 1=\frac{2}{3}\lambda, \\ t=\frac{1}{3}\lambda, \end{cases}$ 解得$\begin{cases} \lambda=\frac{3}{2}, \\ t=\frac{1}{2}. \end{cases}$

思维升华　利用共线向量定理解题的策略

(1)$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq 0)$是判断两个向量共线的主要依据.

(2)若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线且 $\lambda\boldsymbol{a}=\mu\boldsymbol{b}$，则 $\lambda=\mu=0$.

(3)$\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OC}$($\lambda$，$\mu$ 为实数)，若 A，B，C 三点共线，则 $\lambda+\mu=1$.

跟踪训练 3　(1)若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个不共线的向量，已知$\overrightarrow{MN}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{PN}=2\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{PQ}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，若 M，N，Q 三点共线，则 k 等于(　　)

A．－1　B．1　C.$\frac{3}{2}$　D．2

答案　B

解析　由题意知，

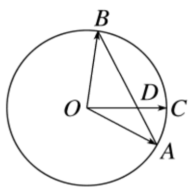
$\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PN}=\boldsymbol{a}-(k+1)\boldsymbol{b}$，

因为 M，N，Q 三点共线，故存在实数 λ，

使得$\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{NQ}$，

即 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=\lambda[\boldsymbol{a}-(k+1)\boldsymbol{b}]$，解得 $\lambda=1$，$k=1$.

(2)如图，已知 A，B，C 是圆 O 上不同的三点，线段 CO 与线段 AB 交于点 D(点 O 与点 D 不重合)，若$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$($\lambda$，$\mu\in\mathbf{R}$)，则 $\lambda+\mu$ 的取值范围是(　　)



A．(0,1)　　　　B．(1，＋∞)

C．$(1,\sqrt{2}]$　　　　　　D．$(-1,0)$

答案　B

解析　因为线段 CO 与线段 AB 交于点 D，

所以 O，C，D 三点共线，

所以$\overrightarrow{OC}$与$\overrightarrow{OD}$共线，

设$\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OD}$，则 $m>1$，

因为$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，

所以 $m\overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，

可得$\overrightarrow{OD}=\frac{\lambda}{m}\overrightarrow{OA}+\frac{\mu}{m}\overrightarrow{OB}$，

因为 A，B，D 三点共线，

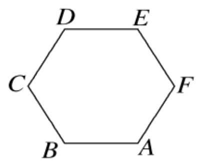
所以$\frac{\lambda}{m}+\frac{\mu}{m}=1$，可得 $\lambda+\mu=m>1$，

所以 $\lambda+\mu$ 的取值范围是$(1,+\infty)$．

课时精练

基础保分练

1. 如图所示，在正六边形 $ABCDEF$ 中，$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}$等于(　　)



A．$\mathbf{0}$　　　　　　B.$\overrightarrow{BE}$

C.$\overrightarrow{AD}$　　　　　　D.$\overrightarrow{CF}$

答案　D

解析　根据正六边形的性质，

易得，$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{EF}$

$=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CF}$.

2．若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为非零向量，则“$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$”是“$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线”的(　　)

A．充要条件

B．充分不必要条件

C．必要不充分条件

D．既不充分也不必要条件

答案　B

解析　$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，$\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$分别表示与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 同方向的单位向量，$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$，则有 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线，而 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线，则$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，$\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$是相等向量或相反向量，所以“$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$”是“$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线”的充分不必要条件．

3．设 $\boldsymbol{a}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA})$，$\boldsymbol{b}$ 是一个非零向量，则下列结论不正确的是(　　)

A．$\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$

B．$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$

C．$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$

D．$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$

答案　B

解析　由题意得，$\boldsymbol{a}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA})=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{b}$ 是一个非零向量，所以 $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$ 成立，所以 A 正确；由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$，所以 B 不正确，C 正确；由$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|$，所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，所以 D 正确．

4．(2022·汕头模拟)下列命题中正确的是(　　)

A．若 $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$，则存在唯一的实数 λ 使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$

B．若 $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}\,/\!/\,\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{c}$

C．若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

D．$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$

答案　D

解析　若 $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则可有无数个实数 λ 使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，故 A 错误；

若 $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}\,/\!/\,\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$，则 $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{c}$，若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，

则 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}$ 不一定平行，故 B 错误；

若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，也可以为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，故 C 错误；

根据向量加法的三角形法则和向量减法的几何意义知，$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$成立，故 D 正确．

5．在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{BD}$交于点 O，E 是线段 OD 的中点．若$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$，

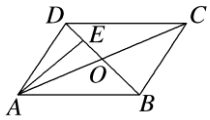
则$\overrightarrow{AE}$等于(　　)

A.$\frac{1}{4}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　B.$\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$

C.$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$　　D.$\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$

答案　C

解析　如图所示，



$\because \overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$，

$\therefore \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}$

$=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，

$\therefore \overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{ED}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$

$=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$.

6．下列说法正确的是(　　)

A．向量$\overrightarrow{AB}$与向量$\overrightarrow{BA}$的长度相等

B．两个有共同起点，且长度相等的向量，它们的终点相同

C．向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反

D．向量的模是一个正实数

答案　A

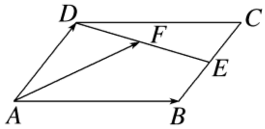
解析　A 项，$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BA}$的长度相等，方向相反，正确；

B 项，两个有共同起点且长度相等的向量，若方向也相同，则它们的终点相同，故错误；

C 项，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行时，若 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 为零向量，不满足条件，故错误；

D 项，向量的模是一个非负实数，故错误.

7. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，E 为 BC 的中点，F 为 DE 的中点，若$\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$，则 x 等于(　　)



A.$\frac{3}{4}$　　　　　　B.$\frac{2}{3}$

C.$\frac{1}{2}$　　　　　　D.$\frac{1}{4}$

答案　C

解析　连接 AE(图略)，因为 F 为 DE 的中点，

所以$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})$，

而$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，

所以$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})$

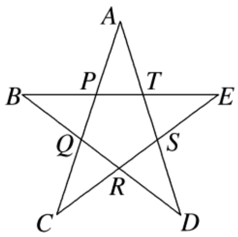
$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$，

又$\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$，

所以 $x=\frac{1}{2}$.

8. 庄严美丽的国旗和国徽上的五角星是革命和光明的象征．正五角星是一个非常优美的几何图形，且与黄金分割有着密切的联系，在如图所示的正五角星中，以 A，B，C，D，E 为顶点的多边形为正五边形，且$\frac{PT}{AT}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.下列关系中正确的是(　　)



A.$\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{TS}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\overrightarrow{RS}$

B.$\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{TP}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\overrightarrow{TS}$

C.$\overrightarrow{ES}-\overrightarrow{AP}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{BQ}$

D.$\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{BQ}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{CR}$

答案　A

解析　由题意得，$\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{TS}=\overrightarrow{TE}-\overrightarrow{TS}=\overrightarrow{SE}=\dfrac{\overrightarrow{RS}}{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\overrightarrow{RS}$，所以 A 正确；$\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{TA}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\overrightarrow{ST}$，所以 B 错误；$\overrightarrow{ES}-\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{RC}-\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{RQ}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{QB}$，所以 C 错误；$\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{RD}$，$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{CR}=\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{RD}-\overrightarrow{SD}$，若$\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{BQ}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{CR}$，则$\overrightarrow{SD}=\mathbf{0}$，不符合题意，所以 D 错误．

9．(2022·太原模拟)已知不共线向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}=t\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}(t\in\mathbf{R})$，$\overrightarrow{AC}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，若 A，B，C 三点共线，则实数 $t=$__________.

答案　$-\dfrac{2}{3}$

解析　因为 A，B，C 三点共线，所以存在实数 k，使得$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$，

所以 $t\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=k(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})=2k\boldsymbol{a}+3k\boldsymbol{b}$，

即$(t-2k)\boldsymbol{a}=(3k+1)\boldsymbol{b}$.

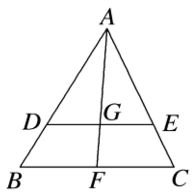
因为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，所以$\begin{cases}t-2k=0,\\3k+1=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=-\dfrac{1}{3},\\t=-\dfrac{2}{3}.\end{cases}$

10．已知△ABC 的重心为 G，经过点 G 的直线交 AB 于 D，交 AC 于 E，若$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AE}=\mu\overrightarrow{AC}$，则$\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}=$________.

答案　3

解析　如图，设 F 为 BC 的中点，



则$\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

又$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AC}=\frac{1}{\mu}\overrightarrow{AE}$，

$\therefore\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3\lambda}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3\mu}\overrightarrow{AE}$，

又 G，D，E 三点共线，

$\therefore\frac{1}{3\lambda}+\frac{1}{3\mu}=1$，即$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=3$.

11．若正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 2，中心为 O，则$|\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{CA}|=$________.

答案　$2\sqrt{3}$

解析　正六边形 $ABCDEF$ 中，$\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{EA}$，

在△AEF 中，$\angle AFE=120°$，$AF=EF=2$，

$\therefore|\overrightarrow{EA}|=\sqrt{2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos 120°}=2\sqrt{3}$，

即$|\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{CA}|=2\sqrt{3}$.

12．在平行四边形 $ABCD$ 中，点 M 为 BC 边的中点，$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AM}+\mu\overrightarrow{BD}$，则 $\lambda+\mu=$________.

答案　$\frac{5}{3}$

解析　$\overrightarrow{AC}=\lambda\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)+\mu(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$

$=(\lambda-\mu)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{\lambda}{2}+\mu\right)\overrightarrow{AD}$，

又因为$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，

所以$\begin{cases}\lambda-\mu=1,\\ \frac{\lambda}{2}+\mu=1,\end{cases}$　解得$\begin{cases}\lambda=\frac{4}{3},\\ \mu=\frac{1}{3},\end{cases}$

所以$\lambda+\mu=\frac{5}{3}$.

技能提升练

13．点 P 是△ABC 所在平面内一点，且满足$|\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}|-|\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}-2\overrightarrow{PA}|=0$，则△$ABC$ 是________三角形．

答案　直角

解析　因为点 P 是△ABC 所在平面内一点，

且$|\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}|-|\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}-2\overrightarrow{PA}|=0$，

所以$|\overrightarrow{CB}|-|(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA})+(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA})|=0$，

即$|\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$，

所以$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}|$，

等式两边平方并化简得$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，

所以$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{AB}$，$\angle BAC=90°$，则$\triangle ABC$为直角三角形．

14．在$\triangle ABC$中，$\angle A=60°$，$\angle A$的平分线交BC于点D，若$AB=4$，且$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\lambda\overrightarrow{AB}(\lambda\in\mathbf{R})$，则$\lambda=$________，$AD$的长为________．

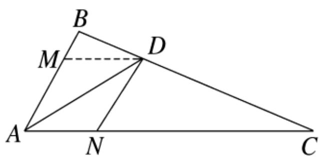
答案　$\frac{3}{4}$　$3\sqrt{3}$

解析　∵B，D，C三点共线，

∴$\frac{1}{4}+\lambda=1$，解得$\lambda=\frac{3}{4}$.

如图，过D分别作AC，AB的平行线交AB，AC于点M，N，

则$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$，



∵在$\triangle ABC$中，$\angle A=60°$，$\angle A$的平分线交BC于D，

∴四边形$AMDN$是菱形，

∵$AB=4$，∴$AN=AM=3$，

∴$AD=3\sqrt{3}$.

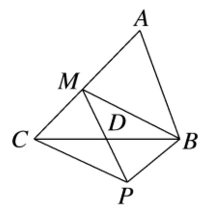
拓展冲刺练

15．(2022·滁州模拟)已知 P 为$\triangle ABC$ 所在平面内一点，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}|=2$，则$\triangle ABC$的面积为(　　)

A.$\sqrt{3}$　B．$2\sqrt{3}$　C．$3\sqrt{3}$　D．$4\sqrt{3}$

答案　B

解析　设 BC 的中点为 D，AC 的中点为 M，连接 PD，MD，BM，如图所示，



则有$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PD}$.

由$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$,

得$\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{PD}$,

又 D 为 BC 的中点，M 为 AC 的中点，

所以$\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{DM}$，则$\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{DM}$,

则 P，D，M 三点共线且 D 为 PM 的中点，

又 D 为 BC 的中点，

所以四边形 $CPBM$ 为平行四边形.

又$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}|=2$,

所以$|\overrightarrow{MC}|=|\overrightarrow{BP}|=2$，则$|\overrightarrow{AC}|=4$,

且$|\overrightarrow{BM}|=|\overrightarrow{PC}|=2$,

所以$\triangle AMB$ 为等边三角形，$\angle BAC=60°$,

则 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times2\times4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.

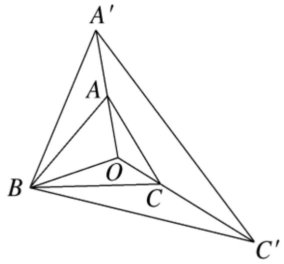
16．若 $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，$S_{\triangle AOC}$，$S_{\triangle ABC}$ 分别表示$\triangle AOC$，$\triangle ABC$ 的面积，则 $S_{\triangle AOC}∶S_{\triangle ABC}$ ＝________.

答案　1∶6

解析　若 $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$,

设$\overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OC'}=3\overrightarrow{OC}$,

可得 O 为$\triangle A'BC'$ 的重心，如图，



设 $S_{\triangle AOB}=x$，$S_{\triangle BOC}=y$，$S_{\triangle AOC}=z$，

则 $S_{\triangle A'OB}=2x$，$S_{\triangle BOC'}=3y$，$S_{\triangle A'OC'}=6z$，

由 $2x=3y=6z$，

可得 $S_{\triangle AOC}$∶$S_{\triangle ABC}=z$∶$(x+y+z)=1$∶6.