§2.5　二次函数与幂函数

【考试要求】 1.通过具体实例，了解幂函数及其图象的变化规律.2.掌握二次函数的图象与性质(单调性、对称性、顶点、最值等).

■ 落实　主干知识

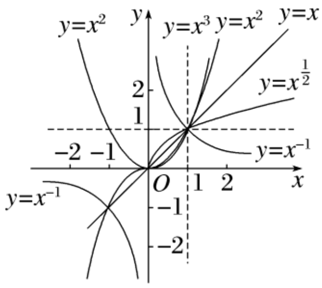
【知识梳理】

1．幂函数

(1)幂函数的定义

一般地，函数 $y=x^{\alpha}$ 叫做幂函数，其中 x 是自变量，α 为常数.

(2)常见的五种幂函数的图象



(3)幂函数的性质

①幂函数在(0，+∞)上都有定义；

②当 $\alpha>0$ 时，幂函数的图象都过点(1,1)和(0,0)，且在(0，+∞)上单调递增；

③当 $\alpha<0$ 时，幂函数的图象都过点(1,1)，且在(0，+∞)上单调递减；

④当 α 为奇数时，$y=x^{\alpha}$ 为奇函数；当 α 为偶数时，$y=x^{\alpha}$ 为偶函数.

2．二次函数

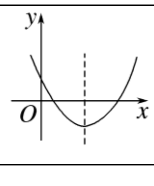
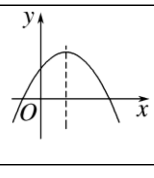
(1)二次函数解析式的三种形式

一般式：$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$.

顶点式：$f(x)=a(x-m)^2+n(a\neq 0)$，顶点坐标为$(m，n)$.

零点式：$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0)$，$x_1$，$x_2$ 为 $f(x)$的零点.

(2)二次函数的图象和性质

函数	$y=ax^2+bx+c(a>0)$	$y=ax^2+bx+c(a<0)$
图象(抛物线)		
定义域	**R**	

值域	$\left[\dfrac{4ac-b^2}{4a},+\infty\right)$	$\left(-\infty,\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right]$
对称轴	$x=-\dfrac{b}{2a}$	
顶点坐标	$\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$	
奇偶性	当 $b=0$ 时是偶函数，当 $b\neq0$ 时是非奇非偶函数	
单调性	在$\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right]$上单调递减； 在$\left[-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$上单调递增	在$\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right]$上单调递增； 在$\left[-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$上单调递减

【思考辨析】

判断下列结论是否正确(请在括号中打“√”或“×”)

(1)函数 $y=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$ 是幂函数．(　×　)

(2)若幂函数 $y=x^{\alpha}$ 是偶函数，则 α 为偶数．(　×　)

(3)二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象恒在 x 轴下方，则 $a<0$ 且 $\Delta<0$.(　√　)

(4)若二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的两个零点确定，则二次函数的解析式确定．(　×　)

【教材改编题】

1．已知幂函数 $y=f(x)$的图象过点$(2,\sqrt{2})$，则 $f\left(\frac{1}{4}\right)$等于(　　)

A．$-\frac{1}{2}$　　　　B.$\frac{1}{2}$

C．$\pm\frac{1}{2}$　　　　D.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

答案　B

解析　设 $f(x)=x^{\alpha}$,

$\therefore 2^{\alpha}=\sqrt{2}$，$\alpha=\frac{1}{2}$,

$\therefore f(x)=x^{\frac{1}{2}}$,

$\therefore f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$.

2．若函数 $f(x)=4x^2-kx-8$ 在$[5,20]$上单调，则实数 k 的取值范围为________.

答案　$(-\infty,40]\cup[160,+\infty)$

解析　依题意知，$\frac{k}{8}\geqslant 20$ 或 $\frac{k}{8}\leqslant 5$，

解得 $k\geqslant 160$ 或 $k\leqslant 40$.

3．已知 $y=f(x)$为二次函数，若 $y=f(x)$在 $x=2$ 处取得最小值-4，且 $y=f(x)$的图象经过原点，则函数解析式为________.

答案　$f(x)=x^2-4x$

解析　因为 $y=f(x)$在 $x=2$ 处取得最小值-4，

所以可设 $f(x)=a(x-2)^2-4(a>0)$，

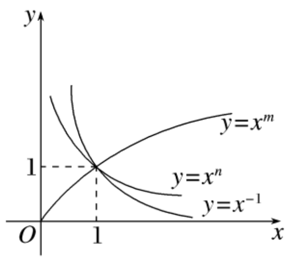
又图象过原点，所以 $f(0)=4a-4=0$，$a=1$，

所以 $f(x)=(x-2)^2-4=x^2-4x$.

■ 探究　核心题型

题型一　幂函数的图象与性质

例 1　(1)若幂函数 $y=x^{-1}$，$y=x^m$ 与 $y=x^n$ 在第一象限内的图象如图所示，则 m 与 n 的取值情况为(　　)



A．$-1<m<0<n<1$

B．$-1<n<0<m<\frac{1}{2}$

C．$-1<m<0<n<\frac{1}{2}$

D．$-1<n<0<m<1$

答案　D

解析　幂函数 $y=x^{\alpha}$，当 $\alpha>0$ 时，$y=x^{\alpha}$ 在$(0，+\infty)$上单调递增，且 $0<\alpha<1$ 时，图象上凸，

$\therefore 0<m<1$.

当 $\alpha<0$ 时，$y=x^{\alpha}$ 在$(0，+\infty)$上单调递减.

不妨令 $x=2$，由图象得 $2^{-1}<2^n$，则$-1<n<0$.

综上可知，$-1<n<0<m<1$.

(2)(2022·长沙质检)幂函数 $f(x)=(m^2-3m+3)x^m$ 的图象关于 y 轴对称，则实数 $m=$________.

答案　2

解析　由幂函数定义，知 $m^2-3m+3=1$，

解得 $m=1$ 或 $m=2$，

当 $m=1$ 时，$f(x)=x$ 的图象不关于 y 轴对称，舍去，

当 $m=2$ 时，$f(x)=x^2$ 的图象关于 y 轴对称，

因此 $m=2$.

【教师备选】

1．若幂函数 $f(x)=(a^2-5a-5)x^{-\frac{1}{2}a}$ 在(0，+∞)上单调递增，则 a 等于(　　)

A．1　　B．6

C．2　　D．－1

答案　D

解析　因为函数 $f(x)=(a^2-5a-5)x^{-\frac{1}{2}a}$ 是幂函数，

所以 $a^2-5a-5=1$，解得 $a=-1$ 或 $a=6$.

当 $a=-1$ 时，

$f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ 在(0，+∞)上单调递增；

当 $a=6$ 时，

$f(x)=x^{-3}$ 在(0，+∞)上单调递减，

所以 $a=-1$.

2．若 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$，则不等式 $f(x)>f(8x-16)$的解集是(　　)

A. $\left[2,\frac{16}{7}\right)$　　B．(0,2]

C. $\left(-\infty,\frac{16}{7}\right)$　　D．[2，+∞)

答案　A

解析　因为函数 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ 在定义域[0，+∞)内为增函数，且 $f(x)>f(8x-16)$，

所以$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ 8x-16 \geqslant 0, \\ x > 8x-16, \end{cases}$　　即 $2 \leqslant x < \dfrac{16}{7}$，

所以不等式的解集为$\left[2，\dfrac{16}{7}\right)$.

思维升华　(1)对于幂函数图象的掌握只要抓住在第一象限内三条线分第一象限为六个区域，即 $x=1$，$y=1$，$y=x$ 所分区域．根据 $\alpha<0,0<\alpha<1$，$\alpha=1$，$\alpha>1$ 的取值确定位置后，其余象限部分由奇偶性决定．

(2)在比较幂值的大小时，必须结合幂值的特点，选择适当的函数，借助其单调性进行比较．

跟踪训练 1　(1)(2022·宝鸡检测)已知 $a=2^{\frac{4}{3}}$，$b=3^{\frac{2}{3}}$，$c=25^{\frac{1}{2}}$，则(　　)

A．$b<a<c$　　　　B．$a<b<c$

C．$b<c<a$　　　　D．$c<a<b$

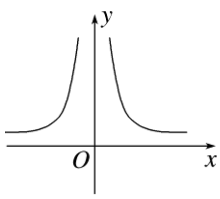
答案　A

解析　由题意得 $b=3^{\frac{2}{3}}<4^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{4}{3}}=a$，

$a=2^{\frac{4}{3}}=4^{\frac{2}{3}}<4<5=25^{\frac{1}{2}}=c$，

所以 $b<a<c$.

(2)已知幂函数 $y=x^{\frac{p}{q}}$ (p，$q\in\mathbf{Z}$ 且 p，q 互质)的图象关于 y 轴对称，如图所示，则(　　)



A．p，q 均为奇数，且$\dfrac{p}{q}>0$

B．q 为偶数，p 为奇数，且$\dfrac{p}{q}<0$

C．q 为奇数，p 为偶数，且$\dfrac{p}{q}>0$

D．q 为奇数，p 为偶数，且$\dfrac{p}{q}<0$

答案　D

解析　因为函数 $y=x^{\frac{p}{q}}$ 的图象关于 y 轴对称，于是函数 $y=x^{\frac{p}{q}}$ 为偶函数，即 p 为偶数，

又函数 $y=x^{\frac{p}{q}}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，则有 $\frac{p}{q}<0$，

又因为 p，q 互质，则 q 为奇数，所以只有选项 D 正确.

题型二　二次函数的解析式

例 2　已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(2)=-1$，$f(-1)=-1$，且 $f(x)$ 的最大值是 8，试确定该二次函数的解析式.

解　方法一　(利用“一般式”解题)

设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$.

由题意得 $\begin{cases}4a+2b+c=-1,\\ a-b+c=-1,\\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}=8,\end{cases}$　解得 $\begin{cases}a=-4,\\ b=4,\\ c=7.\end{cases}$

所以所求二次函数的解析式为

$f(x)=-4x^2+4x+7$.

方法二　(利用“顶点式”解题)

设 $f(x)=a(x-m)^2+n(a\neq0)$.

因为 $f(2)=f(-1)$，

所以抛物线的对称轴为 $x=\frac{2+(-1)}{2}=\frac{1}{2}$，

所以 $m=\frac{1}{2}$.

又根据题意，函数有最大值 8，所以 $n=8$，

所以 $f(x)=a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+8$.

因为 $f(2)=-1$，所以 $a\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+8=-1$，

解得 $a=-4$，

所以 $f(x)=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+8=-4x^2+4x+7$.

方法三　(利用“零点式”解题)

由已知 $f(x)+1=0$ 的两根为 $x_1=2$，$x_2=-1$，

故可设 $f(x)+1=a(x-2)(x+1)(a\neq0)$，

即 $f(x)=ax^2-ax-2a-1$.

又函数有最大值 8，

即$\dfrac{4a(-2a-1)-(-a)^2}{4a}=8$.

解得 $a=-4$ 或 $a=0$(舍去).

故所求函数的解析式为 $f(x)=-4x^2+4x+7$.

【教师备选】

若函数 $f(x)=(x+a)(bx+2a)(a，b\in\mathbf{R})$满足条件 $f(-x)=f(x)$，定义域为 $\mathbf{R}$，值域为$(-\infty，4]$，则函数解析式 $f(x)=$________.

答案　$-2x^2+4$

解析　$f(x)=(x+a)(bx+2a)$

$=bx^2+(2a+ab)x+2a^2$.

$\because f(-x)=f(x)$，

$\therefore 2a+ab=0$，

$\therefore f(x)=bx^2+2a^2$.

$\because f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为$(-\infty，4]$，

$\therefore b<0$，且 $2a^2=4$，

$\therefore b=-2$，$\therefore f(x)=-2x^2+4$.

思维升华　求二次函数解析式的三个策略：(1)已知三个点的坐标，宜选用一般式；(2)已知顶点坐标、对称轴、最大(小)值等，宜选用顶点式；(3)已知图象与 x 轴的两交点的坐标，宜选用零点式.

跟踪训练 2　(1)已知 $f(x)$为二次函数，且 $f(x)=x^2+f'(x)-1$，则 $f(x)$等于(　　)

A．x^2-2x+1　　　　B．x^2+2x+1

C．$2x^2-2x+1$　　　　D．$2x^2+2x-1$

答案　B

解析　设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，

则 $f'(x)=2ax+b$，

由 $f(x)=x^2+f'(x)-1$ 可得

$ax^2+bx+c=x^2+2ax+(b-1)$，

所以$\begin{cases}a=1,\\ b=2a,\\ c=b-1,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=1,\\ b=2,\\ c=1,\end{cases}$

因此，$f(x)=x^2+2x+1$.

(2)已知二次函数 $f(x)$的图象经过点(4,3)，且图象被 x 轴截得的线段长为 2，并且对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(2-x)=f(2+x)$，则 $f(x)$的解析式为________.

答案　$f(x)=x^2-4x+3$

解析　$\because f(2+x)=f(2-x)$对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

$\therefore f(x)$图象的对称轴为直线 $x=2$，

又$\because f(x)$的图象被 x 轴截得的线段长为 2，

$\therefore f(x)=0$ 的两根为 1 和 3，

设 $f(x)$的解析式为

$f(x)=a(x-1)(x-3)(a\neq 0)$，

$\because f(x)$的图象过点(4,3)，

$\therefore 3a=3$，$\therefore a=1$，

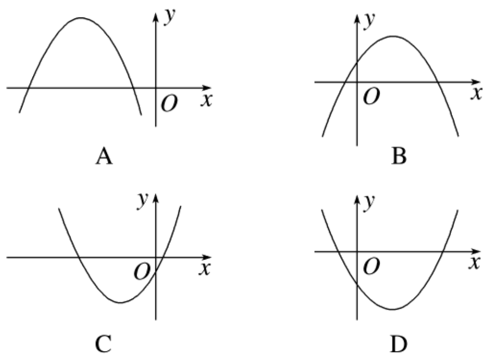
$\therefore$所求函数的解析式为 $f(x)=(x-1)(x-3)$，

即 $f(x)=x^2-4x+3$.

题型三　二次函数的图象与性质

命题点 1　二次函数的图象

例 3　设 $abc>0$，二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图象可能是(　　)



答案　D

解析　因为 $abc>0$，

二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，那么可知，

在 A 中，$a<0$，$b<0$，$c<0$，不符合题意；

B 中，$a<0$，$b>0$，$c>0$，不符合题意；

C 中，$a>0$，$c<0$，$b>0$，不符合题意，故选 D.

命题点 2　二次函数的单调性与最值

例 4　已知函数 $f(x)=x^2-tx-1$.

(1)若 $f(x)$在区间$(-1,2)$上不单调，求实数 t 的取值范围；

(2)若 $x\in[-1,2]$，求 $f(x)$的最小值 $g(t)$.

解　$f(x)=x^2-tx-1=\left(x-\frac{t}{2}\right)^2-1-\frac{t^2}{4}$.

(1)依题意，$-1<\frac{t}{2}<2$，

解得$-2<t<4$，

∴实数 t 的取值范围是$(-2,4)$.

(2)①当$\frac{t}{2}\geqslant 2$，即 $t\geqslant 4$ 时，$f(x)$在$[-1,2]$上单调递减，

∴$f(x)_{\min}=f(2)=3-2t$.

②当$-1<\frac{t}{2}<2$，即$-2<t<4$ 时，

$f(x)_{\min}=f\left(\frac{t}{2}\right)=-1-\frac{t^2}{4}$.

③当$\frac{t}{2}\leqslant -1$，即 $t\leqslant -2$ 时，$f(x)$在$[-1,2]$上单调递增，

∴$f(x)_{\min}=f(-1)=t$.

综上有 $g(t)=\begin{cases} t，t\leqslant -2, \\ -1-\dfrac{t^2}{4}，-2<t<4, \\ 3-2t，t\geqslant 4. \end{cases}$

延伸探究　本例条件不变，求当 $x\in[-1,2]$时，$f(x)$的最大值 $G(t)$.

解　$f(-1)=t$，$f(2)=3-2t$，

$f(2)-f(-1)=3-3t$，

当 $t\geqslant 1$ 时，$f(2)-f(-1)\leqslant 0$，

∴$f(2)\leqslant f(-1)$，

∴$f(x)_{\max}=f(-1)=t$；

当 $t<1$ 时，$f(2)-f(-1)>0$，

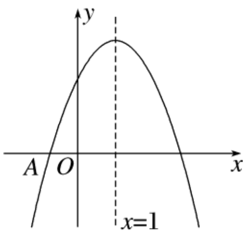
∴$f(2)>f(-1)$，

∴$f(x)_{\max}=f(2)=3-2t$，

综上有 $G(t)=\begin{cases} t，t\geqslant 1, \\ 3-2t，t<1. \end{cases}$

【教师备选】

1.如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$与 x 轴交于点 $A(-1,0)$，顶点坐标为$(1，n)$，与 y 轴的交点在$(0,2)$，$(0,3)$之间(包含端点)，则下列结论正确的是________.（填序号)



①当 $x>3$ 时，$y<0$；②$4a+2b+c=0$；

③$-1\leqslant a\leqslant -\dfrac{2}{3}$；④$3a+b>0$.

答案　①③

解析　依题意知，抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$与 x 轴交于点 $A(-1,0)$，顶点坐标为$(1，n)$，

∴函数与 x 轴的另一交点为$(3,0)$，

∴当 $x>3$ 时，$y<0$，故①正确；

当 $x=2$ 时，$y=4a+2b+c>0$，故②错误；

∵抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 $A(-1,0)$，且 $a<0$，

∴$a-b+c=0$，

∵$b=-2a$，∴$a+2a+c=0$，

∴$3a+b<0$，$c=-3a$，

∵$2\leqslant c\leqslant 3$，∴$2\leqslant -3a\leqslant 3$，

∴$-1\leqslant a\leqslant -\frac{2}{3}$，故③正确，④错误．

2．(2022·沈阳模拟)已知 $f(x)=ax^2-2x+1$.

(1)若 $f(x)$在[0,1]上单调，求实数 a 的取值范围；

(2)若 $x\in[0,1]$，求 $f(x)$的最小值 $g(a)$.

解　(1)当 $a=0$ 时，$f(x)=-2x+1$ 单调递减；

当 $a>0$ 时，$f(x)$的对称轴为 $x=\frac{1}{a}$，且$\frac{1}{a}>0$，

∴$\frac{1}{a}\geqslant 1$，即 $0<a\leqslant 1$；

当 $a<0$ 时，$f(x)$的对称轴为 $x=\frac{1}{a}$且$\frac{1}{a}<0$，

∴$a<0$ 符合题意．

综上有，$a\leqslant 1$.

(2)①当 $a=0$ 时，$f(x)=-2x+1$ 在[0,1]上单调递减，

∴$f(x)_{\min}=f(1)=-1$.

②当 $a>0$ 时，$f(x)=ax^2-2x+1$ 的图象开口方向向上，且对称轴为 $x=\frac{1}{a}$.

(ⅰ)当$\frac{1}{a}<1$，即 $a>1$ 时，$f(x)=ax^2-2x+1$ 图象的对称轴在[0,1]内，

∴$f(x)$在$\left[0,\frac{1}{a}\right]$上单调递减，在$\left[\frac{1}{a},1\right]$上单调递增．

∴$f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}-\frac{2}{a}+1=-\frac{1}{a}+1$.

(ⅱ)当$\frac{1}{a}\geqslant 1$，即 $0<a\leqslant 1$ 时，$f(x)$在[0,1]上单调递减．

$\therefore f(x)_{\min}=f(1)=a-1$.

③当 $a<0$ 时，$f(x)=ax^2-2x+1$ 的图象的开口方向向下，且对称轴 $x=\frac{1}{a}<0$，在 y 轴的左侧，

$\therefore f(x)=ax^2-2x+1$ 在$[0,1]$上单调递减．

$\therefore f(x)_{\min}=f(1)=a-1$.

综上所述，$g(a)=\begin{cases}a-1, & a\leqslant 1,\\ -\frac{1}{a}+1, & a>1.\end{cases}$

思维升华　二次函数在闭区间上的最值主要有三种类型：轴定区间定、轴动区间定、轴定区间动，不论哪种类型，解题的关键都是对称轴与区间的位置关系，当含有参数时，要依据对称轴与区间的位置关系进行分类讨论．

跟踪训练 3　(1)若函数 $f(x)=x^2+a|x|+2$，$x\in\mathbf{R}$ 在区间$[3，+\infty)$和$[-2，-1]$上均单调递增，则实数 a 的取值范围是(　　)

A.$\left[-\frac{11}{3}，-3\right]$　　　　B．$[-6，-4]$

C．$[-3，-2\sqrt{2}]$　　　　D．$[-4，-3]$

答案　B

解析　$\because f(x)$为偶函数，

$\therefore f(x)$在$[1,2]$上单调递减，在$[3，+\infty)$上单调递增，

当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2+ax+2$，

对称轴为 $x=-\frac{a}{2}$，$\therefore 2\leqslant-\frac{a}{2}\leqslant 3$，

解得 $-6\leqslant a\leqslant-4$.

(2)(2022·汉中模拟)已知函数 $f(x)=-x^2+2x+5$ 在区间$[0，m]$上有最大值 6，最小值 5，则实数 m 的取值范围是________．

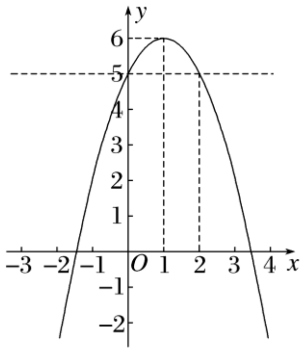
答案　$[1,2]$

解析　由题意知，$f(x)=-(x-1)^2+6$，

则 $f(0)=f(2)=5=f(x)_{\min}$，

$f(1)=6=f(x)_{\max}$，

函数 $f(x)$的图象如图所示，



则 $1\leqslant m\leqslant 2$.

课时精练

基础保分练

1．若 $f(x)$是幂函数，且满足$\frac{f(4)}{f(2)}=3$，则 $f\left(\frac{1}{2}\right)$等于(　　)

A．3　B．-3　C.$\frac{1}{3}$　D．$-\frac{1}{3}$

答案　C

解析　设 $f(x)=x^{\alpha}$，则$\frac{4^{\alpha}}{2^{\alpha}}=2^{\alpha}=3$，

$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}=\frac{1}{3}$.

2．若二次函数 $g(x)$满足 $g(1)=1$，$g(-1)=5$，且图象过原点，则 $g(x)$的解析式为(　　)

A．$g(x)=2x^2-3x$

B．$g(x)=3x^2-2x$

C．$g(x)=3x^2+2x$

D．$g(x)=-3x^2-2x$

答案　B

解析　二次函数 $g(x)$满足 $g(1)=1$，$g(-1)=5$，且图象过原点，

设二次函数为 $g(x)=ax^2+bx$，

可得$\begin{cases}a+b=1,\\a-b=5,\end{cases}$

解得 $a=3$，$b=-2$，

所求的二次函数为 $g(x)=3x^2-2x$.

3．(2022·延吉检测)若函数 $y=(m^2-3m+3)\cdot x^{m^2+2m-4}$ 为幂函数，且在(0，+∞)上单调递减，则实数 m 的值为(　　)

A．0　B．1 或 2　C．1　D．2

答案　C

解析　由于函数 $y=(m^2-3m+3)x^{m^2+2m-4}$ 为幂函数，

所以 $m^2-3m+3=1$，解得 $m=1$ 或 $m=2$，

当 $m=1$ 时，$y=x^{-1}=\frac{1}{x}$，在(0，+∞)上单调递减，符合题意．

当 $m=2$ 时，$y=x^4$，在(0，+∞)上单调递增，不符合题意．

4．已知函数 $f(x)=x^2-2mx-m+2$ 的值域为[0，+∞)，则实数 m 的值为(　　)

A．−2 或 1　　B．−2

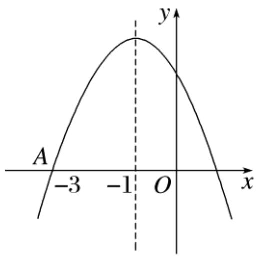
C．1　　D．1 或 2

答案　A

解析　因为 $f(x)=x^2-2mx-m+2=(x-m)^2-m^2-m+2\geqslant -m^2-m+2$，且函数 $f(x)=x^2-2mx-m+2$ 的值域为[0，+∞)，

所以 $-m^2-m+2=0$，解得 $m=-2$ 或 $m=1$.

5．如图是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 图象的一部分，图象过点 $A(-3,0)$，对称轴为直线 $x=-1$.下面四个结论中正确的是(　　)



A．$b^2<4ac$　　B．$2a-b=1$

C．$a-b+c=0$　　D．$5a<b$

答案　D

解析　因为二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象过点 $A(-3,0)$，对称轴为直线 $x=-1$，

所以$\begin{cases}-\frac{b}{2a}=-1,\\9a-3b+c=0,\end{cases}$　解得$\begin{cases}b=2a,\\c=-3a,\end{cases}$

因为二次函数的图象开口方向向下，所以 $a<0$，

对于 A，因为二次函数的图象与 x 轴有两个交点，所以 $b^2-4ac=4a^2+12a^2=16a^2>0$，

所以 $b^2>4ac$，故选项 A 不正确；

对于 B，因为 $b=2a$，

所以 $2a-b=0$，故选项 B 不正确；

对于 C，因为 $a-b+c=a-2a-3a=-4a>0$，

故选项 C 不正确；

对于 D，因为 $a<0$，

所以 $5a<2a=b$，故选项 D 正确．

6．已知函数 $f(x)=x^2-2x+a$ 有两个零点 x_1，x_2，以下结论不正确的是(　　)

A．$a<1$

B．若 $x_1x_2\neq 0$，则$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{2}{a}$

C．$f(-1)=f(3)$

D．函数 $y=f(|x|)$有四个零点

答案　D

解析　二次函数对应二次方程根的判别式 $\Delta=(-2)^2-4a=4-4a>0$，$a<1$，故 A 正确；

由根与系数的关系得，$x_1+x_2=2$，$x_1x_2=a$，

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{2}{a}$，故 B 正确；

因为 $f(x)$的对称轴为 $x=1$，点$(-1，f(-1))$，$(3，f(3))$关于对称轴对称，故 C 正确；

当 $a=0$ 时，$y=f(|x|)=x^2-2|x|$，有 3 个零点，故 D 不正确．

7．(2022·张家口检测)已知幂函数 $f(x)=mx^n+k$ 的图象过点$\left(\frac{1}{16}，\frac{1}{4}\right)$，则 $m-2n+3k=$________．

答案　0

解析　因为 $f(x)$是幂函数，

所以 $m=1$，$k=0$，

又 $f(x)$的图象过点$\left(\frac{1}{16}，\frac{1}{4}\right)$，

所以$\left(\frac{1}{16}\right)^n=\frac{1}{4}$，

解得 $n=\frac{1}{2}$,

所以 $m-2n+3k=0$.

8．已知函数 $f(x)=4x^2+kx-8$ 在$[-1,2]$上不单调，则实数 k 的取值范围是________.

答案　$(-16,8)$

解析　函数 $f(x)=4x^2+kx-8$ 的对称轴为直线 $x=-\frac{k}{8}$，则 $-1<-\frac{k}{8}<2$,

解得 $-16<k<8$.

9．已知二次函数 $f(x)=ax^2+(b-2)x+3$，且-1，3 是函数 $f(x)$的零点.

(1)求 $f(x)$的解析式，并解不等式 $f(x)\leqslant 3$；

(2)若 $g(x)=f(\sin x)$，求函数 $g(x)$的值域.

解　(1)由题意得$\begin{cases}-1+3=-\frac{b-2}{a},\\ -1\times 3=\frac{3}{a},\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=-1,\\ b=4,\end{cases}$

$\therefore f(x)=-x^2+2x+3$,

$\therefore$当 $-x^2+2x+3\leqslant 3$ 时，即 $x^2-2x\geqslant 0$,

解得 $x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant 0$,

$\therefore$不等式的解集为$(-\infty，0]\cup[2，+\infty)$.

(2)令 $t=\sin x$,

则 $g(t)=-t^2+2t+3=-(t-1)^2+4$，$t\in[-1,1]$,

当 $t=-1$ 时，$g(t)$有最小值 0,

当 $t=1$ 时，$g(t)$有最大值 4,

故 $g(t)\in[0,4]$.

$\therefore g(x)$的值域为$[0,4]$.

10．(2022·烟台莱州一中月考)已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，且满足 $f(0)=2$，$f(x+1)-f(x)=2x+1$.

(1)求函数 $f(x)$的解析式；

(2)当 $x\in[t，t+2](t\in\mathbf{R})$时，求函数 $f(x)$的最小值 $g(t)$(用 t 表示).

解 (1)因为二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 满足 $f(0)=2$，$f(x+1)-f(x)=2x+1$，

所以$\begin{cases}c=2,\\a(x+1)^2+b(x+1)+c-(ax^2+bx+c)\\\quad=2x+1,\end{cases}$

即$\begin{cases}c=2,\\2ax+b+a=2x+1,\end{cases}$

所以$\begin{cases}c=2,\\2a=2,\\b+a=1,\end{cases}$

解得$\begin{cases}c=2,\\a=1,\\b=0,\end{cases}$ 因此 $f(x)=x^2+2$.

(2)因为 $f(x)=x^2+2$ 是图象的对称轴为直线 $x=0$，且开口向上的二次函数，

当 $t\geqslant0$ 时，$f(x)=x^2+2$ 在 $x\in[t，t+2]$上单调递增，

则 $f(x)_{\min}=f(t)=t^2+2$；

当 $t+2\leqslant0$，即 $t\leqslant-2$ 时，

$f(x)=x^2+2$ 在 $x\in[t，t+2]$上单调递减，

则 $f(x)_{\min}=f(t+2)=(t+2)^2+2=t^2+4t+6$；

当 $t<0<t+2$，

即 $-2<t<0$ 时，$f(x)_{\min}=f(0)=2$，

综上 $g(t)=\begin{cases}t^2+2，t\geqslant0,\\2，\ -2<t<0,\\t^2+4t+6，t\leqslant-2.\end{cases}$

技能提升练

11．(2022·安康模拟)已知函数 $f(x)=2x^2-mx-3m$，则“$m>2$”是“$f(x)<0$ 对 $x\in[1,3]$恒成立”的(　　)

A．充分不必要条件

B．充要条件

C．必要不充分条件

D．既不充分也不必要条件

答案　C

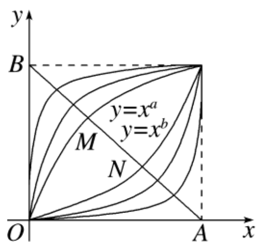
解析　若 $f(x)<0$ 对 $x\in[1,3]$恒成立，

则$\begin{cases}f(1)=2-4m<0,\\f(3)=18-6m<0,\end{cases}$　解得 $m>3$，

$\{m|m>3\}$是$\{m|m>2\}$的真子集，

所以"$m>2$"是"$f(x)<0$ 对 $x\in[1,3]$恒成立"的必要不充分条件．

12.幂函数 $y=x^{\alpha}$，当 α 取不同的正数时，在区间[0,1]上它们的图象是一组美丽的曲线(如图)，设点 $A(1,0)$，$B(0,1)$，连接 AB，线段 AB 恰好被其中的两个幂函数 $y=x^{a}$，$y=x^{b}$ 的图象三等分，即有 $BM=MN=NA$，那么 $a-\dfrac{1}{b}$等于(　　)



A．0　B．1　C．$\dfrac{1}{2}$　D．2

答案　A

解析　由 $BM=MN=NA$，点 $A(1,0)$，$B(0,1)$，

$\therefore M\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$，$N\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$，

将两点坐标分别代入 $y=x^{a}$，$y=x^{b}$，

得 $a=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{2}{3}$，$b=\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{1}{3}$，

$\therefore a-\dfrac{1}{b}=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{1}{3}}=0.$

13．(2022·江苏海安高级中学模拟)函数 $f(x)=x^{2}-4x+2$ 在区间$[a，b]$上的值域为$[-2,2]$，则 $b-a$ 的取值范围是________．

答案　[2,4]

解析　解方程 $f(x)=x^2-4x+2=2$，

解得 $x=0$ 或 $x=4$，

解方程 $f(x)=x^2-4x+2=-2$，解得 $x=2$，

由于函数 $f(x)$在区间$[a，b]$上的值域为$[-2,2]$.

若函数 $f(x)$在区间$[a，b]$上单调，

则$[a，b]=[0,2]$或$[a，b]=[2,4]$，

此时 $b-a$ 取得最小值 2；

若函数 $f(x)$在区间$[a，b]$上不单调，且当 $b-a$ 取最大值时，$[a，b]=[0,4]$，所以 $b-a$ 的最大值为 4.

所以 $b-a$ 的取值范围是$[2,4]$.

14．设关于 x 的方程 $x^2-2mx+2-m=0(m\in\mathbf{R})$的两个实数根分别是 α，β，则 $\alpha^2+\beta^2+5$ 的最小值为________.

答案　7

解析　由题意有$\begin{cases}\alpha+\beta=2m,\\ \alpha\beta=2-m,\end{cases}$

且 $\Delta=4m^2-4(2-m)\geqslant0$，

解得 $m\leqslant-2$ 或 $m\geqslant1$，

$\alpha^2+\beta^2+5=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+5=4m^2+2m+1$，

令 $f(m)=4m^2+2m+1$，

而 $f(m)$图象的对称轴为 $m=-\frac{1}{4}$，

且 $m\leqslant-2$ 或 $m\geqslant1$，

所以 $f(m)_{\min}=f(1)=7$.

拓展冲刺练

15．关于 x 的方程$(x^2-2x)^2-2(2x-x^2)+k=0$，下列命题正确的有________．(填序号)

①存在实数 k，使得方程无实根；

②存在实数 k，使得方程恰有 2 个不同的实根；

③存在实数 k，使得方程恰有 3 个不同的实根；

④存在实数 k，使得方程恰有 4 个不同的实根．

答案　①②

解析　设 $t=x^2-2x$，

方程化为关于 t 的二次方程 $t^2+2t+k=0$.(*)

当 $k>1$ 时，方程(*)无实根，故原方程无实根；

当 $k=1$ 时，可得 $t=-1$，则 $x^2-2x=-1$，原方程有两个相等的实根 $x=1$；

当 $k<1$ 时，方程(*)有两个实根 t_1，$t_2(t_1<t_2)$，

由 $t_1+t_2=-2$ 可知，$t_1<-1$，$t_2>-1$.

因为 $t=x^2-2x=(x-1)^2-1\geqslant-1$，

所以 $x^2-2x=t_1$ 无实根，$x^2-2x=t_2$ 有两个不同的实根．

综上可知，①②正确，③④错误．

16．已知 a，b 是常数且 $a\neq0$，$f(x)=ax^2+bx$ 且 $f(2)=0$，且使方程 $f(x)=x$ 有等根．

(1)求 $f(x)$的解析式；

(2)是否存在实数 m，$n(m<n)$，使得 $f(x)$的定义域和值域分别为$[m，n]$和$[2m，2n]$?

解　(1)由 $f(x)=ax^2+bx$，且 $f(2)=0$，

则 $4a+2b=0$，

又方程 $f(x)=x$，即 $ax^2+(b-1)x=0$ 有等根，

得 $b=1$，从而 $a=-\frac{1}{2}$，

所以 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x$.

(2)假定存在符合条件的 m，n，由(1)知

$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}$，

则有 $2n\leqslant\frac{1}{2}$，即 $n\leqslant\frac{1}{4}$.

又 $f(x)$图象的对称轴为直线 $x=1$，

则 $f(x)$在$[m，n]$上单调递增，

于是得$\begin{cases} m<n\leqslant\frac{1}{4}, \\ f(m)=2m, \\ f(n)=2n, \end{cases}$ 即$\begin{cases} m<n\leqslant\frac{1}{4}, \\ -\frac{1}{2}m^2+m=2m, \\ -\frac{1}{2}n^2+n=2n, \end{cases}$

解方程组得 $m=-2$，$n=0$，

所以存在 $m=-2$，$n=0$，使函数 $f(x)$在$[-2,0]$上的值域为$[-4,0]$．