NP完全性理论

—计算复杂性理论

1 图灵机

- **可解性**：问题及其可解性可用函数和可计算性来代替

- **可计算性理论**：研究计算的一般性质的数学理论，它通过建立计算的数学模型（例如抽象计算机），精确区分哪些是可计算的，哪些是不可计算的。

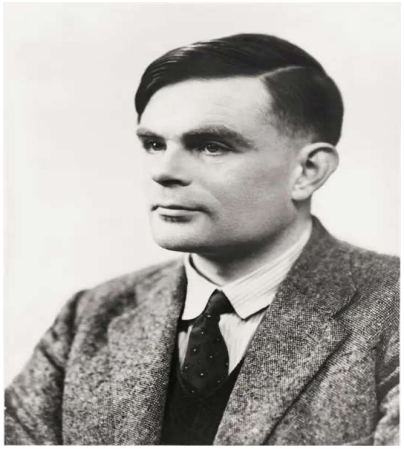
- **可计算函数**：能够在抽象计算机上编出程序计算其值的函数。这样就可以讨论哪些函数是可计算的，哪些函数是不可计算的

- **Church-Turing论题**：若一函数在某个合理的计算模型上可计算，则它在图灵机上也是可计算的。

- **不可计算性**：很多问题和函数是无法用具有有穷描述的过程完成计算

1 图灵机

艾伦·麦席森·图灵(1912.6.23-1954.6.7)，英国计算机科学家、数学家、逻辑学家、密码分析学家、理论生物学家，计算机科学之父、人工智能之父，英国皇家学会院士。



1935年当选为剑桥大学国王学院研究员；1936年提出被称为图灵机的逻辑机通用模型；1938年获普林斯顿大学博士学位；1939年开始在英国军方工作，期间破解德国密码系统恩尼格玛密码机和金枪鱼密码机，加速了盟军取得了二战的胜利；1946年获大英帝国勋章；1945年-1948年在伦敦泰丁顿国家物理实验室负责自动计算引擎（ACE）的研究工作；1948年任曼彻斯特大学高级讲师、自动数字计算机（Madam）项目的负责人助理；1949年任曼彻斯特大学计算机实验室副主任；1950年提出机器具备思维的可能性和“图灵测试”的概念；1951年当选为英国皇家学会院士；1954年服用含氰化物的苹果去世，享年41岁 。

1 图灵机

1.1 多带图灵机

停机问题：能否写一个程序正确判定输入给它的任何一个程序是否会停机?

设程序halts(P,X)总是正确地判定程序P在其输入X上是否停机:若停机，则返回yes；否则死循环，返回no。设另有一程序:

```
diagonal(Y){
    a: if halts(Y,Y) then
            goto a;
        else halt;
}
```

功能：若halts断定当程序Y用其自身Y作为输入时Y停机,则diagonal(Y)死循环；否则它停机

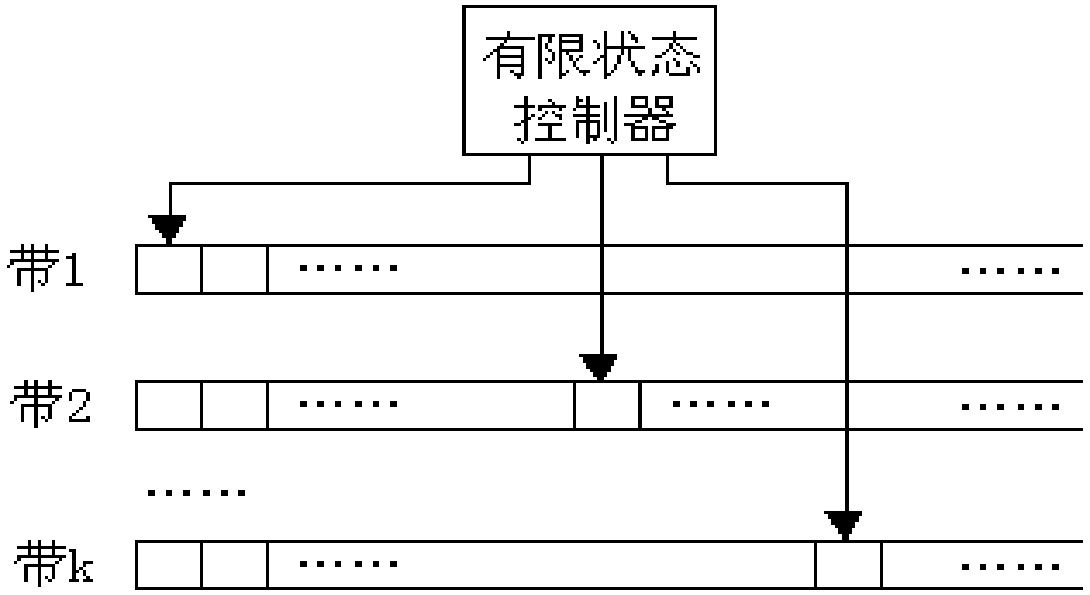
diagonal（diagonal）是否停机？**不可判定**

它停机当且仅当halts(diagonal, diagonal)返回否，也就是:diagonal停机当且仅当它自己不停机，矛盾!

即：halts(P,X)并不存在，停机问题是不可解的!

1 图灵机

1.1 多带图灵机



有单带、多带等变种，计算能力等价

1 图灵机

1.1 多带图灵机

根据有限状态控制器的当前状态及每个读写头读到的带符号，图灵机的一个计算步可实现下面3个操作之一或全部。

(1)改变有限状态控制器中的状态。

(2)清除当前读写头下的方格中原有带符号并写上新的带符号。

(3)独立地将任何一个或所有读写头，向左移动一个方格(L)或向右移动一个方格(R)或停在当前单元不动(S)。

k带图灵机可形式化地描述为一个7元组(Q,T,I,δ,b,q_0,q_f)，其中:

(1)Q是有限个状态的集合。 (2)T是有限个带符号的集合。

(3)I是输入符号的集合，$I\subseteq T$. (4)b是惟一的空白符，$b\in T-I$。

(5)q_0是初始状态。 (6)q_f是终止(或接受)状态。

(7)δ是移动函数。它是从$Q\times T^k$的某一子集映射到$Q\times(T\times\{L，R，S\})^k$的函数。

1 图灵机

1.1 多带图灵机

图灵机既可作为语言接受器，也可作为计算函数的装置。

图灵机M的时间复杂性T(n)是它处理所有长度为n的输入所需的最大计算步数。如果对某个长度为n的输入，图灵机不停机，T(n)对这个n值无定义。

图灵机的空间复杂性S(n)是它处理所有长度为n的输入时，在k条带上所使用过的方格数的总和。如果某个读写头无限地向右移动而不停机，S(n)也无定义。

1 图灵机

1.2 确定性图灵机与非确定性图灵机

在图灵机计算模型中，移动函数**δ是单值的**，即对于$Q\times T^k$中的每一个值，当它属于δ的定义域时，$Q\times(T\times\{L，R，S\})^k$中只有惟一的值与之对应，称这种图灵机为**确定性图灵机**，简记为**DTM**(Deterministic Turing Machine)。

非确定性图灵机（NDTM）：一个k带的非确定性图灵机M是一个7元组：(Q，T，I，δ，b，q_0，q_f)。与确定性图灵机不同的是非确定性图灵机允许移动函数**δ具有不确定性**，即对于$Q\times T^k$中的每一个值$(q;x_1,x_2,\ldots,x_k)$，当它属于δ的定义域时，$Q\times(T\times\{L，R，S\})^k$中有惟一的一个**子集**$\delta(q;x_1,x_2,\ldots,x_k)$与之对应。可以在$\delta(q;x_1,x_2,\ldots,x_k)$中随意选定一个值作为它的函数值。

1 图灵机

1.2 非确定性图灵机

非确定型图灵机M在输入串上的计算过程可以表示为一棵树，不同的分支对应着每一步计算的不同的可能性。只要有任意一个分支进入接受状态，则称M接受；只要有任意一个分支进入拒绝状态，则称M拒绝；某些分支可能永远无法停机，但只要有一个分支可以进入接受或拒绝状态，我们就说M在输入上可停机。注意，我们规定 M必须是无矛盾的，即它不能有某个分支接受 而同时另一个分支拒绝，这样有矛盾的非确定型图灵机是不合法的。

1 图灵机

1.2 非确定性图灵机

定理1： 对于任意一个非确定型图灵机M，存在一个确定型图灵机M'，使得它们的语言相等，即L(M)=L(M')。

证明：对于非确定型图灵机M，构造一个确定型图灵机M'如下：

1.令k=1；

2.深度优先地模拟M的每个分支的计算，但每个分支最多只计算k步，如果某个计算分支在k步内可以停机，则M'也停机，并将该计算分支的计算结果输出。

3.令k增加1，跳转到上一步继续执行。

显然，若M有某个分支可以停机，则此M'也一定会找到该分支并停机。因此L(M)=L(M') 。

定理2： 对于一台时间复杂性为T(n)的非确定性图灵机，可以用一台时间复杂性为$O(C^{T(n)})$的确定型图灵机模拟，其中C为一常数。

2 问题变换与计算复杂性归约

通过问题变换的技巧，可以将2个不同问题的计算复杂性联系在一起。这样就可以将一个问题的计算复杂性归结为另一个问题的计算复杂性，从而实现问题的计算复杂性归约。

具体地说，假设有2个问题A和B，将**问题A变换为问题B**是指：
(1)将问题A的输入变换为问题B的适当输入。
(2)解出问题B。
(3)把问题B的输出变换为问题A的正确解。
若用O(τ(n))时间能完成上述变换的第(1)步和第(3)步，则称问题A是τ(n)时间可变换到问题B，且简记为$A \propto_{\tau(n)} B$。其中的n通常为问题A的规模(大小)。
当τ(n)为n的多项式时，称问题A可在多项式时间内变换为问题B。特别地，当τ(n)为n的线性函数时，称问题A可线性地变换为问题B。

2 问题变换与计算复杂性归约

问题的变换与问题的计算复杂性归约的关系：

命题1(计算时间下界归约)：若已知问题A的计算时间下界为T(n)，且问题A是τ(n)可变换到问题B，即$A\propto_{\tau(n)}B$，则T(n)-O(τ(n))为问题B的一个计算时间下界。

命题2(计算时间上界归约)：若已知问题B的计算时间上界为T(n)，且问题A是τ(n)可变换到问题B，即$A\propto_{\tau(n)}B$，则T(n)+O(τ(n))是问题A的一个计算时间上界。

在命题1和命题2中，当τ(n)=o(T(n))时，问题A的下界归约为问题B的下界，问题B的上界归约为问题A的上界。

3 P类与NP类语言

P类和NP类语言的定义：

P={L|L是一个能在**多项式时间内**被一台**DTM**所接受的语言}

NP={L|L是一个能在**多项式时间**内被一台**NDTM**所接受的语言}

由于一台确定性图灵机可看作是非确定性图灵机的特例，所以可在多项式时间内被确定性图灵机接受的语言也可在多项式时间内被非确定性图灵机接受。故**P** $\subseteq$ **NP**。

3 P类与NP类语言

NP类语言举例——无向图的团问题。

该问题的输入是一个有n个顶点的无向图G=(V，E)和一个整数k。要求判定图G是否包含一个k顶点的**完全子图(团)**，即判定是否存在V'⊆V，|V'|=k，且对于所有的u，v∈V'，有(u，v)∈E。

若用邻接矩阵表示图G，用二进制串表示整数k，则团问题的一个实例可以用长度为 $n^2+\log k+1$ 的二进位串表示。因此，团问题可表示为语言：

CLIQUE={w#v|w，v∈{0，1}*，以w为邻接矩阵的图G有一个k顶点的团，其中v是k的二进制表示。}

3 P类与NP类语言

接受该语言CLIQUE的**非确定性算法**：用非确定性选择指令选出包含k个顶点的候选顶点子集V，然后确定性地检查该子集是否是团问题的一个解。算法分为3个阶段：

算法的第一阶段将输入串w#v分解，并计算出$n=\sqrt{|w|}$，以及用v表示的整数k。若输入不具有形式w#v或|w|不是一个平方数就拒绝该输入。显而易见，第一阶段可$O(n^2)$在时间内完成。

在算法的第二阶段中，非确定性地选择V的一个k元子集V'$\subseteq$V。

算法的第三阶段是确定性地检查V'的团性质。若V'是一个团则接受输入，否则拒绝输入。这显然可以在$O(n^4)$时间内完成。因此，整个算法的时间复杂性为$O(n^4)$。

非确定性算法在多项式时间内接受语言CLIQUE，故CLIQUE$\in$NP。

4 多项式时间验证

多项式时间可验证语言类VP可定义为：

VP={L|L∈∑*，∑为一有限字符集，存在一个多项式p和一个多项式时间验证算法A(X，Y)使得对任意X∈∑*，X∈L当且仅当存在Y∈∑*，|Y|≤p(|X|)且A(X，Y)=1}。

定理3：VP=NP

VP⊆NP：对任意L∈VP，设p是一个多项式且A是一个多项式时间验证算法，则下面的非确定性算法接受语言L：
(1) 对于输入X，非确定性地产生一个字符串Y∈∑*。
(2) 当A(X, Y)=1时，接受X。
该算法的步骤(1)与团问题的第二阶段的非确定性选择算法一样，至多在O(|X|)的时间内完成。步骤(2)的计算时间是|X|和|Y|的多项式，而|Y|≤p(|X|)，因此，它也是|X|的多项式。整个算法可在多项式时间内完成。因此，L ∈NP。由此可见， VP⊆NP。

4 多项式时间验证

定理3：VP=NP

NP⊆VP：设$L\in NP$，$L\in\sum^*$，且非确定性图灵机M在多项式时间p内接受语言L。设M在任何情况下只有不超过d个的下一动作选择，则对于输入串X，M的任一动作序列可用$\{0,1,\ldots,d-1\}$的长度不超过$p(|X|)$的字符串来编码。不失一般性，设$|\sum|\geq d$。验证算法A(X,Y)用于验证“Y是M上关于输入X的一条接受计算路径的编码”。即当Y是这样一个编码时，A(X,Y)=1。A(X,Y)=1显然可在多项式时间内确定性地进行验证，且L={X|存在Y使得$|Y|\leq p(|X|)$且A(X,Y)=1}。因此，$L\in VP$。由此可知，$NP\subseteq VP$。综合两者，可得VP=NP。

例如(**哈密顿回路问题**)：一个无向图G含有哈密顿回路吗?

无向图G的哈密顿回路是通过G的每个顶点恰好一次的简单回路。

可用语言HAM-CYCLE 定义该问题如下：

HAM-CYCLE={G|G含有哈密顿回路}

5 NP完全问题

设 $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$，$L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ 是2个语言。所谓语言L_1能在**多项式时间**内**变换**为语言L_2(简记为$L_1 \propto_p L_2$)是指存在映身f: $\Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$，且f满足：

(1)有一个计算f的多项式时间确定性图灵机；

(2)对于所有x$\in \Sigma_1^*$，x$\in L_1$，当且仅当f(x)$\in L_2$。

定义：语言L是**NP完全**的当且仅当

(1)L$\in$NP；

(2)对于所有L'$\in$NP有L' $\propto_p$ L。

如果有一个语言L满足上述性质(2)，但不一定满足性质(1)，则称该语言是**NP难（NP-hard）**的。所有NP完全语言构成的语言类称为**NP完全语言类**，记为**NPC**。

5 NP完全问题

定理4：设L是NP完全的，则
(1)$L \in P$当且仅当$P = NP$；
(2)若$L \propto_p L_1$，且$L_1 \in NP$，则L_1是NP完全的。

证明: (1) 若P=NP，则显然$L \in P$。反之，设$L \in P$，而$L_1 \in NP$。则L可在多项式时间p_1内被确定图灵机M所接受。又由L的NP完全性知$L_1 \propto_p L$，即存在映射f，使$L=f(L_1)$。设N是在多项式时间p_2内计算f的确定图灵机。用图灵机M和N构造识别语言L_1的算法A如下:
i) 对于输入x，用N在$p_2(|x|)$时间内计算出f(x)。
ii) 在时间$|f(x)|$内将读写头移到f(x)的第一个符号处。
iii)用M在时间$p_1(|x|)$内判定$f(x) \in L$。若$f(x) \in L$，则接受x，否则拒绝x。
上述算法显然可以接受语言L_1，其计算时间为$p_2(|x|)+|f(x)|+p_1(|x|)$。由于图灵机一次只能在一个方格中写入一个符号，故$|f(x)| \leq |x|+p_2(|x|)$。因此，存在多项式r使得$p_2(|x|)+|f(x)|+p_1(|x|) \leq r(x)$。因此，$L_1 \in P$。由$L_1$的任意性，知P=NP

5 NP完全问题

定理4：设L是NP完全的，则
(1)$L \in P$当且仅当$P = NP$；
(2)若$L \propto_p L_1$，且$L_1 \in NP$，则L_1是NP完全的。

证明: (2) 只要证明对任意的$L' \in NP$，有$L' \propto_p L_1$。由于L是NP完全的，故存在多项式时间变换f使$L=f(L')$。又由于$L \propto_p L_1$，故存在一多项式时间变换g使$L_1=g(L)$。因此，若取f和g的复合函数$h=g(f)$，则$L_1=h(L')$。易知h为一多项式。因此，$L' \propto_p L_1$。由L'的任意性，即知$L_1 \in NPC$。

5 NP完全问题

定理4：设L是NP完全的，则
(1)$L \in P$当且仅当$P = NP$；
(2)若$L \propto_p L_1$，且$L_1 \in NP$，则L_1是NP完全的。

- ✓ 由(1)可知：如果任一NPC问题可在多项式时间内求解，则所有NP中的问题都可在多项式时间内求解。反之，若$P \neq NP$，则所有NPC问题都不可能在多项式时间内求解。
- ✓ (2)给出了证明一个问题是NPC或NP-hard问题的方法

5 NP完全问题

✓ NPC和NP-hard关系

– NP-hard问题至少跟NPC问题一样难。

– NPC问题肯定是NP-hard的，但反之不一定

例：停机问题是NP-hard而非NPC的。

∵该问题不可判定，即无任何算法(无论何复杂度)求解该问题

∴该问题∉NP。但是

可满足问题SAT$\propto_p$停机问题

5 NP完全问题

✓ NP=？P

∵确定型图灵机是非确定型图灵机的特例，∴**P⊆NP**

是否有**NP⊆P**？即是否**NP=P**？

美国麻省的**Clay**数学研究所于**2000**年**5**月**24**日在巴黎法兰西学院宣布：对七个“千年数学难题”中的每一个均悬赏**100**万美元，而问题**NP=？P**位列其首:

1.P问题对NP问题　　2.霍奇猜想

3.庞加莱猜想(2002.11-2003.7，俄罗斯数学家佩雷尔曼在3篇论文预印本中证明了几何化猜想，2006被授予菲尔兹奖)

4.黎曼假设　　5.杨－米尔斯存在性和质量缺口

6.纳维叶－斯托克斯方程的存在性与光滑性

7.贝赫和斯维讷通－戴尔猜想

5 NP完全问题

✓ P、NP、NPC和NP-hard之关系

NPC是NP中最难的问题，但是NP-hard至少与NPC一样难

✓ 如何证明问题q是NP-hard或是NPC的？

要证q是NP-hard的，只要找到1个已知的NPC或NPH问题p，然后将p多项式归约到q即可。若还能验证q∈NP，则q是NPC的。

6 Cook定理

定理5 (Cook定理)：布尔表达式的可满足性问题SAT是NP完全的，即SAT∈NPC。

- ✓ **Cook的贡献：第一个NPC问题**

  史提芬·库克(Stephen Arthur Cook，1939一)NP完全性理论的奠基人，他在1971年论文“The Complexity of Theorem Proving Procedures”中给出了第一个NP完备的证明，即Cook定理，且证明了：SAT∈P当且仅当P=NP。

- ✓ 1961年获得美国密西根大学理学学士学位；1962年获得哈佛大学理学硕士学位；1966年获得哈佛大学博士；1966年至1970年担任加州大学伯克利分校助理教授；1970年至1975年担任多伦多大学副教授；1975年晋升为多伦多大学教授；1982年获得图灵奖。

6 Cook定理

布尔表达式的可满足性问题(SAT)

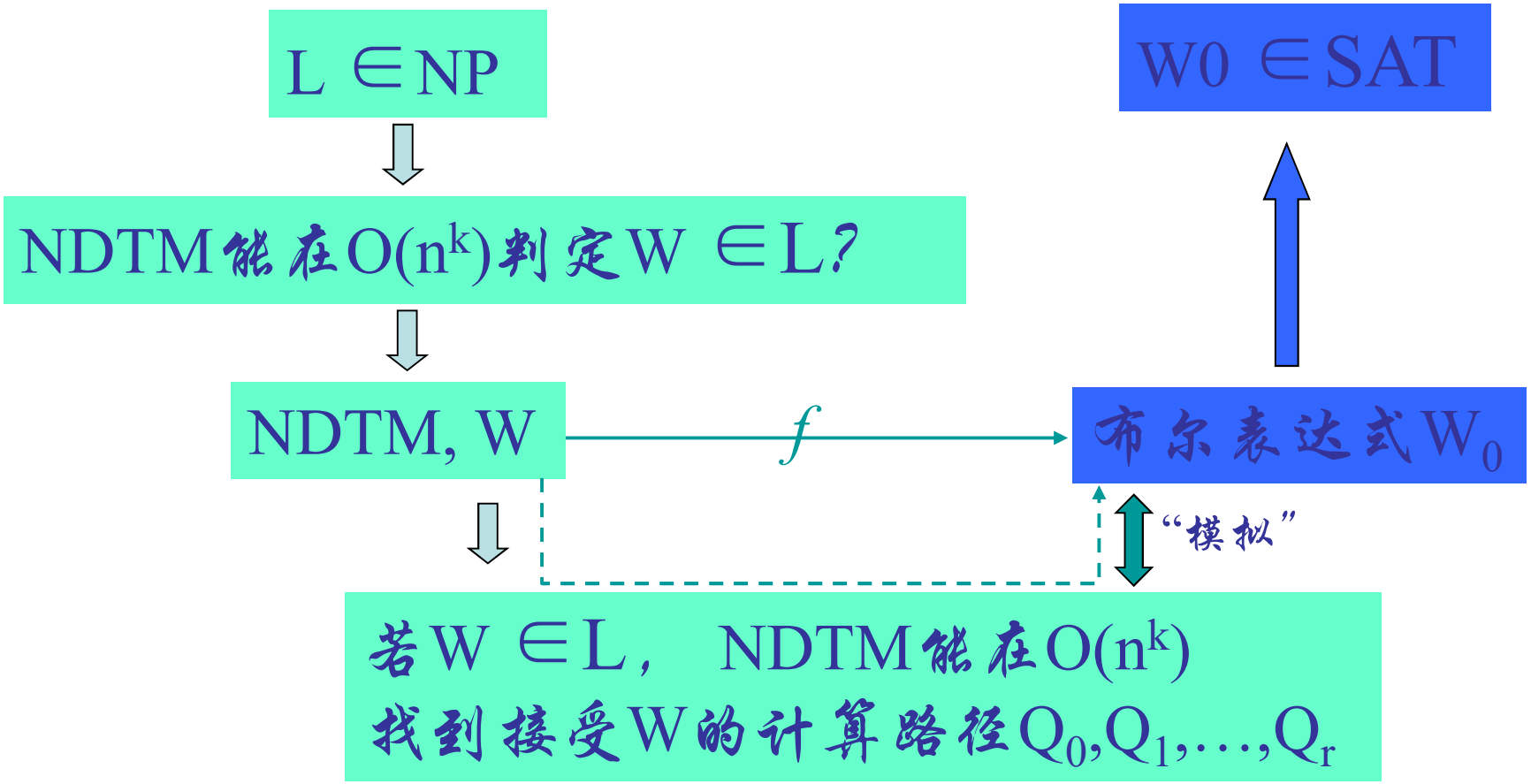
- ✓ SAT问题是指给定*n*个布尔变量$x_1, x_2, \ldots, x_n$的*m*个布尔表达式 $A_1, A_2, \ldots, A_m$，确定是否存在某种对各布尔变量的0,1赋值，使得布尔表达式$A_1, A_2, \ldots, A_m$为1（为真）？
- ✓ 例

$$A = (x_1 \wedge (x_2 \vee \overline{x}_3)) \wedge (\overline{x}_1 \vee (\overline{x}_2 \wedge \overline{x}_3))$$

$$A = (x_1 \vee (x_2 \wedge x_3)) \wedge (x_1 \vee (\overline{x}_2 \wedge \overline{x}_3)) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$$

6 Cook定理

证明思路



6 Cook定理

具体方法

- ✓ **L** ∈**NP**，设**M**是一台能在多项式时间内识别**L**的非确定性图灵机，而**W**是对**M**的一个输入
- ✓ 由**M**和**W**能在多项式时间内构造一个布尔表达式W_0
- ✓ 模拟由**M**接受**W**的所有瞬象序列
- ✓ 使得W_0是可满足的当且仅当**M**接受**W**

6 Cook定理

已知与假设

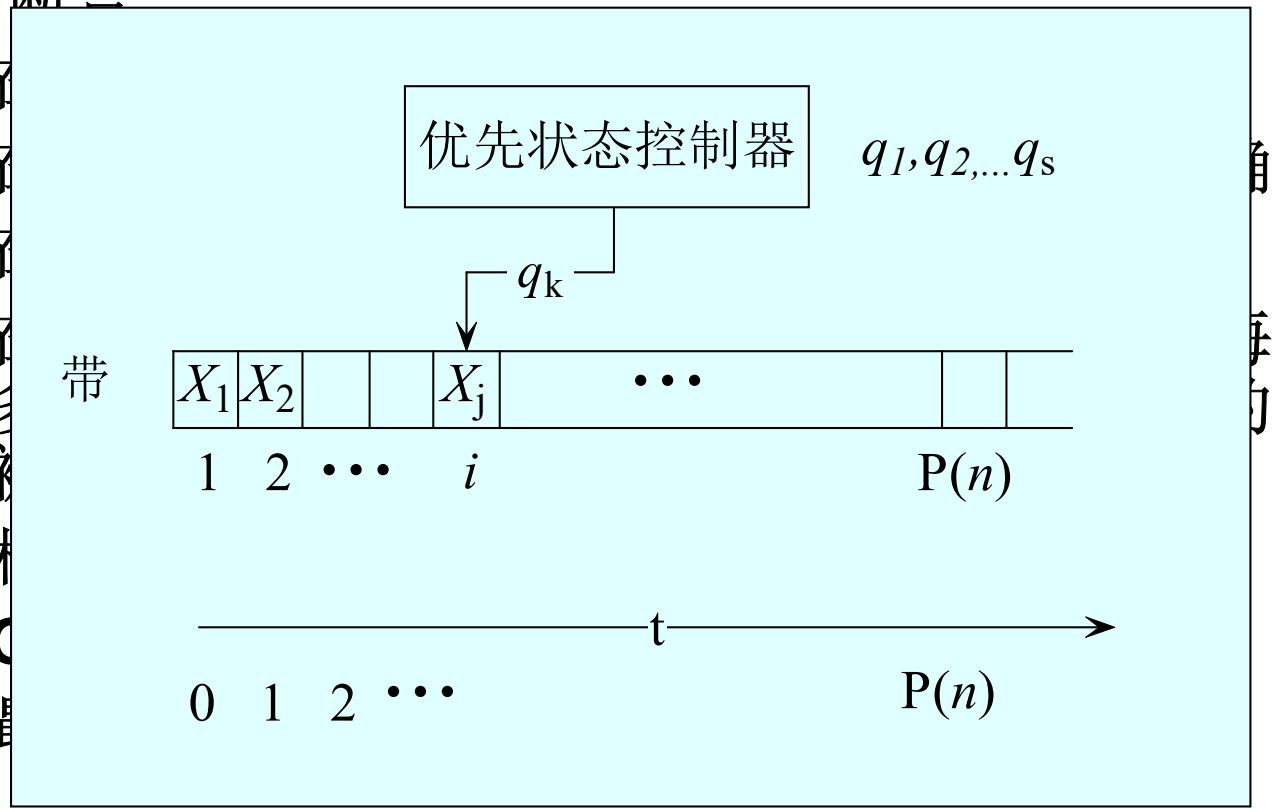
- 不难证明， L ∈NP能由一台单带的NDTM在多项式时间内识别。
- 设M为一台单带NDTM
  - s个状态$q_0,q_1,\ldots,q_{s-1}$
  - m个带符号$X_0, X_1,\ldots,X_m$
  - 多项式P(n)是M的识别L时间复杂性。
- 设W是M的一个长度为n的输入，若M接受W，只需不超过P(n)次移动 。
- 对于W,存在M的一个瞬像序列$Q_0,Q_1,\ldots,Q_r$，其中Q_0为初始瞬像， Q_r为接受瞬像。可以令r=P(n)，若不足可用空动作补齐

6 Cook定理

□ 与瞬像序列$Q_0,Q_1,\ldots,Q_r$等价的断言

- 7条断言

1. 在
2. 在 …确定；
3. 在
4. 在 …每次最 …的符号
5. 在
6. C
7. 最



6 Cook定理

□ 引进命题

- C< i, j, t >=1当且仅当在时刻t，M输入带的第i个方格中的带符号为X_j;其中，$1\le i\le P(n)$, $1\le j\le m$, $0\le t\le P(n)$。
- S< k, t >=1当且仅当在时刻t，M的状态为q_k；其中$1\le k\le m$, $0\le t\le P(n)$,
- H< i, t >=1当且仅当在时刻t，读写头扫描第i个方格;其中，$1\le i\le P(n)$, $0\le t\le P(n)$。
- 总共最多有$O(P^2(n))$个命题。 //$O(P^2(n)\log n)$

6 Cook定理

引进谓词

- $U(x_1,x_2,\ldots,x_r)$=1当且仅当各变量$x_1,x_2,\ldots,x_r$中只有一个变量取值1时。

$$U(x_1,x_2,\ldots,x_r)=(x_1+x_2+\ldots+x_r)\prod_{i\neq j}(\overline{x}_i+\overline{x}_j)$$

- $U(x_1,x_2,\ldots,x_r)$的长度是$O(r^2)$。 //$O(r^2\log n)$

6 Cook定理

构造与断言1对应的布尔表达式A

- 在每一瞬像中读写头恰只扫描一个方格。设A_t表示在时刻t时M的读写头恰好扫描一个方格

$$A_t = U(H<1,t>, H<2,t>, \ldots H<P(n),t>)$$

$$0 \le t \le P(n)$$

$$A = A_0 A_1 \cdots A_{P(n)}$$

$$O(P^3(n))$$

6 Cook定理

□ 构造与断言2对应的布尔表达式B

- 在每一瞬像中，每个方格中的带符号是唯一确定的
- 设B_{it}表示在时刻t，第i个方格中只含有一个带符号

$$B_{it} = U(C<i,1,t>, C<i,2,t>, \ldots C<i,m,t>)$$

$$0 \le t \le P(n)$$

$$B = \prod_{0 \le i,t \le P(n)} B_{it}$$

$$O(P^2(n))$$ //B_{it}长度与n无关

6 Cook定理

□ 构造与断言3对应的布尔表达式C

- 在每一瞬像中恰有一个状态

$$C = \prod_{0 \le t \le P(n)} U(S<0,t>, S<1,t>, \ldots, S<s-1,t>)$$

$O(P(n))$　　//U长度与n无关

6 Cook定理

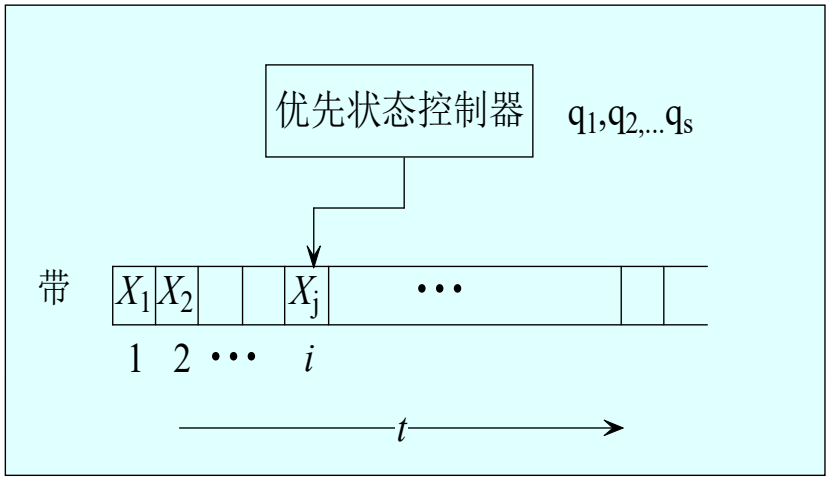
□ 构造与断言4对应的布尔表达式D

- 在该计算路径中，从一个瞬像到下一个瞬像每次最多有一个方格的符号被修改

$$D=\prod_{i,j,t}(C<i,j,t>\equiv C<i,j,t+1>+H<i,t>)$$

//H<i,t>仅在一个方格i处取值1，此时C<i,j,t>≠C<i,j,t+1>

$$O(P^2(n))$$



6 Cook定理

□ 构造与断言5对应的布尔表达式E

- 相继的瞬像是根据移动函数来改变状态的

$$E_{ijkt} = \neg C<i,j,t> + \neg H<i,t> + \neg S<k,t>$$

$$+\sum_{l}(C<i,j_l,t+1>S<k_l,t+1>H<i_l,t+1>)$$

//l遍取当M处于状态q_k且扫描X_j时所有可能的移动，即取遍使得$(q_{kl}, X_{jl}, d_{il}) \in \delta(q_k, X_j)$的一切值

$$E = \prod_{i,j,k,t} E_{ijkt} \qquad O(P^2(n)) \quad //E_{ijkt}长度与n无关$$

6 Cook定理

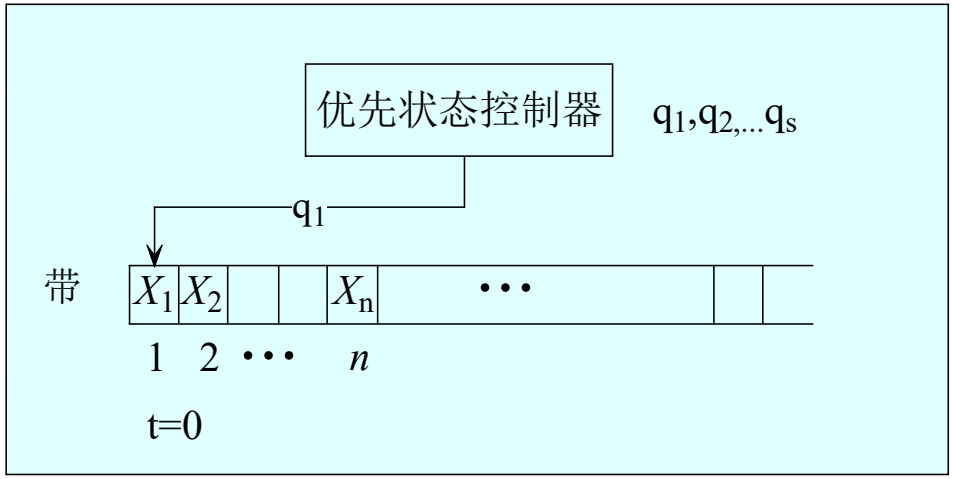
□ 构造与断言6对应的布尔表达式F

- Q_0是M在输入W时的初始瞬像

$$F = S<1,0>H<1,0>\prod_{1\le i\le n} C<i,j_i,0>\prod_{n\le i\le P(n)} C<i,1,0>$$

//t=0时，M处于初始q1状态，读写头在最左边，带上前n个方格为W的符号串，其余方格都是空白符

$O(P(n))$



6 Cook定理

□ 构造与断言7对应的布尔表达式G

- 最后一个瞬像中的状态是接受状态

$$G = S < s-1, P(n) >$$

//q_{s-1}为接受状态

6 Cook定理

□ 构造W_0

$$W_0 = ABCDEFG$$

- 给定可接受的瞬像序列$Q_0,Q_1,\ldots,Q_r$，显然可找到变量C <i, j, t>，S <k,t>和H <i,t>的某个0,1赋值，使W_0取值为1。
- 若有一个使W_0满足的赋值，则可根据其变量的赋值相应地找到可接受计算路径$Q_0,Q_1,\ldots,Q_r$。
- W_0是可满足的当且仅当M接受W。
- 因为的每一个因子最多需要个符号$O(P^3(n))$，而每个符号的长度至多为O(logn)，因此的长度不超过$O(P^3(n)\log n)$。

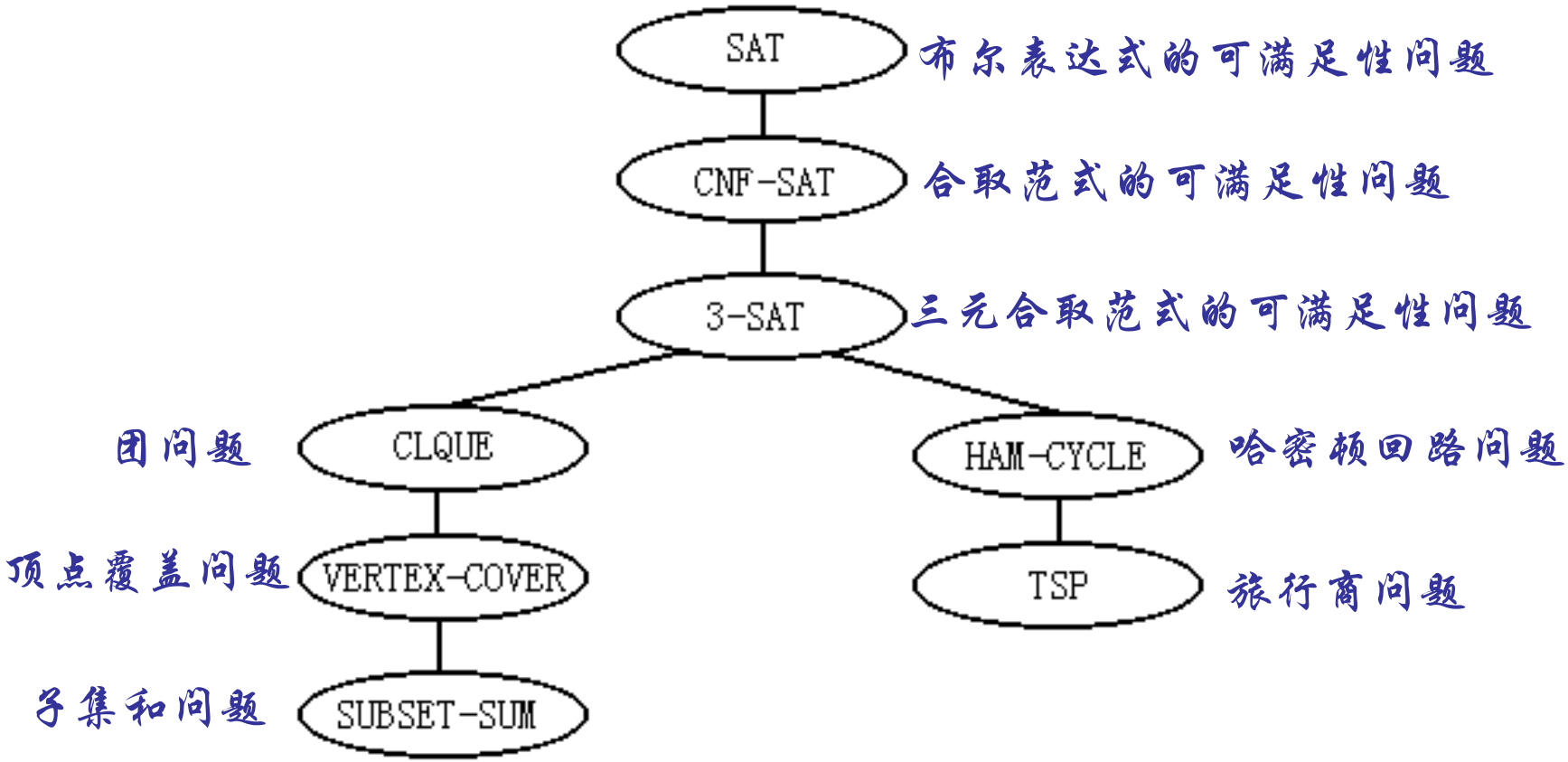
7典型的NP完全问题

✓ Karp的贡献

理查德·卡普（Richard Karp，1935-）1972年论文“Reducibility among Combinatorial Problems”发展和加强了由库克提出的“NP完全性”理论。尤其是库克仅证明了命题演算的可满足问题是NP完全的，而卡普则证明了从组合优化中引出的大多数经典问题(背包问题、覆盖问题、匹配问题、分区问题、路径问题、调度问题等)都是NP完全问题。只要证明其中任一个问题是属于P类的，就可解决计算复杂性理论中最大的一个难题，即P=?NP。

Karp于1955、1956和1959年分别获哈佛大学文学学士、理学硕士和应用数学博士学位，现任UCBerkeley计算机科学讲座教授，美国科学院、美国工程院、美国艺术与科学院、欧洲科学院院士。因其在计算机科学领域的基础贡献曾获图灵奖(1985)、冯诺依曼奖、美国国家科学勋章、哈佛大学百年奖章等奖项.

7 典型的NP完全问题



部分NP完全问题树

合取范式的可满足性问题 (CNF-SAT)

问题描述：给定一个合取范式α，判定它是否可满足。

如果一个布尔表达式是一些因子和之积，则称之为合取范式，简称CNF(Conjunctive Normal Form)。这里的因子是变量 x 或 $\bar{x}$ 。例如：$(x_1+x_2)(x_2+x_3)(\bar{x}_1+\bar{x}_2+x_3)$ 就是一个合取范式，而 $x_1x_2+x_3$ 就不是合取范式。

要证明CNF-SAT∈NPC，只要证明在Cook定理中定义的布尔表达式A，…，G或者已是合取范式，或者有的虽然不是合取范式，但可以用布尔代数中的变换方法将它们化成合取范式，而且合取范式的长度与原表达式的长度只差一个常数因子。

3元合取范式的可满足性问题（3-SAT）

问题描述：给定一个3元合取范式α，判定它是否可满足。

证明思路：

1、3元合取范式是合取范式的特殊情况，所以，也属于NP问题。

2、SAT可用多项式时间归约为3-SAT，即$SAT \propto_p 3\text{-}SAT$：

- ✓给定SAT的一个实例$f=c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m$，它有m个析取子句$c_i$，$1 \le i \le m$和n个命题变元$x_j$，$1 \le j \le n$。
- ✓把f的每个析取子句c_i，变换为等价的子句集合，使每个子句都由三个文字组成。
- ✓则等价的子句集合是一个新的合取范式F，并且$F \Leftrightarrow f$。

3元合取范式的可满足性问题（3-SAT）

问题描述：给定一个3元合取范式α，判定它是否可满足。

证明思路：

考虑四种情况：

（1）c_i刚好有三个文字：则c_i不变；

（2）c_i只有两个文字：$c_i=x_k \vee x_l$，$1 \le k, l \le n$，$k \ne l$。

对c_i作如下的恒等变换：

$$x_k \vee x_l \Leftrightarrow x_k \vee x_l \vee x_s \vee \neg x_s \Leftrightarrow (x_k \vee x_l \vee x_s) \wedge (x_k \vee x_l \vee \neg x_s)$$

（3）c_i只有一个文字：$c_i=x_i$时，同理可得：

$$x_i \Leftrightarrow (x_i \vee x_k \vee x_l) \wedge (x_i \vee x_k \vee \neg x_l) \wedge (x_i \vee \neg x_k \vee x_l) \wedge (x_i \vee \neg x_k \vee \neg x_l)$$

3元合取范式的可满足性问题（3-SAT）

证明思路：

（4）c_i有三个以上文字：

① 假定$c_i=x_1\vee x_2\ldots\vee x_k$，$3<k\leq n$，可把$c_i$转换为由k-2个子句组成的三元合取范式：

$$C_i\Leftrightarrow(x_1\vee x_2\vee y_1)\wedge(x_3\vee\neg y_1\vee y_2)\wedge(x_4\vee\neg y_2\vee y_3)\wedge\ldots\wedge(x_{k-1}\vee x_k\vee\neg y_{k-2})$$

其中，$y_1,\ldots,y_{k-2}$是新增加的命题变元，其值可给定。

②c_i可满足，当且仅当C_i可满足：若c_i可满足，即可使$c_i=x_1\vee x_2\ldots\vee x_k$为真，在$c_i$中，至少有一个文字$x_l$取值为真。对所有的s，$1\leq s\leq l-2$，令$y_s$为真；对所有的t，$l-2<t\leq k-3$，令$y_k$为假。则$C_i$为真。

团问题CLIQUE

问题描述：给定一个无向图G=(V，E)和一个正整数k，判定图G是否包含一个k团，即是否存在，$V' \subseteq V$，$|V'|=k$，且对任意u，w∈V’有(u，w)∈E。

证明思路：

已经知道CLIQUE∈NP。通过3-SAT$\propto_p$CLIQUE来证明CLIQUE是NP难的，从而证明团问题是NP完全的。

顶点覆盖问题
(VERTEX-COVER）

问题描述：给定一个无向图G=(V，E)和一个正整数k，判定是否存在V'⊆V，|V'|=k，使得对于任意(u，v)∈E有u∈V'或v∈V'。如果存在这样的V'，就称V'为图G的一个大小为k顶点覆盖。

证明思路：

首先，VERTEX-COVER∈NP。因为对于给定的图G和正整数k以及一个“证书”V'，验证|V'|=k，然后对每条边(u，v)∈E，检查是否有u∈V'或v∈V'，显然可在多项式时间内完成。

其次，通过CLIQUE$\propto_p$VERTEX-COVER来证明顶点覆盖问题是NP难的。

子集和问题
(SUBSET-SUM)

问题描述：给定整数集合S和一个整数t，判定是否存在S的一个子集S'⊆S，使得S'中整数的和为t。例如，若S={1，4，16，64，256，1040，1041，1093，1284，1344}且t=3754，则子集S'={1，16，64，256，1040，1093，1284}是一个解。

证明思路：

首先，对于子集和问题的一个实例<S，t>，给定一个“证书”S'，要验证$t=\sum_{i\in S'} i$是否成立，显然可在多项式时间内完成。因此，SUBSET-SUM∈NP；

其次，证明VERTEX-COVER$\propto_p$SUBSET-SUM。

哈密顿回路问题
（HAM-CYCLE）

问题描述：给定无向图G=(V，E)，判定其是否含有一哈密顿回路。

证明思路：

首先，已知哈密顿回路问题是一个NP类问题。

其次，通过证明3-SAT$\propto_p$HAM-CYCLE，

得出：HAM-CYCLE$\in$NPC。

旅行售货员问题TSP

问题描述：给定一个无向完全图G=(V，E)及定义在V×V上的一个费用函数c和一个整数k，判定G是否存在经过V中各顶点恰好一次的回路，使得该回路的费用不超过k。

首先，给定TSP的一个实例(G，c，k)，和一个由n个顶点组成的顶点序列。验证算法要验证这n个顶点组成的序列是图G的一条回路，且经过每个顶点一次。另外，将每条边的费用加起来，并验证所得的和不超过k。这个过程显然可在多项式时间内完成，即TSP∈NP。

其次，旅行售货员问题与哈密顿回路问题有着密切的联系。哈密顿回路问题可在多项式时间内变换为旅行售货员问题。即HAM-CYCLE$\propto_p$TSP。从而，旅行售货员问题是NP难的。

因此，TSP∈NPC。