1.1 度量空间 (X, d)

集合 X，$d: X \times X \to [0, +\infty)$，满足

- $d(x, x) \ge 0$，"=" $\Leftrightarrow$ $x = 0$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) + d(y, z) \ge d(x, z)$

赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ （或模空间）

集合 X，$\|\cdot\|: X \to [0, +\infty)$

- $\|x\| \ge 0$，"=" $\Leftrightarrow$ $x = 0$
- $\|x + y\| \ge \|x\| + \|y\|$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

内积空间 $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

集合 X $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \to \mathbb{R}$

- $\langle x, x \rangle \ge 0$，"=" $\Leftrightarrow$ $x = 0$
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- $\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle$

  $\langle x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \rangle = \lambda_1 \langle x, y_1 \rangle + \lambda_2 \langle x, y_2 \rangle$

Prop 1.1 内积 $\rightsquigarrow$ 范数/模 $\rightsquigarrow$ 度量/距离

Prop 1.2　范数可由内积诱导 $\Leftrightarrow$ 满足平行四边形法则

参考：《流形和Stokes定理》 P3 定理3

《数学分析教程第三册》 P115

1.2 度量空间 收敛性和完备化

$$x_n \in X,\ x_0 \in X,\ x_n \to x_0 \overset{def}{\Longleftrightarrow} d(x_n, x_0) \to 0$$

等距同构与等距嵌入

(X, d_X), (Y, d_Y) 度量空间

$f: X \to Y$，且 $\forall x_1, x_2 \in X$, $d_X(x_1, x_2) = d_Y(f(x_1), f(x_2))$

称 f 等距嵌入，若 f 双射，称为等距同构

完备度量空间：

称 (X, d) 完备，若 Cauchy 列有极限，i.e.

$\{x_n\} \in X$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, $\forall m, n > N$, $d(x_m, x_n) < \varepsilon$

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$

完备化.

(X, d_X), (Y, d_Y) 度量空间，且 (Y, d_Y) 完备. 若存在等距嵌入

$$f: (X, d_X) \to (Y, d_Y)$$

s.t. $\forall y \in Y$, $\exists \{x_n\} \subset X$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y$ (i.e. $\overline{f(X)} = Y$)

称 (Y, d_Y) 是 (X, d_X) 的完备化.

Theorem 1.3

$\forall (X, d)$ 为度量空间，其完备化存在且唯一

（在等距同构意义下）

（具体证明参考群精华消息，不过本人水平有限，证明比较冗长）

1、Cauchy 列构成空间 W，定义 W 上一些等价关系

（两 Cauchy 列极限相同视为同一元素）

2、定义 W 上度量

3、证明完备性

4、完备化显然

5、证明唯一性