数学分析B3期中试卷

姓名：

学号：

1. (20分)

1）证明实数空间的开集是至多可数个开区间的并。

2）证明实数空间中的至少包含两个点的连通集合必为一个区间。

(1) ~~设 $U$ 为开集，$\forall x \in U$，记 $a_x = \inf\{y \in \mathbb{R} \mid (y, x) \subset U\}$~~

~~$b_x = \sup\{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \subset U\}$.~~

1) 法(1)，设 $U$ 为开集，$\mathcal{U} = \{C \subset U \mid C$ 为 $U$ 连通分支$\}$，由(2)，

$\forall C \in \mathcal{U}$，$C$ 是区间，因 $U$ 开，$C$ 是开区间

而 $\exists\, q_C \in \mathbb{Q}$，$q_C \in C$，故可定义 $\varphi: \mathcal{U} \to \mathbb{Q}$，$C \mapsto q_C$

为单射，$\mathcal{U}$ 至多可数 □.

法(2)，$\forall x \in U$，存在唯一最大的包含 $x$ 的开区间 $(a_x, b_x) \subset U$.

则 $y \in (a_x, b_x) \Leftrightarrow (a_y, b_y) = (a_x, b_x)$.

故 $U = \bigcup\limits_{x} (a_x, b_x)$，$\exists\, I \subset U$，$U = \bigsqcup\limits_{x \in I} (a_x, b_x)$.

$\forall x \in I$，$\exists\, q_x \in \mathbb{Q}$，$q_x \in (a_x, b_x)$，故可定义单射 $\varphi: I \to \mathbb{Q}$，$x \mapsto q_x$.

$I$ 至多可数.

2). 设 $U$ 是这样的集合，只用说明，$\forall a, b \in U$，$a < b$.

则 $\forall c \in (a, b)$，$c \in U$，否则，$U = (U \cap (-\infty, c)) \sqcup (U \cap (c, +\infty))$.

写成两开集不交并，与连通矛盾

2. （20分）

1）证明紧致空间上的连续函数有界，并能达到上确界、下确界。

2）证明紧致空间上的连续函数一定一致连续。

紧致 ~~并~~ ~~也~~ 列紧!!!

1) 法(1). $f: X \to R$. $X$ compact. ~~若非有界~~

~~则~~ $\{f^{-1}((-n,n))\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $X$ 的开覆盖，

$\exists\, n_1 < \cdots < n_k$, $\{f^{-1}((-n_i,n_i))\}_{i=1}^{k}$ 是 $X$ 的开覆盖.

故 $f(X) \subset (-n_k, n_k)$ 有界.

记 $a = \sup\limits_{x \in X} f(x)$. 若不存在 $x_0$, $f(x_0) = a$, 则

$\{f^{-1}((-\infty, a-\frac{1}{n}))\}_{n=1}^{\infty}$ cover $X$, $\Rightarrow \exists\, n_1 < \cdots < n_k$,

$f^{-1}((-\infty, a-\frac{1}{n_k}))$ cover $X \Rightarrow f(x) < a - \frac{1}{n_k}$. 矛盾. 下界同理

法(2). $f$ 连续，$X$ 紧 $\Rightarrow f(X)$ 紧，$\Rightarrow$ 有界 ~~有上确界~~ 可达到上\下界

2) 法(1) $\forall \varepsilon > 0$ $\forall x$, $\exists\, \delta_x > 0$, $\forall x' \in B(x, \delta_x)$. ~~有~~ $|f(x') - f(x)| < \varepsilon/2$. $\{B(x,\delta_x)\}_{x \in X}$ cover $X$.

~~$\exists x_1 \cdots x_n$, $\{B(x_i,\delta_{x_i})\}_{i=1}^{n}$ cover $X$.~~

2'

$\exists\, \delta > 0$, s.t. $\forall\, x_1, x_2$, 若 $d(x_1,x_2) < \delta$, $\exists\, x$, s.t. $x_1, x_2 \in B(x, \delta_x)$.

于是 $|f(x_1) - f(x_2)| \le |f(x_1) - f(x)| + |f(x) - f(x_2)| < \varepsilon$.

故一致连续.

7'

10'

或用有限覆盖

注意 $\delta$ 选取!!!

法(2) 若 $\exists\, \varepsilon_0 > 0$, s.t. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\exists\, x_n, y_n$, $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$, $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0$

度量空间，紧 $\Rightarrow$ 列紧，$\exists\, k_n$, $x_{k_n} \to x_0 \in X$, 因 $d(x_n, y_n) \to 0$.

$y_{k_n} \to x_0 \in X$, $|f(x_n) - f(y_n)| \to |f(x_0) - f(x_0)| = 0$. 矛盾.



$\forall x, \exists\, \delta_x$, s.t. $\forall x' \in B(x, 2\delta_x)$,

$|f(x') - f(x)| < \varepsilon/2$. $\Rightarrow$ 有限 $x_i \Rightarrow \delta = \inf \delta_{x_i}$

$d(x,y) < \delta \Rightarrow \exists\, x_i$, $x, y \in B(x, 2\delta_x)$

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

3. (20分) 实射影空间$\mathbf{R}P^2$的点为$\mathbf{R}^3$中经过原点的所有直线。设$(x,y,z)\neq 0, L=[x,y,z]=\{(\lambda x,\lambda y,\lambda z)|\lambda\in\mathbf{R}\}$为经过此点和原点的直线。请给出$\mathbf{R}P^2$的坐标片，并验证其为二维流形。

$U_x=\{[x,y,z]\mid x\neq 0\}$. $U_y=\{[x,y,z]\mid y\neq 0\}$. $U_z=\{[x,y,z]\mid z\neq 0\}$.

$\varphi_x: U_x\to\mathbb{R}^2,\ [x,y,z]\mapsto(\frac{y}{x},\frac{z}{x})$,

$\varphi_y: U_y\to\mathbb{R}^2,\ [x,y,z]\mapsto(\frac{x}{y},\frac{z}{y})$

$\varphi_z: U_z\to\mathbb{R}^2,\ [x,y,z]\mapsto(\frac{x}{z},\frac{y}{z})$.

$\varphi_x\circ\varphi_y^{-1}: (a,b)\mapsto[a,1,b]\mapsto(\frac{1}{a},\frac{b}{a})$.

$\varphi_x\circ\varphi_z^{-1}$, $\varphi_y\circ\varphi_z^{-1}$ … 同理.

4. (20分） 1）证明$Gl(2,R)=\{A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | detA = ad-bc \neq 0\}$ 是一个四维流形。

2）证明$Sl(2,R)=\{A\in Gl(2,R)|detA=1\}$ 是一个三维流形。

(1) $GL(2,\mathbb{R}) = det^{-1}\{0\}^c \underset{open}{\subset} \mathbb{R}^4 \Rightarrow$ 四维流形.

(2) 法(1). $det: GL(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, rank 恒为1.

故 $det^{-1}(1)$ 是 3维流形.

法(2). $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

$U_{ij} = \{A \in SL(2,\mathbb{R}) \mid a_{ij} \neq 0\}$.

$\varphi_{ij}: U_{ij} \to \mathbb{R}^3$,

$\varphi_{11}: U_{11} \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mapsto (a_{11}, a_{12}, a_{21})$.

$\varphi_{12}: U_{12} \to \mathbb{R}^3$, $(\sim) \mapsto (a_{11}\ a_{12}\ a_{22})$.

$\varphi_{21}: U_{21} \to \mathbb{R}^3$ $(\sim) \mapsto (a_{11}, a_{21}\ a_{22})$.

$\varphi_{22}: U_{22} \to \mathbb{R}^3$ $(\sim) \mapsto (a_{12}\ a_{21}\ a_{22})$.

再验证 $\varphi_{ij} \circ \varphi_{kl}^{-1}$ ……(略).

5. (20分）考虑单位球面 $S^2=\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3|(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2=1\}$. 令$(\theta,\phi)$ 为$S^2$的一个局部坐标卡, $(x_1,x_2,x_3)=(\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\theta),\theta\in(0,\pi),\phi\in(0,2\pi)$. 记$I$ : $S^2\subset R^3$ 为包含映射。

1）试将$I_*(\frac{\partial}{\partial\theta}),I_*(\frac{\partial}{\partial\phi})$ 表示为$\{\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3}\}$的线性组合。

2）证明$I_*(\frac{\partial}{\partial\theta}),I_*(\frac{\partial}{\partial\phi})$和$x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial}{\partial x_3}$正交。

(1) $I_*(\frac{\partial}{\partial\theta}) = \cos\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial x^1}+\cos\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial x^2}-\sin\theta\frac{\partial}{\partial x^3}$

$I_*(\frac{\partial}{\partial\phi}) = -\sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial x^1}+\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial x^2}$

(2) $\cancel{I_*(\frac{\partial}{\partial\theta})}$ $\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial x^1}+\sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial x^2}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial x^3}$.

（直接计算）