中 国 科 学 技 术 大 学
2020 - 2021学年第二学期期末考试试卷（A卷）

装订线 答题时不要超过此线

考试科目： 线性代数（B1） 得分：__________

所在院、系：__________ 姓名：__________ 学号：__________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							
复查							

一、【每小题5分，共30分】填空题:

1. 若 3 阶方阵 A 的特征值为 $1,3,5$, 则矩阵 A^2-3A 的特征值为__________.

2. 若矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & a & 6 \end{pmatrix}$ 相似于对角阵, 则常数 $a=$__________.

3. 设 $\mathcal{A}$ 是 3 维欧氏空间 V 中的第二类正交变换, 且 $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$ 是 $\mathcal{A}$ 在复数域上的一个特征值,则 $\mathcal{A}$ 的另外两个特征值为__________ 和__________.

4. 设 $\mathbb{R}_2[x]$ 中的某个内积在基 $\alpha_1=x-1,\alpha_2=x+1,\alpha_3=x^2$ 下的度量矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则该内积在基 $\beta_1=2x,\beta_2=-x+1,\beta_3=x^2+2$ 下的度量矩阵为__________.

5. 若矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & a & 5 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ 相合于 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则常数 $a=$__________.

6. 若实二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+tx_1x_2+tx_1x_3+x_2x_3$ 正定, 则 t 满足条件__________.

二、【每小题5分, 共20分】判断题：判断下列命题是否正确, 并简要说明理由或举反例.

1. 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 则齐次线性方程组 $AX=0$ 与 $A^{\mathrm{T}}AX=0$ 同解.

2. 设 n 阶方阵 $A \neq 0$, 且存在正整数 k, 使得 $A^k=0$, 则 $\mathbf{det}(I_n-kA)=1$.

3. 设 $\mathcal{A}$ 是欧氏空间 V 中的一个线性变换, 满足条件: 存在 V 中的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 它们在 $\mathcal{A}$ 中的像仍是 V 中的一组基, 且长度不变. 则 $\mathcal{A}$ 是 V 中的正交变换.

4. 设 A 和 B 都是 n 阶方阵, 则 AB 与 BA有相同的特征多项式.

三、【10+6=16分】考虑线性空间 $V = F^{2\times 2}$, 运算为矩阵的加法与数乘. 取定 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, 定义 V 上的线性变换 $\mathcal{A}\colon V \to V,\quad M \mapsto AM$.

(1) 求 $\mathcal{A}$ 的所有特征值和特征向量.

(2) 求 $\mathcal{A}$ 在基 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵.

四、【12分】考虑线性空间 $V = \mathbb{R}_2[x]$, 运算为多项式的加法与数乘. 对于 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$, 定义

$$(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x) \mathrm{d}x.$$

则 $(V, (,))$ 为欧氏空间. 用Schimidt正交化方法将 $1, x, x^2$ 按顺序改造成标准正交基.

五、【12+2=14分】设实二次型

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

(1) 利用正交变换将该二次型化为标准形, 并写出相应的正交变换矩阵.

(2) 判断 $Q(x_1, x_2, x_3) = 0$ 在三维直角坐标系里所表示的曲面的类型.

六、【8分】已知 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 且 A 的特征值皆为实数. 证明: 存在可逆矩阵 $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 使得 $T^{-1}AT$ 为上三角阵.